Math. A. 49a Broch, O. J.

ERSTE ABTHEILUNG.

GESETZE DES GLEICHGEWICHTS UND DER BEWEGUNG.

MECHANIK

DER

FESTEN KÖRPER.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

LEHRBUCH

DER

MECHANIK

VON

Dr. O. J. BROCH,

AUSSERORDENTLICHEM PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITAET IN CHRISTIANIA.

Bayerische Staatsbibliothek München

BERLIN. 1854. CHRISTIANIA.

VEIT & COMP. FEILBERG & LANDMARK.

529. D.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Das vorliegende Werk, dessen Vollendung durch eine mehrjährige Krankheit des Verfassers verzögert wurde, ist mit besonderer Rücksicht auf die Anwendungen der Mechanik in der Maschinenlehre, in der Baukunde, und im Allgemeinen in der sogenannten Ingenieur-Mechanik ausgearbeitet. Der zweite Abschnitt enthält daher auch die für diese Anwendungen aus den Untersuchungen über die mechanischen Eigenschaften der Körper hervorgehenden Zahlenwerthe. Ich habe diese Werthe unter den genauesten der neueren Untersuchungen mit besonderer Sorgfalt ausgewählt.

Die weite Entfernung des Verfassers vom Druckorte ist an den leider vielen Berichtigungen, welche insbesondere in dem ersten Abschnitte vorkommen, Schuld. Mehrere dieser Fehler sind wahrscheinlich Schreibfehler im Manuscript; etliche auch Rechnungsfehler.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erster Abschnitt. Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung.

Seite

Cap. I. *Wirkungsweise und Maass der Kräfte* 1

Gesetze der Verbindung zwischen einer Kraft und der durch dieselbe hervorgebrachten Bewegung, §. 1—5. 1

Vergleichung von Fussmaassen und Gewichten §. 5. 5

Maass der Schwere auf den verschiedenen Stellen der Erde, §. 6. . 6

Cap. II. *Zusammensetzung und Zerlegung der auf einen Punkt wirkenden Kräfte*, §. 7 - 10. 7

Cap. III. *Statik. Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems mit einander verbundener Punkte, deren Verbindung durch von der Zeit unabhängige Gleichungen zwischen ihren Coordinaten ausgedrückt werden können* 11

Gegebene Kräfte und Kräfte der Verbindung §. 11. 11

Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems von Punkten, deren Verbindung durch eine einzige Gleichung zwischen den Coordinaten dieser Punkte ausgedrückt ist, §. 12. 12

Bedingungen des Gleichgewichts, wenn die Verbindung der Punkte durch zwei oder mehrere Gleichungen ausgedrückt ist, §. 13—14 15

Reduktion jener Bedingungsgleichungen auf eine einzige, welche für alle möglichen Bewegungen stattfinden muss, §. 15. 17

Reduktion dieser Gleichungen in besonderen Fällen, §. 16—17. . . 18

Die Kräftefunktion. Sie muss, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll, ein Maximum oder Minimum sein, §. 18. 21

Satz der virtuellen Geschwindigkeiten, §. 19. 21

Herleitung der im §. 14. dargestellten Bedingungsgleichungen aus diesem Satz, §. 20. 23

Die Gleichgewichtsbedingung ist vollkommen durch diesen Satz ausgedrückt, §. 21. 24

Seite

Cap. IV. *Anwendungen* . 25
a) Gleichgewicht eines Punktes, §. 22. 25
b) Gleichgewicht eines festen Körpers. Wenn der Körper frei ist, §. 23. 26
Wenn der Körper einen festen Punkt hat, §. 24. 28
Wenn der Körper zwei feste Punkte hat, §. 25. 30
Wenn der Körper gegen eine oder mehrere Ebenen oder mehrere krumme Flächen gestützt ist, §. 26. 32
c) Gleichgewicht biegsamer Systeme 33
Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen eines Seilpolygons, §. 27—28. 33
Seilpolygon bei parallelen Kräften, §. 29. 39
Kettenlinie, §. 30. 42
Kette einer Kettenbrücke, §. 31. 49
Seilpolygon bei normalen Kräften, §. 32. 51
Seilpolygon, dessen Verbindungspunkte sich auf einer gegebenen Fläche befinden, §. 33. 51
Kettenlinie, auf einer gegebenen Fläche ruhend, §. 34—35. . 53

Cap. V. *Reduction der Kräfte* 55
Allgemeine Reduction zu einer Kraft, §. 36. 55
Reduction paralleler Kräfte, §. 37—38. 58
Theorie der Kräftepaare. Ihre Versetzung, Transformation und Momente, §. 39—41. 61
Darstellung der Kräftepaare durch gerade Linien; Zusammensetzung der Kräftepaare, §. 42—43. 65
Zerlegung eines Kräftepaares nach den drei Coordinatenebenen, §. 44—45. 69
Reduction mehrerer Kräfte zu einem Kräftepaare, §. 46. . . . 71
Reduction einer Kraft und eines Kräftepaares zu einer Kraft, §. 47. 72
Reduction beliebiger Kräfte zu einer Kraft und einem Kräftepaare, §. 48—49. 74
Centralaxe der gegebenen Kräfte; ihre Eigenschaften, §. 51—54 77

Cap. VI. *Centralpunkt, Centrallinie und Centralebene der Kräfte* . . 82
Bedingungen, unter welchen ein ganz freier Körper astatisch ist, §. 55. 82
Centralpunkt der gegebenen Kräfte; Mittelpunkt paralleler Kräfte, §. 56. 83
Centrallinie der gegebenen Kräfte, §. 57—58 84
Centralebene der gegebenen Kräfte, Mittelpunkt und Mittellinie der Centralebene, §. 59—62. 88
Reduction von Kräften mit unveränderlichen Intensitäten, Richtun-

Seite

gen und Angriffspunkten zu einer Kraft, wenn der Körper um einen Punkt frei bewegt werden kann, §. 63. 93
Bedingungen des Gleichgewichts und Reduction solcher Kräfte, wenn der Körper nur um eine gegebene Axe beliebig gedreht werden kann, §. 64—68. 97
Bedingungen, unter welchen ein um einen festen Punkt oder eine feste Axe drehbarer Körper astatisch ist, §. 69. 102
Stellungen, in welchen ein um einen festen Punkt drehbarer, nicht astatischer Körper im Gleichgewicht ist, §. 70. 103
Stellungen, in welchen ein um eine feste Axe drehbarer, nicht astatischer Körper im Gleichgewicht ist, §. 71. 106
Gleichgewichtsbedingungen eines Systems von Punkten, wenn die Kräfte mit unveränderten Intensitäten und in unveränderlichen Richtungen an ihrem Angriffspunkte haften, §. 72. 107

Cap. VII. *Anwendung der Theorie des Mittelpunktes paralleler Kräfte auf schwere Körper* 109
Allgemeine Formeln des Schwerpunktes, §. 73. 109
Schwerpunkt von Linien; Beispiele §. 74. 110
Relation, welche stattfindet zwischen der Lage des Schwerpunktes einer ebenen krummen Linie und dem Inhalt der Fläche, welche sie durch Umdrehung um eine beliebige gerade Linie in der Ebene der krummen Linie beschreibt, §. 75. . . 114
Schwerpunkt einer Fläche; Beispiele §. 76. 115
Schwerpunkt einer Umdrehungsfläche, §. 77. 122
Relation, welche stattfindet zwischen der Lage des Schwerpunktes einer Ebene und dem Inhalt des Umdrehungskörpers, welchen sie durch eine vollständige Umdrehung um eine in der Ebene liegende Axe beschreibt, §. 78. 126
Schwerpunkt eines Körpers; Beispiele, §. 79. 127
Schwerpunkt eines Umdrehungskörpers, §. 80. 130
Gleichgewicht schwerer Körper, §. 81. 132

Cap. VIII. *Anwendung der Theorie der Centrallinie auf schwere magnetische Körper* 134
Lage der Centrallinie eines schweren magnetischen Körpers, §. 82. 134
Lage des Centralpunktes, wenn der Körper nur um eine auf dem magnetischen Meridian senkrechte Axe drehbar ist, §. 83. . 135
Gleichgewicht eines schweren magnetischen Körpers um einen festen Punkt und um eine feste Axe, §. 84. 136

Cap. IX. *Dynamik. Gesetze der Bewegung eines Systems von mit einander verbundenen Punkten, deren Verbindung durch von der Zeit unabhängige Gleichungen ausgedrückt werden können* . 139

Seite

Das d'Alembertsche Princip des Gleichgewichts der gegebenen und der totalen Kräfte, wenn die letzteren in der der wirklichen Bewegung entgegengesetzten Richtung genommen werden, §. 84. . 139
Die totale Kraft durch die stattfindende Bewegung ausgedrückt; Bewegungsmoment, §. 85. 140
Tangentialkraft und Centrifugalkraft, §. 86. 142
Allgemeine Gleichungen der Bewegung, §. 87. 143
Satz der lebendigen Kraft, §. 88. 144
Berechnung der lebendigen Kraft eines Systems von materiellen Punkten, wenn man besonders ihre Bewegung relativ zum Schwerpunkte des Systems und die Bewegung dieses Schwerpunktes kennt, §. 89. 146
Bewegung des Schwerpunktes eines freien Systems von Punkten. Satz der Erhaltung der Flächen, §. 90. 147
Der Zuwachs der Kräftefunktion ist dem Zuwachs der lebendigen Kraft gleich, §. 91. 151

Cap. X. *Gesetze der Bewegung eines festen Körpers* 152

a) Bewegung des Schwerpunktes eines freien festen Körpers oder eines materiellen Punktes 152
Allgemeine Gleichungen der Bewegung, §. 92. 152
Bewegung im leeren Raume, §. 93—95. 153
Bewegung in einem widerstehenden Medium, §. 96—100 . 155
b) Trägheitsmomente und Hauptaxen der Körper 164
Allgemeine Formel des Trägheitsmomentes eines Körpers in Bezug auf eine gegebene Axe, §. 101. 164
Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige Axe durch das Trägheitsmoment in Bezug auf eine mit dieser parallel durch den Schwerpunkt gehende Axe ausgedrückt, §. 102. 164
Hauptaxen eines Körpers; Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige Axe durch die Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptaxen bestimmt, §. 103. 165
Gleichheit oder Ungleichheit der Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptaxen; Anzahl und gegenseitige Lage der Hauptaxen, §. 104. 167
Bestimmung der Lage der Hauptaxen eines gegebenen Punktes eines Körpers, und Grösse der diesen Axen entsprechenden Trägheitsmomente, §. 105. 168
Bestimmung der Punkte eines Körpers, welche die Eigenschaft haben, dass die Trägheitsmomente in Bezug auf alle durch diese Punkte gehenden Hauptaxen gleich sind, §. 106. 173
Jede durch den Schwerpunkt gehende Hauptaxe ist auch eine Hauptaxe in Bezug auf jeden anderen in ihr liegenden Punkt, §. 107. 174

Seite

Beispiele der Berechnung der Trägheitsmomente, §. 108. . . 175

Berechnung des Trägheitsmomentes eines Umdrehungskörpers von gleichförmiger Dichtigkeit in Bezug auf die Umdrehungsaxe oder in Bezug auf eine auf dieser senkrechte Axe, §. 109. 177

c) Gesetze der relativen Bewegung eines festen Körpers in Bezug auf seinen Schwerpunkt 180

Augenblickliche Drehungsaxe und Winkelgeschwindigkeit, §. 110. 180

Werthe der von den Radii vectores beschriebenen, mit der Masse der entsprechenden Punkte multiplicirten Flächenräume, §. 111. 183

Allgemeine Differentialgleichungen der Bewegung eines freien festen Körpers, §. 112. 185

Wenn der Körper einen festen Punkt hat, §. 113. 187

Wenn die Momente der gegebenen Kräfte in Bezug auf diesen festen Punkt Null sind, §. 114. 188

Centralellipsoid des Körpers, §. 115. 190

Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt, §. 116. 194

Bewegung um eine feste Axe, §. 117. 196

Druck auf die feste Axe, §. 118. 197

Theorie des Schwungrades, § 119. 198

Theorie des physischen Pendels im leeren Raume, §. 120—122. 200

Bewegung des Pendels in der Luft, §. 123—125. 206

Schwingungen eines festen Körpers, wenn die gegebenen Kräfte auf zwei während der Bewegung immer an demselben Punkte haftende Kräfte reducirt werden können, §. 126. 215

Gesetze der Bewegung eines festen Körpers auf einer festen Ebene, §. 127. 216

Wenn die gegebenen Kräfte die Schwere und eine dem Drucke proportionale Reibung sind, §. 128. 218

Bewegung eines geraden Cylinders auf einer schiefen Ebene, §. 129. 219

Zweiter Abschnitt. Mechanische Eigenschaften der Körper und deren Einfluss auf die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung.

Cap. I. *Theorie der Molekülarzusammensetzung der Körper*, §. 130—135. 223

Cap. II. *Theorie der allgemeinen Gravitation* 227

Anziehung eines materiellen Punktes von einem Körper, §. 136—137. 227

Seite

Reduction der vorhergehenden Formeln, wenn der Abstand des angezogenen Punktes sehr gross in Bezug auf die Ausdehnung dieses Körpers ist, §. 138. 232
Anziehung einer concentrischen und homogenen Kugelschicht, §. 134—140. 233
Anziehung einer aus homogenen concentrischen Schichten verschiedener Dichtigkeit bestehenden Kugel, §. 141. 238
Anziehung eines homogenen Ellipsoids, §. 142. 239
Anziehung einer homogenen ellipsoidischen Schicht, von zwei concentrischen Ellipsoidflächen mit proportionalen Axen begrenzt, §. 143. 244
Reduction der Formeln, wenn das gegebene Ellipsoid ein Umdrehungsellipsoid ist, §. 144. 245
Anziehung der Erde auf einen äusseren Punkt, wenn die Erde als aus Schichten verschiedener Dichtigkeit bestehend angenommen wird, welche durch concentrische Umdrehungs-Ellipsoide mit gemeinschaftlicher Axe und verschiedener, aber immer sehr kleiner Excentricität begrenzt sind, und auf die Umdrehungsbewegung Rücksicht genommen wird, §. 145—146. 250
Anziehung zweier Massen, §. 147. 261
Tafel des specifischen Gewichts und des Gewichts einer Cubikeinheit bei verschiedenen Körpern, §. 148. 264

Cap. III. *Gesetze des Gleichgewichts fester elastischer Körper* . . . 265

a) Widerstand der Körper gegen Zerreissen und Zerdrücken . 265
Elasticitätsgrenze und Elasticitätscoefficient; Ausdehnung und Zusammendrückung gerader Körper, §. 149—150. . . . 265
Ausdruck des Elasticitätscoefficienten durch die Molekülarkraft, §. 151. 269
Ausdehnung oder Zusammenziehung des Querschnittes. Elastische Nachwirkung, §. 152. 269
Absolute und rückwirkende Tragfähigkeits- und Festigkeitscoefficienten, §. 153. 270
Lebendige Widerstandskraft, §. 154. 273
Ausdehnung und Zusammendrückung eines prismatischen Körpers durch sein eigenes Gewicht und eine an dem einen Ende angebrachte Last, §. 155. 273
Form eines ausgedehnten oder zusammengedrückten Körpers, wenn die Spannung auf der Flächeneinheit in jedem Querschnitte gleich sein soll, §. 156. 275
Theorie der elastisch-dehnbaren Kettenlinie, §. 157—158. . 278
Allgemeine Theorie der Elasticitätsbogen der Belastung, §. 159. 285
Wenn die auf den Bogen der mittleren Axenschicht wirkenden Kräfte auf diesem normal sind, §. 160. 288

Seite

Wenn jene Kräfte parallel und den ihrer Richtung parallelen Coordinaten proportional sind, §. 161. 290
Tafel der bei verschiedenen Körpern stattfindenden Werthe des Elasticitätscoefficienten, der absoluten und rückwirkenden Tragfähigkeits- und Festigkeitscoefficienten, §. 162. 292

b) Widerstand der Körper gegen Biegung 294
Bedingungen des Gleichgewichts eines gebogenen prismatischen Körpers. Neutrale Axenschicht- und Biegungsmoment, §. 163. 294
Beispiele der Berechnung des Biegungsmomentes, §. 165. . 298
Biegung eines prismatischen Körpers an der Elasticitätsgrenze, §. 166. 301
Biegung eines an einem Ende horizontal befestigten prismatischen Körpers, wenn dieser nur durch eine am anderen Ende vertikal wirkende Kraft gebogen wird, §. 167. . 302
Biegung desselben Körpers, wenn er ausserdem in jedem Punkte seiner ganzen Länge nach mit auf irgend eine Weise vertheilten Gewichten belastet ist; gleichmässige Belastung, §. 168. 307
Biegung desselben Körpers bei discontinuirlicher Belastung, §. 169. 310
Biegung, wenn der Körper nicht genau horizontal eingemauert ist, §. 170. 314
Biegung eines horizontalen, an beiden Enden unterstützten prismatischen Körpers durch ein irgendwo angebrachtes Gewicht, §. 171. 314
Wenn die Last in der Mitte des Körpers angebracht ist, §. 172. 318
Biegung desselben Körpers durch ein irgendwo angebrachtes Gewicht und durch eine gleichförmige Belastung, §. 173. 319
Biegung desselben Körpers durch ein in der Mitte angebrachtes Gewicht und durch eine gleichförmige Belastung, §. 174. 323
Biegung eines an dem einen Ende horizontal eingemauerten, an dem andern Ende in derselben horizontalen Lage unterstützten prismatischen Körpers, §. 175—176. 324
Biegung eines an beiden Enden horizontal eingemauerten prismatischen Körpers, §. 177—178. 335
Biegung eines in vier Punkten unterstützten prismatischen Körpers durch eine gleichmässige Belastung, §. 179. . . 346
Biegung eines schräg eingemauerten prismatischen Körpers durch ein an dem freien Ende angebrachtes Gewicht, §. 180—181. 352
Biegung eines vertikalen, am unteren Ende fest eingemauer-

Seite

ten prismatischen Körpers durch ein am oberen Ende angebrachtes Gewicht, §. 183. 362
Biegung eines vertikalen, auf eine horizontale feste Ebene gestützten prismatischen Körpers, §. 184. 370
Biegung eines ursprünglich krummen, an einem Ende fest horizontal eingemauerten Körpers, §. 185—188. 376
Biegung eines krummen Körpers, welcher von einer horizontalen Ebene getragen wird, §. 189. 386
Biegung desselben Körpers, wenn die beiden Endpunkte sich nicht von einander entfernen können, §. 190. 389
Körper gleichen Widerstandes; ihre Form und Biegung, wenn der Körper an einem Ende horizontal eingemauert ist, §. 191. 392
Wenn der Körper an beiden Endpunkten horizontal unterstützt ist, §. 192. 400
c) Widerstand der Körper gegen Drehung, §. 193. 404

Cap. IV. *Gesetze der Bewegung fester elastischer Körper* 410
Dynamische Arbeit der Molekülarkraft, §. 194. 410
Bewegung einer materiellen Linie, §. 195—196. 413
Längenschwingungen eines prismatischen Körpers, §. 197. . . 415
Transversale Schwingungen eines prismatischen Körpers, §. 198. 418
Theorie des Stosses, §. 199—202. 421
Anwendung auf das Einrammen der Pfähle, §. 203. 426
Theorie der Reibung, §. 204—209. 428
Reibung auf einer schiefen Ebene, §. 210—211. 435
Reibung eines Stampfers, §. 212. 439
Reibung einer stehenden Welle, §. 213—214. 441
Reibung bei einer rechteckigen Schraube, §. 215. 446
Reibung eines Riemens an einem Cylinder, §. 216. 449
Reibung zweier Zahnräder, §. 217—219. 451
Dynamische Arbeit des drehenden Reibungswiderstandes, §. 220. 457
Anwendung auf einen, auf einer schiefen Ebene gezogenen Karren, §. 221. 458
Tafeln der Reibungscoefficienten, §. 222. 461
Steifigkeit der Seile, §. 223. 465

Cap. V. *Gesetze des Gleichgewichts tropfbar-flüssiger Körper* . . . 466
Grundeigenschaften der tropfbaren Flüssigkeiten, §. 224—227. . 466
Allgemeine Gleichgewichtsgleichung, §. 228. 470
Gleichdrucksfläche, §. 229. 472
Druck einer schweren Flüssigkeit, §. 230. 472
Druck auf einer schiefen Ebene, Mittelpunkt des Druckes, §. 231. 473
Horizontaler und vertikaler Druck auf einer krummen Fläche, §. 232. 477

Seite

Druck auf einen eingetauchten Körper. Archimedisches Princip der Hydrostatik, §. 233. 480
Gleichgewichtsbedingungen eines schwimmenden Körpers, §. 234. 481
Stetiges und unstetiges Gleichgewicht. Bedingungen der Stabilität, §. 235. 486
Anwendung auf ein schwimmendes homogenes Ellipsoid, §. 236. 492

Cap. VI. *Gesetze der Bewegung tropfbar-flüssiger Körper* 493

Allgemeine Gleichungen der Bewegung tropfbar-flüssiger Körper, §. 237 – 239. 493
Zurückführung der partiellen Differentialgleichungen der Bewegung auf eine einzige Differentialgleichung, §. 240 – 241. . 498
Transformation der allgemeinen Gleichungen der Bewegung, wenn während der Bewegung Alles in Bezug auf eine Axe symmetrisch ist, §. 242 – 243 501
Theorie der linearen Bewegung, §. 244. 506
Berechnung des Druckes, wenn die Centrifugalkraft der bewegten Flüssigkeit berücksichtigt wird, §. 245. 510
Integration der Differentialgleichung der linearen Bewegung, wenn der Canal stets gefüllt wird, §. 246. 512
Ausflussgeschwindigkeit bei einem beständig voll gehaltenen Gefässe, §. 247. 515
Druck im Innern der Flüssigkeit. Hydraulische Druckhöhe, §. 248. 517
Mittlere Druckhöhe einer Ausflussöffnung, §. 249—251. . . . 518
Contraction des Wasserstrahls, §. 252. 524
Contraction und Ausflusscoefficient, §. 253. 526
Ausflusscoefficienten rectangulärer Oeffnungen, §. 254. 526
Ausfluss durch Ueberfälle, §. 255. 528
Unvollständige oder partielle Contraction, §. 256. 530
Ausflusscoefficienten bei Oeffnungen in nicht ebenen Wänden, §. 257. 531
Ausflussgeschwindigkeit und Ausflussmenge bei einer Zuflussgeschwindigkeit, §. 258. 532
(Wegen Ueberfälle siehe Seite 578.)
Bewegung des Wassers, wenn plötzliche Veränderungen der Geschwindigkeit stattfinden. Widerstandscoefficienten und Druckhöhenverlust einer plötzlichen Verengung oder Erweiterung, §. 259 – 260. 534
Widerstandscoefficienten verschiedener Ventile, §. 261. . . . 541
Ausfluss durch untergetauchte Oeffnungen; untergetauchte oder unvollständige Ueberfälle, §. 262. 545
Widerstand gegen die Bewegung des Wassers in langen Röhren, §. 263. 545
Ausfluss durch eine Röhrenleitung, §. 264 — 266. 549

	Seite
Widerstand eines Kniees oder einer Krümmung in einer Röhrenleitung, §. 267.	554
Sprunghöhe eines Wasserstrahls, §. 268.	556
Vertheilung des Wassers, welches aus einer Hauptröhre in Seitenröhren geleitet wird, §. 269.	557
Druck des Wassers in einem beliebigen Punkte der Röhrenleitung, Piëzometer, §. 270.	558
Vortheilhaftestes Querprofil eines offenen Canals, §. 271.	559
Permanente Bewegung des Wassers in einem Canal, §. 272.	561
Gleichförmige Bewegung des Wassers, §. 273.	566
Stromstrich und Stromrinne eines Flusses; mittlere Geschwindigkeit eines Querschnittes, §. 274.	568
Ungleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen, §. 275.	570
Bedingungen, damit in einem Canal keine Anschwellung des Wassers stattfinden soll, §. 276.	572
Ungleichförmige Bewegung im rechtwinkligen Canal, §. 277.	574
Geschwindigkeitsänderungen und Veränderungen der Wassermenge eines Flusses oder Canals, wenn derselbe seinen Wasserstand ändert, §. 278.	574
Aufstauung des Wassers durch Dämme oder Wehre, §. 279.	576
Ueberfallwehre, §. 280.	577
Durchlasswehre, §. 281.	579
Lichte Wehre, §. 282.	580
Fall, in welchem die Aufstauung einen Sprung bildet, §. 284.	583
Ausfluss des Wassers aus einem Behälter, welcher keinen Zufluss erhält, §. 285—289.	585
Wenn der Behälter zwar einen Zufluss erhält, der aber kleiner als der Ausfluss ist, §. 290.	597
Ausfluss des Wassers aus einem Behälter in einen andern, §. 291.	599
Druck des bewegten Wassers gegen das Gefäss, aus welchem es herausfliesst, §. 292.	600
Freie Oberfläche und Druck des Wassers in einem bewegten Gefässe, §. 293—294.	604
Ausfluss des Wassers aus einem mit gleichförmiger Umdrehungsgeschwindigkeit bewegten Gefässe, §. 295.	606
Stoss eines isolirten Wasserstrahls, §. 296.	608
Dynamische Arbeit, welche ein Wasserstrahl einem Gefäss oder einer Reihe von Gefässen, in welche er eintritt, mittheilt, §. 297.	614
Widerstand eines bewegten festen Körpers in einer ruhenden unbegrenzten Flüssigkeit und eines ruhenden Körpers in einer bewegten Flüssigkeit, §. 298—304.	617

Seite

Vergleichung der Theorie des Widerstandes mit derjenigen des Ausflusses, §. 305. 630
Widerstand in einer begrenzten Flüssigkeit, §. 306. 632
Widerstand bei einem schwimmenden Körper, §. 307. 633

Cap. VII. *Gesetze des Gleichgewichts luftförmig-flüssiger Körper* . 637

Mariotte'sches Gesetz des Verhältnisses der Spannung und der Dichtigkeit. Specifisches Gewicht verschiedener Gasarten, §. 308. 637
Ausdehnung der Gasarten durch die Wärme, §. 309. 639
Gleichgewicht einer Mischung von Gasarten, §. 310. 640
Gleichungen des Gleichgewichts einer luftförmigen Flüssigkeit, §. 311. 641
Archimedisches Princip des Gleichgewichts fester Körper in einer Gasart, §. 312. 642
Gesetze der Abnahme der Spannung der Atmosphäre in verschiedenen Höhen über der Meeresfläche; Bestimmung dieser Höhe durch Barometermessungen unter Voraussetzung einer konstanten Temperatur der Atmosphäre, §. 313—315. . . 643
Tafeln zur Höhenmessung mittelst des Barometers, §. 316. . . 651
Modification der vorhergehenden Formeln, wenn die Temperatur als mit der Höhe gleichmässig abnehmend angenommen wird, §. 317—318. 653
Reduction der Barometerhöhe zur Meeresoberfläche, §. 319. . . 660
Modification der vorhergehenden Formeln, wenn auf die Zusammensetzung der Atmosphäre Rücksicht genommen wird, §.320. 662
Spannung der Wasserdämpfe bei verschiedenen Temperaturen, §. 321. 664

Cap. VIII. *Gesetze der Bewegung luftförmig-flüssiger Körper* . . . 666

Allgemeine partielle Differentialgleichungen der Bewegung, §. 322. 666
Theorie der linearen Bewegung luftförmiger Körper, §. 323. . 668
Ausflussgeschwindigkeit einer Gasart bei constantem Drucke und Gegendrucke, §. 324. 671
Dieser entsprechende Ausflussmenge, §. 325. 674
Spannung und entsprechende Manometerhöhe in irgend einem Querschnitte des Gefässes, §. 326. 675
Ausflussgeschwindigkeit, wenn plötzliche Veränderungen des Querschnittes in dem Gefässe oder Rohre stattfinden, §. 327 —328. 677
Ausfluss durch ein cylindrisches Ansatzrohr, §. 329. 682
Widerstand einer langen Röhrenleitung gegen die Bewegung einer Gasart, §. 330. 685

Seite

Ausflussmenge und dieser entsprechende Manometerhöhe bei einer langen Röhrenleitung, §. 331. 686
Ausströmung aus einem Reservoir mit constantem Volumen, §. 332. 687
Ausströmung aus einem Reservoir in ein zweites begrenztes Reservoir von constantem Volumen, §. 333. 689
Widerstand der Luft gegen die Bewegung fester Körper, und Widerstand fester Körper gegen die Bewegung der Luft, §. 334. 690
Gewicht der trockenen atmosphärischen Luft, §. 335. 694
Gesetze der Bewegung eines Projectils in der Luft, §. 336. . . 694

Bayer. Staats-Bibliothek München

Erster Abschnitt.

Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung.

Cap. I.

Wirkungsweise und Maass der Kräfte.

§. 1.

Die Ursache, welche einen Punkt in Bewegung setzt, nennt man Kraft. Beispiele verschiedener Kräfte sind: die Muskelkraft, die Anziehungskraft der Erde oder die Gravitationskraft, die Adhäsionskraft, die Wärme als Ursache der Ausdehnung und Verdampfung der Körper betrachtet, der Magnetismus u. s. w.

Die Richtung einer Kraft wird die gerade Linie genannt, welche sie den von ihr angegriffenen Punkt beschreiben zu lassen strebt; dieser Punkt wird der Angriffspunkt genannt.

Zwei Kräfte heben einander auf, wenn sie keine Wirkung hervorzubringen oder auch nicht die, welche vorhanden ist, zu verändern streben.

Eine Kraft wird die Resultante mehrerer anderen Kräfte genannt, wenn sie allein wirkend dieselbe Wirkung wie jene anderen Kräfte hervorbringen würde.

Eine Kraft wird graphisch durch eine gerade Linie dargestellt, welche die Richtung der Kraft angiebt und ihrer Grösse proportional ist.

Bayer. Staat Bibliothek München

§. 2.

Wenn eine Kraft auf einen Punkt der Oberfläche eines festen Körpers wirkt, so übt sie auf dieselbe einen Druck aus, welcher die am nächsten liegenden Molekülen gegen die denselben am nächsten befindlichen zu treiben strebt und diese wieder gegen diejenigen, welche ihnen am nächsten liegen, und so weiter fort bis zum andern Ende des Körpers. Ist dies Ende fest, so wird die Kraft eine Zusammendrückung oder Veränderung der Form des Körpers hervorbringen. Ist das Ende hingegen frei, so wird dies sich vorwärts bewegen, so dass die Bewegung folglich successive dem ganzen Körper mitgetheilt worden ist. Diese innere Mittheilung bedarf einer gewissen Zeit um ausgeführt zu werden, und es ist deswegen unmöglich, dass eine Geschwindigkeit momentan irgend einem Körper mitgetheilt werden könnte.

Dasselbe würde der Fall sein, wenn eine Kraft dazu angewandt wird, die Bewegung aufzuheben, welche ein Körper schon hat; sie würde erst die Bewegung der dem Wirkungspunkte nächsten Molekülen aufheben und dann successive diejenige der entfernteren.

Wir haben vorausgesetzt, dass die Kraft auswendig auf den Körper wirke, das heisst von aussen nach innen auf ihn drücke; wirkte sie aber von innen nach aussen, wenn sie folglich den Körper zöge oder streckte, so würden die Molekülen von einander entfernt statt einander genähert werden, und die folgenden Molekülen würden dann in Folge der Anziehungskraft, welche zwischen ihnen stattfindet, denselben Abstand von den ersten wie vorher einzunehmen streben, und folglich das andere Ende des Körpers, wenn es frei ist, nach sich ziehen. Zur Fortpflanzung dieser Kraft wird dann auch eine gewisse Zeit nöthig sein.

Die Körper werden hiernach aus Molekülen zusammengesetzt gedacht, welche in einer bestimmten Entfernung von einander durch Molekülarkräfte gehalten werden, und welche sich als anziehend zeigen, wenn der Abstand der Molekülen vergrössert, und als abstossend, wenn der Abstand der Molekülen vermindert wird.

Eine Kraft kann also nicht auf einen Körper wirken, ohne dass die Molekülarkräfte dieses Körpers reagiren, und diese Reaction ist immer im Zustande der Ruhe der Action gleich, aber entgegengesetzt. Wirkt eine Kraft nicht unmittelbar, sondern durch ein Seil, eine Stange oder dergleichen, so wird die Kraft durch eine Reihe von Actionen und Reactionen von dem einen Ende des Seils oder der Stange zum anderen Ende und zum Körper fortgepflanzt. Zu dieser Fortpflanzung der Kraft ist aber eine gewisse Zeit nöthig.

§. 3.

Die Bewegung eines Punktes wird gleichförmig genannt, wenn der Punkt in gleichen Zeiträumen gleiche Räume durchläuft. Sind dagegen die Räume ungleich, so wird die Bewegung veränderlich genannt, und zwar accelerirend, wenn die durchgelaufenen Räume immer grösser, retardirend, wenn sie immer kleiner werden.

§. 4.

Was die Verbindung betrifft, welche zwischen einer Kraft und der durch dieselbe hervorgebrachten Bewegung stattfindet, so hat die Erfahrung uns folgende Gesetze gelehrt.

I. Ein Körper kann nicht in Bewegung kommen, auch nicht die schon vorhandene Bewegung ändern weder in Richtung noch in Grösse, wenn nicht eine oder mehrere Kräfte auf ihn wirken.

Dies wird das Gesetz der Trägheit genannt.

Der Widerstand, welchen die Trägheit eines Körpers jeder Veränderung des Zustandes, in welchem sich der Körper befindet, entgegensetzt, muss der Bewegung des Körpers entgegengesetzt sein, wenn diese accelerirend ist, dagegen dieselbe begünstigen, wenn sie retardirend ist.

II. Die Geschwindigkeiten, welche verschiedene unveränderliche Kräfte in gleichen Zeiträumen demselben Körper mittheilen können, stehen in demselben Verhältniss zu einander wie die Kräfte selbst; ebenso verhält sich auch zu einander diejenige Vermehrung oder Verminderung der Geschwindigkeit eines bewegten Körpers,

welche verschiedene in der Richtung der Bewegung wirkende Kräfte diesem Körper mittheilen.

Wenn also in einer gewissen Zeit die Kraft K einem Körper die Geschwindigkeitszunahme ΔV, und die Kraft k, während einer ebenso langen Zeit wirkend, demselben Körper die Geschwindigkeitszunahme Δv mittheilen kann, so ist:

$$K : k = \Delta V : \Delta v.$$

Dies wird das Gesetz der Proportionalität der Kräfte und der Variationen der Geschwindigkeiten genannt.

III. Um auf derselben Stelle der Erde bei verschiedenen Körpern dieselbe Veränderung der Geschwindigkeiten hervorzubringen, müssen die Kräfte der Schwere der Körper proportional sein.

Wenn also in einer gewissen Zeit die Kraft K einem Körper, dessen Schwere P ist, eine gewisse Vermehrung oder Verminderung der in der Richtung der Kraft stattfindenden Geschwindigkeit mittheilt, und in einer ebenso grossen Zeit die Kraft k einem anderen Körper, dessen Schwere p ist, dieselbe Vermehrung oder Verminderung der Geschwindigkeit mittheilt, so ist

$$K : k = P : p.$$

Ist die Vermehrung der Geschwindigkeit eine Längeneinheit in einer Zeiteinheit, so wird die dazu nöthige Kraft, in der Richtung der Bewegung als wirkend angenommen, die Masse des Körpers genannt. Bezeichnen wir die Massen der beiden Körper durch M und m, und die Geschwindigkeitszunahme, welche jede der Kräfte K und k den Körpern P und p in einer Zeiteinheit mittheilen würde, ΔV, so ist nach dem zweiten Gesetze:

$$K : M = \Delta V : 1,$$

$$k : m = \Delta V : 1,$$

folglich:

$$K : k = M : m.$$

Weil jetzt

$$K : k = P : p,$$

wird auch

$$M:m = P:p.$$

Das dritte Gesetz wird deswegen das **Gesetz der Proportionalität der Massen und der Schweren der Körper** genannt.

IV. *Wenn eine Kraft auf einen Körper wirkt, welcher schon eine gewisse Bewegung hat, so wird die neue hierdurch hervorgebrachte Bewegung relativ zur ursprünglichen dieselbe sein, als wenn der Körper ursprünglich in Ruhe gewesen wäre.*

Bewegt sich folglich ein Punkt so, dass er in jeder Zeiteinheit ein Stück Weges durchläuft, dessen Richtung und Grösse durch die Linie AB (Fig. 1) dargestellt werden mag, und in dem Augenblick, wo der Körper in A war, eine Kraft auf denselben wirkt, welche in einer Zeiteinheit den Körper nach C gebracht haben würde, wenn er ursprünglich in Ruhe gewesen wäre, so wird diese Kraft jetzt den Punkt nach D bringen, wo BD gleich und parallel mit AC ist. Der Punkt wird sich folglich in der Richtung der Diagonale AD bewegen, als wäre er von einer Kraft bewegt, welche in dieser Richtung wirkte und sich zu den Kräften, welche längs AB und AC wirken, verhält, wie die Linie AD zu den Linien AB und AC.

Dies wird das **Gesetz der Unabhängigkeit der ursprünglichen Bewegung und der Richtung der Kraft** genannt, oder auch das Gesetz des Parallelogramms der Kräfte.

Auf diesen vier Gesetzen ist die ganze Mechanik gegründet.

§. 5.

Wegen des zweiten Gesetzes der Proportionalität der Kräfte und der Variationen der Geschwindigkeiten können Kräfte mit einander verglichen werden, wenn man die Geschwindigkeiten, welche sie in einem gewissen Zeitraume einem Körper mittheilen können, mit derjenigen vergleicht, welche die Schwere demselben Körper in demselben Zeitraume mitzutheilen fähig ist. Die Kräfte werden deswegen durch die Angabe des Gewichts desjenigen Körpers bezeichnet, welchem sie dieselbe Geschwindigkeit wie die Schwere mittheilen können.

Die preussische Einheit des Gewichts ist das Pfund, welches gleich $\frac{1}{66}$ des Gewichts eines Kubikfusses destillirten Wassers ist, im luftleeren Raume und bei 15° Reaumur gewogen.

Die preussische Längeneinheit ist der 0,3156769 oder nahe $\frac{149}{472}$ Theil der Länge des einfachen Secundpendels in Berlin.

Zur Vergleichung mit den wichtigsten fremden Längen- und Gewichtseinheiten sind die beiden folgenden Tafeln hier hinzugesetzt:

Vergleichung von Fussmaassen.

Französischer Metre	Pariser Fuss	Preuss., Dänischer Fuss	Norwegischer Fuss	Schwedischer Fuss	Wiener Fuss	Englisch., Russisch. Fuss
1	3,078444	3,186199	3,187354	3,368125	3,163446	3,280899
0,324839	1	1,035003	1,055206	1,094100	1,027612	1,065765
0,313853	0,966181	1	1,019520	1,057098	0,992859	1,029722
0,313740	0,965831	0,999640	1	1,036859	0,973849	1,010007
0,296901	0,913993	0,945986	0,964452	1	0,939234	0,974102
0,316111	0,973130	1,007193	1,026853	1,064701	1	1,037128
0,304794	0,938293	0,971136	0,990092	1,028953	0,964201	1

Vergleichung von Gewichten.

Französisches Kilogramm	Preussisches Pfund	Dänisches Pfund	Norwegisches Pfund	Schwedisches Pfund	Oesterreich. Pfund	Engl. Adp. Pfund	Russisches Pfund
1	2,138072	2,002768	2,007572	2,351063	1,785675	2,204597	2,441883
0,467711	1	0,936712	0,938964	1,099618	0,835180	1,031114	1,142096
0,499309	1,067559	1	1,002399	1,173907	0,891604	1,100775	1,219254
0,498114	1,065004	0,997607	1	1,171099	0,889470	1,098141	1,216336
0,425339	0,909407	0,851856	0,853900	1	0,759518	0,937702	1,038629
0,560012	1,197347	1,121574	1,124265	1,316624	1	1,234601	1,367484
0,453598	0,969824	0,908451	0,910630	1,066437	0,809978	1	1,107632
0,409520	0,875583	0,820173	0,822141	0,962807	0,731270	0,902827	1

§. 6.

Bezeichnet man durch P das Gewicht eines Körpers, durch g die Geschwindigkeit, welche die Schwere dem Körper in einer Sekunde mittheilt, durch M die Masse des Körpers, d. h. eine Kraft,

welche in einer Sekunde dem Körper die Geschwindigkeit 1 mittheilen kann, so ist in Folge des zweiten Gesetzes:

$$P : M = g : 1,$$

folglich:

$$M = \frac{P}{g}, \quad g = \frac{P}{M}.$$

Dieses Verhältniss $\frac{P}{M}$ ist aber in Folge des dritten Gesetzes dasselbe für alle Körper auf derselben Stelle der Erde, folglich ist auch g oder die Geschwindigkeit, welche ein Körper im freien Falle und im luftleeren Raume nach einer Sekunde erlangt hat, dieselbe für alle Körper auf derselben Stelle der Erde. Ihr Werth auf den verschiedenen Stellen der Erde kann mit grosser Genauigkeit durch die Formel:

$$g = 31{,}24394\ (1 - 0{,}0025911 \cos 2\varphi) \text{ pr. Fuss},$$

ausgedrückt werden, wo φ die geographische Breite der Stelle bezeichnet. Diese Formel ist indessen nur eine Annäherungsformel, indem die Schwere in demselben Parallelkreise nicht überall genau dieselbe ist. In Berlin ist

$$g = 31{,}26491 \text{ pr. Fuss}.$$

Cap. II.

Zusammensetzung und Zerlegung der auf einen Punkt wirkenden Kräfte.

§. 7.

Aus dem vierten Hauptgesetze der Mechanik folgt, dass, wenn zwei Kräfte auf einen Punkt A wirken, und die eine in einem gewissen Zeitraume, wenn sie allein gewirkt hätte, den Punkt von A bis B (Fig. 1) bewegen würde, die zweite, wenn sie allein gewirkt hätte, den Punkt von A bis C bewegen würde, so wird dieser Punkt, wenn beide Kräfte zugleich wirken, von A bis D bewegt werden längs der Diagonale des Parallelogramms, welches von den Linien AB und AC gebildet wird.

Bezeichnet man die beiden gegebenen Kräfte durch X und Y, den von ihnen gebildeten Winkel BAC durch φ und eine Kraft, welche allein in der Richtung AD wirkend den Punkt in demselben Zeitraume von A bis D gebracht hätte, in welchem er von X allein nach B, von Y allein nach C gebracht wäre, durch R, so ist R die Resultante der Kräfte X und Y, und es ist wegen des zweiten Gesetzes der Mechanik:

$$X : AB = Y : AC = R : AD.$$

Es ist aber:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2AB . BD . \cos \varphi,$$

folglich:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + 2XY \cos \varphi.$$

Wenn der Winkel φ gleich Null ist, d. h. wenn die Kräfte in gleichem Sinne wirken, so wird $R = X + Y$. Wenn $\varphi = 180°$, d. h. wenn die Kräfte im entgegengesetzten Sinne wirken, so wird $R = X - Y$. Wenn $\varphi = 90°$ ist (Fig. 2), und folglich die beiden Kräfte X und Y rechtwinklig auf einander wirken, so wird:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

und, wenn man die Winkel BAD und CAD durch α und β bezeichnet:

$$X = R . \cos \alpha, \quad Y = R . \cos \beta.$$

Die Kräfte X und Y werden im Allgemeinen die Componenten der Kraft längs der Linien AB und AC genannt. Wenn X und Y rechtwinklig auf einander stehen, werden sie auch die Projectionen von R genannt.

§. 8.

Wenn mehrere Kräfte sollen zusammengesetzt werden, kann man erst zwei derselben mit einander zusammensetzen, sodann ihre Resultanten mit einer dritten u. s. w. Durch Construction kann dieses auf folgende Weise ausgeführt werden. Es bezeichnen die Linien (Fig. 3) AB, AC, AD, AE, AF die Richtung und Grösse mehrerer Kräfte. Aus dem Endpunkte B der einen ziehe man die Linie BG parallel und gleich AC, ferner von G die Linie GH parallel und gleich AD, HF parallel und gleich AE, IK parallel und gleich AF. Die Linie AK stellt dann die Resultante aller fünf Kräfte dar. Es

ist nämlich ABGC ein Parallelogramm, folglich AG die Resultante von AB und AC, AGHD ein Parallelogramm, folglich AH die Resultante von AG und AD u. s. w.

Wenn drei Kräfte (Fig. 4), welche nicht in derselben Ebene liegen, auf einem Punkte A wirken, so wird dieser Construction zufolge die Resultante die Diagonale AE des Parallelepipedums, dessen Seiten die Kräfte darstellen. Stehen die drei Kräfte AB, AC, AD (Fig. 5) alle rechtwinklig auf einander und man bezeichnet die längs ihrer wirkenden Kräfte durch X, Y, Z und die Winkel, welche die Diagonale AE mit ihnen bildet, durch α, β, γ, so wird

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$X = R \cos \alpha, \quad Y = R \cos \beta, \quad Z = R \cos \gamma.$$

Durch die drei letzten Gleichungen werden die Componenten einer Kraft R längs drei rechtwinkligen Axen bestimmt.

§. 9.

Soll die Richtung und Grösse der Resultante mehrerer Kräfte P, P', P'' ..., welche auf einen Punkt A wirken, durch Rechnung gefunden werden, so zerlegt man am bequemsten erst auf die eben angegebene Weise jede Kraft längs drei rechtwinkliger Axen x, y, z. Es seien a, a', a'' ..., b, b', b'' ..., c, c', c'' ... Winkel, welche die gegebenen Kräfte mit diesen drei Axen bilden, so sind die Componenten der gegebenen Kräfte längs der xAxe:

$$P \cos a, \quad P' \cos a', \quad P'' \cos a'' \ldots$$

Alle diese Kräfte werden eine besondere Resultante gleich ihrer Summe geben. Bezeichnet man diese durch X, so ist:

$$X = P \cos a + P' \cos a' + P'' \cos a'' + \ldots = \Sigma P \cos a.$$

Ebenso findet man die besondere Resultante der Componenten längs der yAxe:

$$Y = P \cos b + P' \cos b' + P'' \cos b'' + \ldots = \Sigma P \cos b,$$

und die besondere Resultante der Componenten nach der zAxe:

$$Z = P \cos c + P' \cos c' + P'' \cos c'' + \ldots = \Sigma P \cos c.$$

Statt der gegebenen Kräfte P, P', P'' ... hat man folglich jetzt nur drei auf einander rechtwinklige Kräfte X, Y, Z, deren Resultante ist:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Bezeichnet man ferner durch α, β, γ die Winkel, welche diese Resultante mit den drei Axen bildet, so ist:

$$\cos\alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{R}.$$

Substituirt man die Werthe von X, Y, Z, so erhält man:

$$\begin{aligned} R^2 &= [\Sigma P \cos a]^2 + [\Sigma P \cos b]^2 + [\Sigma P \cos c]^2 \\ &= P^2 \cos^2 a + P'^2 \cos^2 a' + P''^2 \cos^2 a'' + \ldots \\ &+ 2PP' \cos a \cos a' + 2PP'' \cos a \cos a'' + 2P'P'' \cos a' \cos a'' + \ldots \\ &+ P^2 \cos^2 b + P'^2 \cos^2 b' + P''^2 \cos^2 b'' + \ldots \\ &+ 2PP' \cos b \cos b' + 2PP'' \cos b \cos b'' + 2P'P'' \cos b' \cos b'' + \ldots \\ &+ P^2 \cos^2 c + P'^2 \cos^2 c' + P''^2 \cos^2 c'' + \ldots \\ &+ 2PP' \cos c \cos c' + 2PP'' \cos c \cos c'' + 2P'P'' \cos c' \cos c'' + \ldots \end{aligned}$$

Bezeichnet man jetzt durch POP′, POP″, P′OP″ ... die Winkel, welche die Kräfte P und P′, P und P″, P′ und P″ ... mit einander bilden, so ist, wie aus der analytischen Geometrie bekannt ist:

$$\begin{aligned} \cos POP' &= \cos a \cos a' + \cos b \cos b' + \cos c \cos c', \\ \cos POP'' &= \cos a \cos a'' + \cos b \cos b'' + \cos c \cos c'', \\ \cos P'OP'' &= \cos a' \cos a'' + \cos b' \cos b'' + \cos c' \cos c'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ferner ist auch:

$$\begin{aligned} \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c &= 1, \\ \cos^2 a' + \cos^2 b' + \cos^2 c' &= 1, \\ \cos^2 a'' + \cos^2 b'' + \cos^2 c'' &= 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Diese Werthe substituirt geben:

$$\begin{aligned} R^2 &= P^2 + P'^2 + P''^2 + \ldots \\ &+ 2PP' \cos POP' + 2PP'' \cos POP'' + 2P'P'' \cos P'OP'' + \ldots \end{aligned}$$

§. 10.

Wird eine Kraft R längs einer Linie AF zerlegt (Fig. 6), so ist diese Componente, wenn durch δ der Winkel, welche AE mit AF bildet, bezeichnet wird:

$$Q = R \cos\delta.$$

Bezeichnet man aber durch a, b, c die Winkel, welche die Linie AF mit drei auf einander senkrechten Axen AB, AC, AD, bildet, durch α, β, γ die Winkel, welche die Kraft R mit denselben Axen bildet, so ist:

$$\cos\delta = \cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma,$$

folglich:

$$Q = R(\cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma).$$

Bezeichnet man jetzt durch X, Y, Z die drei Componenten von R längs der drei Axen, so ist:

$$X = R\cos\alpha,\quad Y = R\cos\beta,\quad Z = R\cos\gamma.$$

Diese Werthe substituirt geben dann:

$$Q = X\cos a + Y\cos b + Z\cos c,$$

d. h., die Componente der Resultante R längs einer Linie AF ist der Summe der Componenten von X, Y, Z längs derselben Linie gleich.

Cap. III.

Statik. Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems mit einander verbundener Punkte, deren Verbindung durch von der Zeit unabhängige Gleichungen zwischen ihren Coordinaten ausgedrückt werden können.

§. 11.

Bei Körpern unveränderlicher Form, oder deren Form sich nach gewissen Gesetzen verändert, finden Verbindungen zwischen den verschiedenen Theilen statt, welche als geometrische Relationen zwischen beweglichen Punkten zu betrachten sind, die ungeändert während der Bewegung verbleiben. Diese Verbindungen können folglich ausgedrückt werden durch Gleichungen zwischen den Coordinaten der gegebenen Punkte, welche unabhängig von der Zeit sind.

Wenn auf einen solchen Körper mehrere Kräfte wirken, die ihn im Gleichgewicht halten oder in irgend eine Bewegung setzen, so werden in den verschiedenen Theilen dieses Körpers, wegen der

zwischen den Angriffspunkten der Kräfte stattfindenden Verbindungen, gewisse Spannungen oder Drucke stattfinden. Die Kräfte, welche an jedem Punkte angebracht, wo eine solche Spannung oder Druck stattfindet, dieselbe Spannung oder Druck hervorbringen würden, werden die Kräfte der Verbindung genannt. Denkt man sich dann die Verbindungen der verschiedenen Punkte ganz aufgehoben und statt deren die Kräfte der Verbindungen wirkend, so wird hierdurch die Bewegung oder das Gleichgewicht des Körpers in nichts geändert. Die Kräfte, welche die Bewegungen des oben beschriebenen Systems von Punkten bestimmen, werden gegebene Kräfte genannt. Weil man jetzt die Verbindungen der Punkte aufheben kann, und statt deren in jedem Punkte die Kräfte der Verbindungen anbringen, werden folglich im Zustande des Gleichgewichts die gegebenen Kräfte in jedem Punkte die Kräfte der Verbindungen aufheben müssen.

Die gegebenen Kräfte werden bewegende Kräfte genannt, wenn sie mit der Richtung der Bewegung einen spitzen Winkel bilden, widerstehende, wenn sie mit derselben einen stumpfen Winkel bilden.

§. 12.

Wir werden jetzt die Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems von Punkten betrachten, deren Verbindung durch eine einzige Gleichung zwischen den Coordinaten dieser Punkte:

$$u = f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots x_n, y_n, z_n) = o,$$

ausgedrückt ist.

Wenn ein solches System im Gleichgewicht ist, so kann dieses nicht dadurch verändert werden, dass alle Punkte ausser einem, z. B. der Punkt (x_1, y_1, z_1), befestigt werden. Dieser kann dann, zufolge der gegebenen Verbindung, sich nur auf einer Fläche bewegen, deren Gleichung $u = o$ ist, wenn in dieser Gleichung nur x_1, y_1, z_1 als Variabeln angesehen werden. Damit nun auch dieser Punkt in Ruhe verbleiben soll, ist es nöthig, dass die auf ihn wirkende Kraft in der Richtung der Normale dieser Fläche wirke; denn sonst könnte man sie in eine normale und eine der Berührungs-

ebene parallele Seitenkraft zerlegen, und dieser letzteren würde die Fläche keinen Widerstand entgegensetzen. Bezeichnet man durch α, β, γ die Winkel, welche diese Normale mit den drei rechtwinkligen Coordinataxen bildet, so ist aus der analytischen Geometrie bekannt, dass:

$$\cos\alpha = \frac{d_{x_1} u}{\sqrt{(d_{x_1} u)^2 + (d_{y_1} u)^2 + (d_{z_1} u)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{d_{y_1} u}{\sqrt{(d_{x_1} u)^2 + (d_{y_1} u)^2 + (d_{z_1} u)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{d_{z_1} u}{\sqrt{(d_{x_1} u)^2 + (d_{y_1} u)^2 + (d_{z_1} u)^2}}.$$

Bezeichnet man durch λ_1 die normale Kraft, deren Grösse auf das Gleichgewicht keinen Einfluss haben kann, und welcher die aus den Verbindungen hervorgerufene Spannung oder Zusammendrückung gleich ist, so werden die Componenten von λ_1 längs der drei Axen:

$$\lambda_1 \cos\alpha,\quad \lambda_1 \cos\beta,\quad \lambda_1 \cos\gamma,$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$\lambda_1 = a_1 \sqrt{(d_{x_1} u)^2 + (d_{y_1} u)^2 + (d_{z_1} u)^2}$$

setzt, wo a_1 ebenso wie λ_1 eine unbestimmte Grösse ist:

$$a_1 d_{x_1} u,\quad a_1 d_{y_1} u,\quad a_1 d_{z_1} u.$$

Ebenso findet man, dass die Kraft, welche auf den Punkt x_2, y_2, z_2 normal wirkt, gleich

$$\lambda_2 = a_2 \sqrt{(d_{x_2} u)^2 + (d_{y_2} u)^2 + (d_{z_2} u)^2}$$

ist, und seine Componenten:

$$a_2 d_{x_2} u,\quad a_2 d_{y_2} u,\quad a_2 d_{z_2} u;$$

dass die auf den Punkt (x_3, y_3, z_3) normal wirkende Kraft gleich

$$\lambda_3 = a_3 \sqrt{(d_{x_3} u)^2 + (d_{y_3} u)^2 + (d_{z_3} u)^2}$$

und seine Componenten:

$$a_3 d_{x_3} u,\quad a_3 d_{y_3} u,\quad a_3 d_{z_3} u$$

sind.

Denkt man sich jetzt alle Punkte, die beiden (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) ausgenommen, auf eine unveränderliche Weise befestigt, und dass diese zwei Punkte sich nur längs der xAxe bewegen können, so werden sie noch immer im Gleichgewicht sein müssen. Ihre mögliche Bewegung wird dann durch die Gleichung $u = o$ bestimmt, wo nur x_1 und x_2 als veränderliche Grössen anzusehen sind. Es ist alsdann nothwendig, dass die Componenten längs der xAxe die beiden Kräfte, welche auf diese beiden Punkte wirken, einander im Gleichgewicht halten, folglich dass sie gleich und entgegengesetzt sind. Man hat folglich die Bedingungsgleichung:

$$a_1 d_{x_1} u + a_2 d_{x_2} u = o.$$

Es ist aber wegen der Gleichung $u = o$, wo nur x_1 und x_2 als Variabeln anzusehen sind:

$$d_{x_1} u + d_{x_2} u = o.$$

Folglich wird:

$$a_1 = a_2.$$

Ebenso erhält man:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = a_n.$$

Hierdurch sind nun die auf jeden Punkt wirkenden Kräfte so viel wie möglich bestimmt, weil der gemeinschaftliche Factor a_1 unbestimmt sein muss. Die Gleichung $u = o$, und folglich auch die Gleichgewichtsbedingungen werden nämlich nicht dadurch geändert, dass man u und folglich auch alle seine Differentialen, mit einer willkürlichen Constanten multiplicirt.

Wenn Gleichgewicht in einem System von Punkten, deren Verbindung durch die Gleichung $u = o$ ausgedrückt ist, stattfinden soll, ist es folglich nöthig, dass die Componenten der gegebenen Kräfte längs den drei Coordinataxen sind:

im Punkte (x_1, y_1, z_1): $a_1 d_{x_1} u, \quad a_1 d_{y_1} u, \quad a_1 d_{z_1} u,$

im Punkte (x_2, y_2, z_2): $a_1 d_{x_2} u, \quad a_1 d_{y_2} u, \quad a_1 d_{z_2} u,$

. .

im Punkte (x_n, y_n, z_n): $a_1 d_{x_n} u, \quad a_1 d_{y_n} u, \quad a_1 d_{z_n} u.$

Aus der im vorigen Paragraphen gegebenen Erklärung der gegebenen Kräfte und der Kräfte des Gleichgewichts ging hervor, dass diese in jedem Punkte einander aufheben müssen. Die Verbindungskräfte werden folglich, längs der drei Coordinataxen zerlegt, die obige Form der Componenten der gegebenen Kräfte mit entgegengesetzten Zeichen haben, und das Gleichgewicht wird folglich nicht aufgehoben werden, wenn man diese Verbindungskräfte auf den verschiedenen Punkten anbringt und dann die zwischen den Punkten stattfindende Verbindung, $u = o$, aufhebt.

§. 13.

Wird die Verbindung der Punkte durch zwei Gleichungen:

$$u_1 = o, \quad u_2 = o$$

ausgedrückt, so wird zufolge der im vorigen Paragraphen gegebenen Regel das Gleichgewicht nicht aufgehoben, wenn man die erste dieser Verbindungsgleichungen aufhebt und statt deren Kräfte anbringt, deren Componenten nach den drei Coordinataxen sind:

im Punkte (x_1, y_1, z_1): $-a_1 d_{x_1} u_1$, $-a_1 d_{y_1} u_1$, $-a_1 d_{z_1} u_1$,

im Punkte (x_2, y_2, z_2): $-a_1 d_{x_2} u_1$, $-a_1 d_{y_2} u_1$, $-a_1 d_{z_2} u_1$,

. .

im Punkte (x_n, y_n, z_n): $-a_1 d_{x_n} u_1$, $-a_1 d_{y_n} u_1$, $-a_1 d_{z_n} u_1$.

Diese Kräfte werden dann von den gegebenen Kräften einen gleichen, aber entgegengesetzten Theil aufheben. Man hat dann nur die Verbindungsgleichung $u_2 = o$ übrig, und der übrige Theil der gegebenen Kräfte muss dann wegen der durch diese Gleichung ausgedrückten Verbindung im Gleichgewichte sein. Die Componenten dieses Theils nach den drei Coordinataxen werden dann:

im Punkte (x_1, y_1, z_1): $a_2 d_{x_1} u_2$, $a_2 d_{y_1} u_2$, $a_2 d_{z_1} u_2$,

im Punkte (x_2, y_2, z_2): $a_2 d_{x_2} u_2$, $a_2 d_{y_2} u_2$, $a_2 d_{z_2} u_2$,

. .

im Punkte (x_n, y_n, z_n): $a_2 d_{x_n} u_2$, $a_2 d_{y_n} u_2$, $a_2 d_{z_n} u_2$.

Die Componenten der gegebenen Kräfte werden folglich:

im Punkte (x_1, y_1, z_1):

$$a_1 d_{x_1} u_1 + a_2 d_{x_1} u_2, \quad a_1 d_{y_1} u_1 + a_2 d_{y_1} u_2, \quad a_1 d_{z_1} u_1 + a_2 d_{z_1} u_2,$$

im Punkte (x_2, y_2, z_2):

$$a_1 d_{x_2} u_1 + a_2 d_{x_2} u_2, \quad a_1 d_{y_2} u_1 + a_2 d_{y_2} u_2, \quad a_1 d_{z_2} u_1 + a_2 d_{z_2} u_2,$$

. .

im Punkte (x_n, y_n, z_n):

$$a_1 d_{x_n} u_1 + a_2 d_{x_n} u_2, \quad a_1 d_{y_n} u_1 + a_2 d_{y_n} u_2, \quad a_1 d_{z_n} u_1 + a_2 d_{z_n} u_2.$$

Die normal auf die Flächen $u_1 = o$ und $u_2 = o$ wirkenden Kräfte, werden im Punkte (x_p, y_p, z_p) respective:

$$\lambda'_p = a_1 \sqrt{(d_{x_p} u_1)^2 + (d_{y_p} u_1)^2 + (d_{z_p} u_1)^2},$$

$$\lambda''_p = a_2 \sqrt{(d_{x_p} u_2)^2 + (d_{y_p} u_2)^2 + (d_{z_p} u_2)^2}.$$

§. 14.

Sind im Allgemeinen die Verbindungen zwischen n Punkten durch die p Gleichungen:

$$u_1 = o, \quad u_2 = o, \quad u_3 \ldots u_p = o,$$

zwischen ihren Coordinaten ausgedrückt, so werden die Componenten der gegebenen Kräfte, wenn Gleichgewicht stattfinden soll,

im Punkte (x_1, y_1, z_1):

$$X_1 = a_1 d_{x_1} u_1 + a_2 d_{x_1} u_2 + a_3 d_{x_1} u_3 + \ldots . \; a_p d_{x_1} u_p,$$

$$Y_1 = a_1 d_{y_1} u_1 + a_2 d_{y_1} u_2 + a_3 d_{y_1} u_3 + \ldots . \; a_p d_{y_1} u_p,$$

$$Z_1 = a_1 d_{z_1} u_1 + a_2 d_{z_1} u_2 + a_3 d_{z_1} u_3 + \ldots . \; a_p d_{z_1} u_p,$$

im Punkte (x_2, y_2, z_2):

$$X_2 = a_1 d_{x_2} u_1 + a_2 d_{x_2} u_2 + a_3 d_{x_2} u_3 + \ldots . \; a_p d_{x_2} u_p,$$

$$Y_2 = a_1 d_{y_2} u_1 + a_2 d_{y_2} u_2 + a_3 d_{y_2} u_3 + \ldots . \; a_p d_{y_2} u_p,$$

$$Z_2 = a_1 d_{z_2} u_1 + a_2 d_{z_2} u_2 + a_3 d_{z_2} u_3 + \ldots . \; a_p d_{z_2} u_p,$$

. .

und im Punkte (x_n, y_n, z_n):

$$X_n = a_1 d_{x_n} u_1 + a_2 d_{x_n} u_2 + a_3 d_{x_n} u_3 + \ldots . \; a_p d_{x_n} u_p,$$

$$Y_n = a_1 d_{y_n} u_1 + a_2 d_{y_n} u_2 + a_3 d_{y_n} u_3 + \ldots . \; a_p d_{y_n} u_p,$$

$$Z_n = a_1 d_{z_n} u_1 + a_2 d_{z_n} u_2 + a_3 d_{z_n} u_3 + \ldots . \; a_p d_{z_n} u_p.$$

Eliminirt man zwischen diesen 3n Gleichungen die p willkürlichen Constanten $a_1, a_2, a_3, \ldots a_p$, so erhält man $3n - p$ Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts zwischen den Componenten der Kräfte.

Die im Punkte (x_r, y_r, z_r) normal auf die Fläche $u_1 = o$ wirkende Kraft ist

$$\lambda_r' = a_1 \sqrt{(d_{x_r} u_1)^2 + (d_{y_r} u_1)^2 + (d_{z_r} u_1)^2},$$

die normal auf die Fläche $u_2 = o$ wirkende Kraft

$$\lambda_r'' = a_2 \sqrt{(d_{x_r} u_2)^2 + (d_{y_r} u_2)^2 + (d_{z_r} u_2)^2},$$

. .

die normal auf die Fläche $u_p = o$ wirkende Kraft

$$\lambda_r^{(p)} = a_p \sqrt{(d_{x_r} u_p)^2 + (d_{y_r} u_p)^2 + (d_{z_r} u_p)^2},$$

und die Resultante dieser Kräfte, welcher die Resultante von X_r, Y_r, Z_r gleich ist, wird dann die auf den Punkt (x_r, y_r, z_r) wirkende gegebene Kraft sein.

§. 15.

Wird den mit einander durch die Gleichungen

$$u_1 = o, \; u_2 = o, \; u_3 = o, \ldots u_p = o$$

verbundenen n Punkten irgend eine mit dieser Verbindung übereinstimmende Bewegung gegeben, so müssen die längs der drei Coordinataxen zerlegten Geschwindigkeiten $d_t x_1$, $d_t y_1$, $d_t z_1$, $d_t x_2$, $d_t y_2$, $d_t z_2$, ... $d_t x_n$, $d_t y_n$, $d_t z_n$ nothwendig folgenden Gleichungen entsprechen:

$$d_{x_1} u_1 \,.\, d_t x_1 + d_{y_1} u_1 \,.\, d_t y_1 + d_{z_1} u_1 \,.\, d_t z_1 + d_{x_2} u_1 \,.\, d_t x_2 + \ldots \\ + d_{z_n} u_1 \,.\, d_t z_n = o,$$

$$d_{x_1} u_2 \,.\, d_t x_1 + d_{y_1} u_2 \,.\, d_t y_1 + d_{z_1} u_2 \,.\, d_t z_1 + d_{x_2} u_2 \,.\, d_t x_2 + \ldots \\ + d_{z_n} u_2 \,.\, d_t z_n = o,$$

. .

$$d_{x_1} u_p \,.\, d_t x_1 + d_{y_1} u_p \,.\, d_t y_1 + d_{z_1} u_p \,.\, d_t z_1 + d_{x_2} u_p \,.\, d_t x_2 + \ldots \\ + d_{z_n} u_p \,.\, d_t z_n = o,$$

oder, was gleichbedeutend ist, so muss die Gleichung

$$\begin{aligned}
&(a_1 d_{x_1} u_1 + a_2 d_{x_1} u_2 + \ldots + a_p d_{x_1} u_p) d_t x_1 \\
&+ (a_1 d_{y_1} u_1 + a_2 d_{y_1} u_2 + \ldots + a_p d_{y_1} u_p) d_t y_1 \\
&+ (a_1 d_{z_1} u_1 + a_2 d_{z_1} u_2 + \ldots + a_p d_{z_1} u_p) d_t z_1 \\
&+ (a_1 d_{x_2} u_1 + a_2 d_{x_2} u_2 + \ldots + a_p d_{x_2} u_p) d_t x_2 \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (a_1 d_{z_n} u_1 + a_2 d_{z_n} u_2 + \ldots + a_p d_{z_n} u_p) d_t z_n = o,
\end{aligned}$$

für alle Werthe von $a_1, a_2, \ldots a_n$ stattfinden.

Soll jetzt Gleichgewicht vorhanden sein, so müssen die Componenten der gegebenen Kräfte den im vorigen Paragraphen entwickelten Bedingungsgleichungen entsprechen. Diese Werthe hier substituirt geben dann die Gleichung

$$X_1 d_t x_1 + Y_1 d_t y_1 + Z_1 d_t z_1 + X_2 d_t x_2 + \ldots + Z_n d_t z_n = o,$$

welche für alle möglichen Bewegungen stattfinden muss.

§. 16.

Wenn die Grösse und Richtung jeder der auf die gegebenen Punkte wirkenden Kräfte nur eine Function der Coordinaten dieser Punkte und von der Lage der anderen Punkte unabhängig ist, d. h. wenn X_p, Y_p, Z_p nur Functionen von x_p, y_p, z_p sind, so kann der Ausdruck:

$$X_1 d_t x_1 + Y_1 d_t y_1 + Z_1 d_t z_1 + X_2 d_t x_2 + \ldots + Z_n d_t z_n$$

unter eine einfachere Form gebracht werden. Bezeichnen wir nämlich durch R_p die Resultante der Kräfte X_p, Y_p, Z_p, so ist R_p die auf den Punkt (x_p, y_p, z_p) wirkende gegebene Kraft, und die Grösse und Richtung von R_p ist nur von (x_p, y_p, z_p) abhängig. Ziehen wir jetzt zu jedem Punkte die diesem zugehörige Linie R_p, construiren eine auf allen diesen Linien orthogonale Fläche, und bezeichnen wir durch M einen Punkt (x, y, z), durch M′ den Punkt $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, durch m und m′ die zugehörigen Punkte der orthogonalen Fläche, durch r die Linie Mm, durch $r + \Delta r$ die Linie M′m′; legen wir ferner durch M′ eine Ebene parallel mit der Linie mm′, und bezeichnen wir durch N den Durchschnitt dieser

Ebene mit der durch M gehenden Linie R, so wird der Winkel M'NM ein rechter Winkel sein, und folglich:

$$\cos M'MN = \frac{MN}{MM'} = \frac{\Delta r}{\Delta s}.$$

Es sind aber die Cosinus, welche die Linie MN mit den drei Coordinataxen bildet,

$$\frac{X}{R},\ \frac{Y}{R},\ \frac{Z}{R},$$

und die Cosinus der Winkel, welche MM' mit den drei Coordinataxen bildet,

$$\frac{\Delta x}{\Delta s},\ \frac{\Delta y}{\Delta s},\ \frac{\Delta z}{\Delta s},$$

also wird

$$\cos M'MN = \pm\left(\frac{X}{R}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{Y}{R}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{Z}{R}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s}\right),$$

und folglich

$$\frac{\Delta r}{\Delta s} = \pm\left(\frac{X}{R}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{Y}{R}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{Z}{R}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s}\right),$$

oder, wenn man zu den Grenzwerthen übergeht,

$$Xdx + Ydy + Zdz = \pm Rdr.$$

Construirt man auf diese Weise für jede Kraft R_p die zugehörige orthogonale Fläche, so wird

$$X_1 d_t x_1 + Y_1 d_t y_1 + Z_1 d_t z_1 + X_2 d_t x_2 + \ldots + Z_n d_t z_n$$
$$= \pm R_1 d_t r_1 \pm R_2 d_t r_2 \pm \ldots \pm R_n d_t r_n,$$

und die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts wird demnach

$$\pm R_1 d_t r_1 \pm R_2 d_t r_2 \pm \ldots \pm R_n d_t r_n = 0.$$

Weil hier R_p und also auch r_p nur Function von x_p, y_p, z_p ist, so wird diese Differentialgleichung nur integrabel sein, wenn die einer jeden Kraft R_p zugehörige orthogonale Fläche so gewählt werden kann, dass R_p eine Function von r_p ist.

Dies ist z. B. der Fall, wenn auf das gegebene System Kräfte wirken, welche durch feste Punkte gehen und Functionen des Abstandes von diesen Punkten sind. Alsdann können nämlich diese festen Punkte selbst als jene orthogonalen Flächen gewählt werden. Es kann auch leicht besonders gezeigt werden, dass alsdann die Dif-

ferentialgleichung $X_1 d_t x_1 + Y_1 d_t y_1 + Z_1 d_t z_1 + X_2 d_t x_2 + \dots + Z_n d_t z_n$ integrabel ist. Es sei nämlich R eine solche Kraft, welche vom Punkte (a, b, c) ausgehend auf den Punkt (x, y, z) wirkt, r der Abstand der beiden Punkte und R eine Function von r, so ist

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

daher

$$r dr = (x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz.$$

Es ist aber

$$X = R \cdot \frac{x-a}{r}, \quad Y = R \cdot \frac{y-b}{r}, \quad Z = R \cdot \frac{z-c}{r},$$

daher

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{R}{r}[(x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz] = Rdr.$$

Folglich wird auch

$$X_1 d_t x_1 + Y_1 d_t y_1 + Z_1 d_t z_1 + X_2 d_t x_2 + \dots + Z_n d_t z_n$$
$$= R_1 d_t r_1 + R_2 d_t r_2 + \dots + R_n d_t r_n,$$

wie vorher, und dieser Ausdruck ist dann ein vollständiges Differential, weil R_p eine Function von r_p ist.

§. 17.

Der Ausdruck $X_1 d_t x_1 + Y_1 d_t y_1 + Z_1 d_t z_1 + X_2 d_t x_2 + \dots + Z_n d_t z_n$ ist auch noch integrabel, wenn die Kräfte in gegenseitigen Anziehungen oder Abstossungen zwischen den beweglichen Punkten des Systems bestehen und ihre Intensitäten Functionen der Entfernungen sind. Es seien nämlich x, y, z die Coordinaten eines Punktes, x′, y′, z′ die Coordinaten eines anderen Punktes, r ihre Entfernung und $\varphi(r)$ die gegenseitige Wirkung zwischen ihnen, so sind die Componenten der Kraft $\varphi(r)$ im erstern Punkte

$$X = \varphi(r) \cdot \frac{x-x'}{r}, \quad Y = \varphi(r) \cdot \frac{y-y'}{r}, \quad Z = \varphi(r) \cdot \frac{z-z'}{r},$$

und die Componenten der im letztern Punkte wirkenden Kraft, welche der vorigen gleich und entgegengerichtet ist,

$$X' = \varphi(r) \cdot \frac{x'-x}{r}, \quad Y' = \varphi(r) \cdot \frac{y'-y}{r}, \quad Z' = \varphi(r) \cdot \frac{z'-z}{r}.$$

Es wird also

$$Xdx + Ydy + Zdz + X'dx' + Y'dy' + Z'dz'$$
$$= \frac{\varphi(r)}{r} \cdot [(x-x')(dx-dx') + (y-y')(dy-dy') + (z-z')(dz-dz')]$$
$$= \frac{\varphi(r)}{r} \cdot rdr = \varphi(r)dr,$$

und daher

$$X_1 d_t x_1 + Y_1 d_t y_1 + Z_1 d_t z_1 + X_2 d_t x_2 + \ldots + Z_n d_t z_n = \Sigma\varphi(r)dr,$$

folglich integrabel.

§. 18.

Im Allgemeinen, wenn der Ausdruck $X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1 + X_2 dx_2 + \ldots + Z_n dz_n$ ein vollständiges Differential ist, und man durch U dessen Integral bezeichnet, so wird U eine Function von x_1, y_1, z_1, x_2, ... z_n sein, deren partielle Differentiale sind:

$$d_{x_1} U = X_1, \quad d_{y_1} U = Y_1, \quad d_{z_1} U = Z_1,$$
$$d_{x_2} U = X_2, \quad d_{y_2} U = Y_2, \quad d_{z_2} U = Z_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d_{x_n} U = X_n, \quad d_{y_n} U = Y_n, \quad d_{z_n} U = Z_n,$$

und die im §. 15 entwickelte Differentialgleichung des Gleichgewichts wird die Form annehmen:

$$d_t U = o.$$

Die Function U wird alsdann die Kräftefunction genannt, und muss demnach, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll, ein Maximum oder Minimum sein.

§. 19.

Wenn man durch P_1 die Resultante von X_1, Y_1, Z_1, durch P_2 die Resultante von X_2, Y_2, Z_2 u. s. w. bezeichnet, wo folglich P_1, P_2, ... die gegebenen Kräfte sind, durch s_1, s_2, ... die von den Punkten (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ... beschriebenen Bahnen, wenn das System auf irgend eine mit den Verbindungsgleichungen übereinstimmende Weise bewegt wird, und durch α_1, α_2, ... die Winkel, welche die Tangenten dieser Bahnen mit den entsprechenden Kräften P_1, P_2, ... bilden, so ist

$$\cos\alpha_1 = \frac{X_1}{P_1} d_{s_1} x_1 + \frac{Y_1}{P_1} \cdot d_{s_1} y_1 + \frac{Z_1}{P_1} \cdot d_{s_1} z_1,$$

folglich

$$X_1 d_t x_1 + Y_1 d_t y_1 + Z_1 d_t z_1$$
$$= P_1 d_t s_1 \left(\frac{X_1}{P_1} d_{s_1} x_1 + \frac{Y_1}{P_1} d_{s_1} y_1 + \frac{Z_1}{P_1} d_{s_1} z_1\right) = P_1 d_t s_1 \,.\, \cos\alpha_1 .$$

Die im §. 15 gegebene Bedingungsgleichung des Gleichgewichts wird sonach die Form

$$P_1 d_t s_1 \,.\, \cos\alpha_1 + P_2 d_t s_2 \,.\, \cos\alpha_2 + \ldots + P_n d_t s_n \cos\alpha_n = 0,$$

annehmen, und diese Gleichung muss dann für jede Bewegung, welche die Punkte machen können, stattfinden.

Die Geschwindigkeiten $d_t s_1$, $d_t s_2$, ... $d_t s_n$, welche die durch die Verbindungsgleichungen

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \ldots u_p = 0$$

mit einander verbundenen Punkte zugleich annehmen können, werden die virtuellen Geschwindigkeiten dieser Punkte genannt; die Componente $P \cos\alpha$ einer Kraft P nach der Tangente der vom Punkte beschriebenen Bahn wird die Tension der Kraft genannt, und das Produkt $P \cos\alpha \,.\, d_t s$ der Tension einer Kraft mit der virtuellen Geschwindigkeit seines Angriffspunktes wird die virtuelle Arbeit genannt. Der durch die Gleichung

$$P_1 \cos\alpha_1 d_t s_1 + P_2 \cos\alpha_2 d_t s_2 + \ldots + P_n \cos\alpha_n d_t s_n = 0$$

ausgedrückte Satz kann hiernach folgendermaassen ausgesprochen werden: *Wenn Kräfte auf ein System mehrerer auf irgend eine Weise mit einander verbundener Punkte wirken und Gleichgewicht hervorbringen, so muss die Summe ihrer virtuellen Arbeiten für jede Bewegung, welche das System annehmen kann, gleich Null sein.*

Bezeichnet man durch T die Tension einer bewegenden, und durch T′ die Tension einer widerstehenden Kraft, durch s und s′ die von ihren Angriffspunkten beschriebenen Linien, wenn das System in eine von den Verbindungen erlaubte Bewegung gesetzt wird, so kann die obige Gleichung geschrieben werden

$$\Sigma T d_t s - \Sigma T' d_t s' = 0,$$

oder:

$$\Sigma T d_t s = \Sigma T' d_t s',$$

d. h. *die virtuelle Arbeit der bewegenden Kräfte ist derjenigen der widerstehenden Kräfte gleich.*

Dieser Satz wird der Satz der virtuellen Geschwindigkeiten genannt.

§. 20.

Man kann aus der Gleichung

$$P_1 d_t s_1 \cos\alpha_1 + P_2 d_t s_2 \cos\alpha_2 + \ldots + P_n d_t s_n \cos\alpha_n = o$$

oder, was dasselbe ist, aus der Gleichung

$$X_1 d_t x_1 + Y_1 d_t y_1 + Z_1 d_t z_1 + X_2 d_t x_2 + \ldots + Z_n d_t z_n = o,$$

wieder die im §. 14 dargestellten Gleichungen, und daraus durch Elimination der willkürlichen Constanten die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts finden. Die Gleichung

$$(1) \quad X_1 d_t x_1 + Y_1 d_t y_1 + Z_1 d_t z_1 + X_2 d_t x_2 + \ldots + Z_n d_t z_n = o$$

soll nämlich für alle Werthe der virtuellen Geschwindigkeiten stattfinden, welche den Verbindungsgleichungen

$$u_1 = o, \quad u_2 = o, \quad u_3 = o, \ldots u_n = o$$

und folglich deren Differentiale

$$d_{x_1} u_1 \,.\, d_t x_1 + d_{y_1} u_1 \,.\, d_t y_1 + d_{z_1} u_1 \,.\, d_t z_1 + d_{x_2} u_1 \,.\, d_t x_2 + \ldots + d_{z_n} u_1 \,.\, d_t z_n = o,$$

$$(2) \quad d_{x_1} u_2 \,.\, d_t x_1 + d_{y_1} u_2 \,.\, d_t y_2 + d_{z_1} u_2 \,.\, d_t z_1 + d_{x_2} u_2 \,.\, d_t x_2 + \ldots + d_{z_n} u_2 \,.\, d_t z_n = o,$$

. .

$$d_{x_1} u_p \,.\, d_t x_1 + d_{y_1} u_p \,.\, d_t y_1 + d_{z_1} u_p \,.\, d_t z_1 + d_{x_2} u_p \,.\, d_t x_2 + \ldots + d_{z_n} u'_p \,.\, d_t z_n = o,$$

entsprechen. Mittelst dieser letzten p Gleichungen können dann p der virtuellen Geschwindigkeiten aus der Gleichung (1) eliminirt werden, was dadurch geschehen kann, dass man die p Gleichungen (2) der Reihe nach mit den unbestimmten Coëfficienten: $-a_1$, $-a_2$, ... $-a_p$ multiplicirt, diese Gleichungen zur Gleichung (1) addirt und in der Summe die unbestimmten Grössen a_1, a_2, ... a_p so bestimmt, dass die Coëfficienten der p virtuellen Geschwindigkeiten, welche man eliminiren will, gleich Null werden. Die dann übrig-

bleibende Gleichung muss für alle beliebige Werthe der übrigen $3n - p$ virtuellen Geschwindigkeiten stattfinden, und die Coëfficienten dieser übrigen $3n - p$ virtuellen Geschwindigkeiten müssen dann ebenfalls gleich Null sein. Multiplicirt man die Gleichungen (2) der Reihe nach mit den Coëfficienten: $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$, ... $-a_p$, und addirt dann diese Gleichungen zur Gleichung (1), so erhält man:

$$
\begin{aligned}
&(X_1 - a_1 d_{x_1} u_1 - a_2 d_{x_1} u_2 - \ldots - a_p d_{x_1} u_p) d_t x_1 \\
&+ (Y_1 - a_1 d_{y_1} u_1 - a_2 d_{y_1} u_2 - \ldots - a_p d_{y_1} u_p) d_t y_1 \\
&+ (Z_1 - a_1 d_{z_1} u_1 - a_2 d_{z_1} u_2 - \ldots - a_p d_{z_1} u_p) d_t z_1 \\
&+ (X_2 - a_1 d_{x_2} u_1 - a_2 d_{x_2} u_2 - \ldots - a_p d_{x_2} u_p) d_t x_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (Z_n - a_1 d_{z_n} u_1 - a_2 d_{z_n} u_2 - \ldots - a_p d_{z_n} u_p) d_t z_n = 0.
\end{aligned}
$$

In dieser Gleichung sollen dann erst p Coëfficienten der virtuellen Geschwindigkeiten gleich Null gesetzt werden, wodurch a_1, a_2, ... a_p bestimmt werden, dann die übrigen Coëfficienten auch gleich Null sein, was die $3n - p$ Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts geben würde. Man braucht folglich nur in jenen Gleichungen alle Coëfficienten der virtuellen Geschwindigkeiten gleich Null zu setzen, und unter diesen Gleichungen dann a_1, a_2, ... a_p zu eliminiren, wodurch man gerade die im §. 14 dargestellten Gleichungen erhält.

§. 21.

Wir haben bisher nur bewiesen, dass wenn Gleichgewicht stattfinden soll, die Gleichungen des §. 14 oder diejenigen der §. 15 oder §. 19 nothwendig sind; wir werden jetzt auch beweisen, dass sie hinlänglich sind das Gleichgewicht zu bestimmen. Nehmen wir also an, die Gleichung des §. 19:

$$\Sigma T d_t s - \Sigma T' d_t s' = 0$$

fände statt, das System wäre aber nicht im Gleichgewicht, sondern einige der gegebenen Punkte bewegten sich, so müsste diese Bewegung aufgehoben und Gleichgewicht hervorgebracht werden können, wenn in diesen Punkten, deren virtuelle Geschwindigkeiten wir durch

$d_t r_1$, $d_t r_2$ bezeichnen wollen, neue Kräfte R_1, R_2, ... angebracht werden, die von passender Grösse gerade in entgegengesetzter Richtung der Bewegung wirken. In Folge des im §. 19 bewiesenen Satzes der virtuellen Geschwindigkeiten wäre dann

$$\Sigma T d_t s - \Sigma T' d_t s' - R_1 d_t r_1 - R_2 d_t r_2 - \ldots\ldots = o,$$

und folglich auch

$$-R_1 d_t r_1 - R_2 d_t r_2 - \ldots\ldots = o,$$

oder, da jedes Glied in dieser Reihe nothwendig negativ sein muss, entweder

$$R_1 = o, \text{ oder } d_t r_1 = o,$$

$$R_2 = o, \text{ oder } d_t r_2 = o, \text{ u. s. w.}$$

und in beiden Fällen würde keine Bewegung vorhanden sein. Wenn die Gleichung

$$\Sigma T d_t s - \Sigma T' d_t s' = o$$

stattfindet, müssen folglich nothwendig die gegebenen Punkte im Gleichgewicht sein. Da man, wie im §. 15 und §. 19 erwiesen, aus den Gleichungen des §. 14 die Gleichung $\Sigma T d_t s - \Sigma T' d_t s' = o$ ableiten kann, so werden auch jene Gleichungen des §. 14 nothwendig das Gleichgewicht bedingen.

Die Gleichgewichtsbedingungen irgend eines Systems von Punkten, deren Verbindung durch von der Zeit unabhängige Gleichungen zwischen ihren Coordinaten ausgedrückt werden können, ist folglich vollkommen durch den Satz der virtuellen Geschwindigkeiten ausgedrückt.

Cap. IV.

Anwendungen.

a) Gleichgewicht eines Punktes.

§. 22.

Wir werden jetzt die eben entwickelten allgemeinen Formeln des Gleichgewichts eines Systems von Punkten auf mehrere besondere Fälle anwenden und zuerst die Gesetze des Gleichgewichts eines einzigen Punktes betrachten.

Ist der Punkt ganz frei, so finden keine Verbindungsgleichungen statt, und man hat folglich:

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = o.$$

Ist der Punkt genöthigt, sich auf einer Fläche, deren Gleichung $u = o$ ist, zu bewegen, so wird diese Gleichung die Verbindungsgleichung sein, und es wird alsdann:

$$X = a d_x u, \quad Y = a d_y u, \quad Z = a d_z u,$$

folglich:

$$\frac{X}{d_x u} = \frac{Y}{d_y u} = \frac{Z}{d_z u}$$

die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts. Weil jetzt die Normale mit den Coordinataxen Winkel bildet, deren Cosinus

$$\frac{d_x u}{\sqrt{(d_x u)^2 + (d_y u)^2 + (d_z u)^2}}, \quad \frac{d_y u}{\sqrt{(d_x u)^2 + (d_y u)^2 + (d_z u)^2}},$$

$$\frac{d_z u}{\sqrt{(d_x u)^2 + (d_y u)^2 + (d_z u)^2}}$$

sind, so besagen jene Gleichungen, dass die Richtung der Resultante der auf den Punkt wirkenden Kräfte normal auf der Oberfläche ist, was auch schon vorher (§. 12) bewiesen wurde.

Wenn der Punkt genöthigt ist, sich auf einer krummen Linie zu bewegen, welche durch die zwei Gleichungen $u_1 = o$, $u_2 = o$ bestimmt ist, so werden diese zwei Gleichungen die Verbindungsgleichung des Punktes sein. Es ist hier folglich $p = 3n - 1$, und die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts wird nur die eine

$$X d_t x + Y d_t y + Z d_t z = o,$$

woraus wieder, wenn mit $d_s t$ multiplicirt wird,

$$X d_s x + Y d_s y + Z d_s z = o.$$

Diese Gleichung giebt zu erkennen, dass die Richtung der Kraft im Normalplan der krummen Linie fallen muss.

b) Gleichgewicht eines festen Körpers.

§. 23.

Wenn alle Punkte des gegebenen Systems auf eine unveränderliche Weise mit einander verbunden sind, d. h. wenn das Sy-

stem ein fester Körper ist, so werden die Verbindungsgleichungen diejenigen sein, welche ausdrücken, dass alle übrigen Punkte immer denselben Abstand von drei unter ihnen, und diese wieder denselben Abstand unter einander behalten. Es seien diese drei Punkte (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), so bestehen folgende $3n - 6$ Verbindungsgleichungen:

$$u_1 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c_1^2 = o,$$
$$u_2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 - c_2^2 = o,$$
$$u_3 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 - c_3^2 = o,$$
$$u_4 = (x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2 + (z_1 - z_4)^2 - c_4^2 = o,$$
$$u_5 = (x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_5)^2 + (z_2 - z_5)^2 - c_5^2 = o,$$

. .

$$u_{3n-8} = (x_1 - x_n)^2 + (y_1 - y_n)^2 + (z_1 - z_n)^2 - c_{3n-8}^2 = o,$$
$$u_{3n-7} = (x_2 - x_n)^2 + (y_2 - y_n)^2 + (z_2 - z_n)^2 - c_{3n-7}^2 = o,$$
$$u_{3n-6} = (x_3 - x_n)^2 + (y_3 - y_n)^2 + (z_3 - z_n)^2 - c_{3n-6}^2 = o.$$

Man hat alsdann

$$X_1 = 2a_1(x_1 - x_2) + 2a_2(x_1 - x_3) + 2a_4(x_1 - x_4) + 2a_7(x_1 - x_5) + \ldots + 2a_{3n-8}(x_1 - x_n),$$
$$Y_1 = 2a_1(y_1 - y_2) + 2a_2(y_1 - y_3) + 2a_4(y_1 - y_4) + 2a_7(y_1 - y_5) + \ldots + 2a_{3n-8}(y_1 - y_n),$$
$$Z_1 = 2a_1(z_1 - z_2) + 2a_2(z_1 - z_3) + 2a_4(z_1 - z_4) + 2a_7(z_1 - z_5) + \ldots + 2a_{3n-8}(z_1 - z_n),$$
$$X_2 = -2a_1(x_1 - x_2) + 2a_3(x_2 - x_3) + 2a_5(x_2 - x_4) + 2a_8(x_2 - x_5) + \ldots + 2a_{3n-7}(x_2 - x_n),$$

. .

$$X_3 = -2a_2(x_1 - x_3) - 2a_3(x_2 - x_3) + 2a_6(x_3 - x_4) + 2a_9(x_3 - x_5) + \ldots + 2a_{3n-6}(x_3 - x_n),$$

. .

$$X_4 = -2a_4(x_1 - x_4) - 2a_5(x_2 - x_4) - 2a_6(x_3 - x_4),$$

. .

$$X_n = -2a_{3n-8}(x_1 - x_n) - 2a_{3n-7}(x_2 - x_n) - 2a_{3n-6}(x_3 - x_n),$$
$$Y_n = -2a_{3n-8}(y_1 - y_n) - 2a_{3n-7}(y_1 - y_n) - 2a_{3n-6}(y_3 - y_n),$$
$$Z_n = -2a_{3n-8}(z_1 - z_n) - 2a_{3n-7}(z_1 - z_n) - 2a_{3n-6}(z_3 - z_n).$$

Eliminirt man zwischen diesen 3n Gleichungen die 3n — 6 willkürlichen constanten Coëfficienten $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{3n-6}$, so erhält man die folgenden 6 Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts eines freien festen Körpers:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n = o,$$
$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_n = o,$$
$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_n = o,$$
$$(Y_1 z_1 - Z_1 y_1) + (Y_2 z_2 - Z_2 y_2) + \ldots + (Y_n z_n - Z_n y_n) = o,$$
$$(Z_1 x_1 - X_1 z_1) + (Z_2 x_2 - X_2 z_2) + \ldots + (Z_n x_n - X_n z_n) = o,$$
$$(X_1 y_1 - Y_1 x_1) + (X_2 y_2 - Y_2 x_2) + \ldots + (X_n y_n - Y_n x_n) = o.$$

§. 24.

Hat das System einen festen Punkt, und wählt man diesen Punkt zum Anfangspunkt des Coordinatensystems, so hat man die 3n — 3 Verbindungsgleichungen:

$$u_1 = x_1 = o,$$
$$u_2 = y_1 = o,$$
$$u_3 = z_1 = o,$$
$$u_4 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - c_4^2 = o,$$
$$u_5 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - c_5^2 = o,$$
$$u_6 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 - c_6^2 = o,$$
$$u_7 = x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 - c_7^2 = o,$$
$$u_8 = (x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2 + (z_2 - z_4)^2 - c_8^2 = o,$$
$$u_9 = (x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 + (z_3 - z_4)^2 - c_9^2 = o,$$
. .
$$u_{3n-3} = (x_3 - x_n)^2 + (y_3 - y_n)^2 + (z_3 - z_n)^2 - c_{3n-3}^2 = o.$$

Man erhält nun

$$X_1 = a_1,$$
$$Y_1 = a_2,$$
$$Z_1 = a_3,$$
$$X_2 = 2a_4 x_2 + 2a_6(x_2 - x_3) + 2a_8(x_2 - x_4) + \ldots + 2a_{3n-4}(x_2 - x_n),$$
$$Y_2 = 2a_4 y_2 + 2a_6(y_2 - y_3) + 2a_8(y_2 - y_4) + \ldots + 2a_{3n-4}(y_2 - y_n),$$
$$Z_2 = 2a_4 z_2 + 2a_6(z_2 - z_3) + 2a_8(z_2 - z_4) + \ldots + 2a_{3n-4}(z_2 - z_n),$$
$$X_3 = 2a_5 x_3 - 2a_6(x_2 - x_3) + 2a_9(x_3 - x_4) + \ldots + 2a_{3n-3}(x_2 - x_n),$$
. .

$$X_4 = 2a_7 x_4 - 2a_8(x_2 - x_4) - 2a_9(x_3 - x_4),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z_n = 2a_{3n-5} z_n - 2a_{3n-4}(z_2 - z_n) - 2a_{3n-3}(z_3 - z_n).$$

Eliminirt man zwischen diesen 3n Gleichungen die 3n — 3 willkürlichen Coëfficienten $a_1, a_2, \ldots a_{3n-3}$, so erhält man die folgenden 3 Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts:

$$(Y_1 z_1 - Z_1 y_1) + (Y_2 z_2 - Z_2 y_2) + \ldots + (Y_n z_n - Z_n y_n) = 0,$$
$$(Z_1 x_1 - X_1 z_1) + (Z_2 x_2 - X_2 z_2) + \ldots + (Z_n x_n - X_n z_n) = 0,$$
$$(X_1 y_1 - Y_1 x_1) + (X_2 y_2 - Y_2 x_2) + \ldots + (X_n y_n - Y_n x_n) = 0.$$

Der Druck auf den festen Punkt (x_1, y_1, z_1) ist nach §. 14 im Punkte (x_2, y_2, z_2) senkrecht auf die Fläche $u_4 = 0$, d. h. längs der Linie c_4, nach den drei Axen zerlegt

$$a_4 d_{x_2} u_4 = 2a_4 x_2, \quad a_4 d_{y_2} u_4 = 2a_4 y_2, \quad a_4 d_{z_2} u_4 = 2a_4 z_2,$$

ebenso im Punkte (x_3, y_3, z_3) längs der Linie c_5

$$a_5 d_{x_3} u_5 = 2a_5 x_3, \quad a_5 d_{y_3} u_5 = 2a_5 y_3, \quad a_5 d_{z_3} u_5 = 2a_5 z_3,$$

im Punkte (x_4, y_4, z_4) längs der Linie c_7

$$a_7 d_{x_4} u_7 = 2a_7 x_4, \quad a_7 d_{y_4} u_7 = 2a_7 y_4, \quad a_7 d_{z_4} u_7 = 2a_7 z_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und im Punkte (x_n, y_n, z_n) längs der Linie c_{3n-5}

$$a_{3n-5} d_{x_n} u_{3n-5} = 2a_{3n-5} x_n, \quad a_{3n-5} d_{y_n} u_{3n-5} = 2a_{3n-5} y_n,$$
$$a_{3n-5} d_{z_n} u_{3n-5} = 2a_{3n-5} z_n.$$

Unmittelbar auf den festen Punkt wirken ferner die Componenten

$$a_1, \; a_2, \; a_3.$$

Der ganze Druck auf den festen Punkt ist nach den drei Coordinataxen zerlegt

$$a_1 + 2a_4 x_2 + 2a_5 x_3 + 2a_7 x_4 + 2a_{10} x_5 + \ldots + 2a_{3n-5} x_n$$
$$= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + \ldots + X_n,$$
$$a_2 + 2a_4 y_2 + 2a_5 y_3 + 2a_7 y_4 + 2a_{10} y_5 + \ldots + 2a_{3n-5} y_n$$
$$= Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + \ldots + Y_n,$$
$$a_3 + 2a_4 z_2 + 2a_5 z_3 + 2a_7 z_4 + 2a_{10} z_5 + \ldots + 2a_{3n-5} z_n$$
$$= Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + \ldots + Z_n.$$

§. 25.

Hat das System zwei feste Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2), und nehmen wir die durch diese beiden Punkte gehende Linie als z Axe an, so wird man die $3n - 1$ Verbindungsgleichungen erhalten:

$$u_1 = x_1 = o, \quad u_2 = y_1 = o, \quad u_3 = z_1 - c_2 = o,$$
$$u_4 = x_2 = o, \quad u_5 = y_2 = o, \quad u_6 = z_2 - c_6 = o,$$
$$u_7 = x_3^2 + y_3^2 + (z_1 - z_3)^2 - c_7^2 = o,$$
$$u_8 = x_3^2 + y_3^2 + (z_2 - z_3)^2 - c_8^2 = o,$$
$$u_9 = x_4^2 + y_4^2 + (z_1 - z_4)^2 - c_9^2 = o,$$
$$u_{10} = x_4^2 + y_4^2 + (z_2 - z_4)^2 - c_{10}^2 = o,$$
$$u_{11} = (x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 + (z_3 - z_4)^2 - c_{11}^2 = o,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{3n-3} = x_n^2 + y_n^2 + (z_1 - z_n)^2 - c_{3n-3}^2 = o,$$
$$u_{3n-2} = x_n^2 + y_n^2 + (z_2 - z_n)^2 - c_{3n-2}^2 = o,$$
$$u_{3n-1} = (x_3 - x_n)^2 + (y_3 - y_n)^2 + (z_3 - z_n)^2 - c_{3n-1} = o.$$

Man hat alsdann

$$X_1 = a_1, \quad Y_1 = a_2, \quad X_2 = a_4, \quad Y_2 = a_5,$$
$$Z_1 = a_3 + 2a_7(z_1 - z_3) + 2a_9(z_1 - z_4) + \ldots + 2a_{3n-3}(z_1 - z_n),$$
$$Z_2 = a_6 + 2a_8(z_2 - z_2) + 2a_{10}(z_2 - z_4) + \ldots + 2a_{3n-2}(z_2 - z_n),$$
$$X_3 = 2a_7 x_3 + 2a_8 x_3 + 2a_{11}(x_3 - x_4) + \ldots + 2a_{3n-1}(x_3 - x_n),$$
$$Y_3 = 2a_7 y_3 + 2a_8 y_3 + 2a_{11}(y_3 - y_4) + \ldots + 2a_{3n-1}(y_3 - y_n),$$
$$Z_3 = -2a_7(z_1 - z_3) - 2a_8(z_2 - z_3) + 2a_{11}(z_3 - z_4) + \ldots$$
$$+ 2a_{3n-1}(z_3 - z_n),$$
$$X_4 = 2a_9 x_4 + 2a_{10} x_4 - 2a_{11}(x_3 - x_4),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_n = 2a_{3n-3} x_n + 2a_{3n-2} x_n - 2a_{3n-1}(x_3 - x_n),$$
$$Y_n = 2a_{3n-3} y_n + 2a_{3n-2} y_n - 2a_{3n-1}(y_3 - y_n),$$
$$Z_n = 2a_{3n-3}(z_1 - z_n) - 2a_{3n-2}(z_2 - z_n) - 2a_{3n-1}(z_3 - z_4).$$

Eliminirt man zwischen diesen 3n Gleichungen die $3n - 1$ willkürlichen constanten Coëfficienten $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{3n-1}$, so erhält man die folgende Bedingungsgleichung des Gleichgewichts:

$$(X_1 y_1 - Y_1 x_1) + (X_2 y_2 - Y_2 x_2) + \ldots + (X_n y_n - Y_n x_n) = o.$$

Der Druck auf den festen Punkt (x_1, y_1, z_1) ist, nach den x und y Axen zerlegt, unmittelbar im Punkte:

$$a_1 d_{x_1} u_1 = a_1, \quad a_2 d_{y_1} u_2 = a_2,$$

im Punkte (x_3, y_3, z_3) längs der Linie c_7:

$$a_7 d_{x_3} u_7 = 2a_7 x_3, \quad a_7 d_{y_3} u_7 = 2a_7 y_3,$$

im Punkte (x_4, y_4, z_4) längs der Linie c_9:

$$a_9 d_{x_4} u_9 = 2a_9 x_4, \quad a_9 d_{y_4} u_9 = 2a_9 y_4, \text{ u. s. w.}$$

Der ganze Druck auf den Punkt (x_1, y_1, z_1) wird nun, nach den x und y Axen zerlegt:

$$a_1 + 2a_7 x_3 + 2a_9 x_4 + \ldots + 2a_{3n-3} x_n = \mathfrak{X}_1,$$
$$a_2 + 2a_7 y_3 + 2a_9 y_4 + \ldots + 2a_{3n-3} y_n = \mathfrak{Y}_1,$$

Ebenso findet man den Druck auf den Punkt (x_2, y_2, z_2), nach den x und y Axen zerlegt:

$$a_4 + 2a_8 x_3 + 2a_{10} x_4 + \ldots + 2a_{3n-2} x_n = \mathfrak{X}_2,$$
$$a_5 + 2a_8 y_3 + 2a_{10} y_4 + \ldots + 2a_{3n-2} y_n = \mathfrak{Y}_2.$$

Hieraus findet man

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots X_n = \Sigma X = \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2,$$
$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots Y_n = \Sigma Y = \mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{Y}_2,$$
$$(Y_1 z_1 - Z_1 y_1) + (Y_2 z_2 - Z_2 y_2) + \ldots (Y_n z_n - Z_n y_n)$$
$$= \Sigma(Yz - Zy) = \mathfrak{Y}_1 z_1 + \mathfrak{Y}_2 z_2,$$
$$(Z_1 x_1 - X_1 z_1) + (Z_2 x_2 - X_2 z_2) + \ldots (Z_n x_n - X_n z_n)$$
$$= \Sigma(Zx - Xz) = -(\mathfrak{X}_1 z_1 + \mathfrak{X}_2 z_2),$$

wo der Symmetrie wegen x_1, y_1, x_2, y_2 mitgenommen, obgleich sie gleich Null sind. Aus diesen Gleichungen findet man

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{\Sigma(Zx - Xz) + z_2 \Sigma X}{z_2 - z_1},$$
$$\mathfrak{X}_2 = \frac{\Sigma(Zx - Xz) + z_1 \Sigma X}{z_1 - z_2},$$
$$\mathfrak{Y}_1 = \frac{\Sigma(Yz - Zy) - z_2 \Sigma Y}{z_1 - z_2},$$
$$\mathfrak{Y}_2 = \frac{\Sigma(Yz - Zy) - z_1 \Sigma Y}{z_2 - z_1}.$$

Der für beide Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) gemeinschaftliche Druck längs ihrer Verbindungslinie, der z Axe, ist:

$$a_3 d_{z_1} u_3 + a_6 d_{z_1} u_6 + a_7 d_{z_1} u_7 + a_7 d_{z_3} u_7 + a_8 d_{z_2} u_8 + a_8 d_{z_3} u_8 + \ldots$$
$$+ a_{3n-1} d_{z_3} u_{3n-1} + a_{3n-1} d_{z_n} u_{3n-1} = a_3 + 6$$
$$= Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_n.$$

§. 26.

Ist der feste Körper gegen mehrere Ebenen oder krumme Flächen gelehnt, so übt er in jedem Berührungspunkte einen auf der Ebene oder der krummen Fläche normalen Druck aus. Bezeichnet man durch $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ die Winkel, welche die Normale im Berührungspunkte (x_p, y_p, z_p) mit den drei Coordinataxen bildet, durch $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Winkel, welche die Normale im Berührungspunkte $(x_{p_1}, y_{p_1}, z_{p_1})$ mit den Axen bildet u. s. w., so werden die drei Componenten des Drucks im Punkte (x_p, y_p, z_p)

$$\lambda_p \cos \alpha_0, \ \lambda_p \cos \beta_0, \ \lambda_p \cos \gamma_0,$$

im Punkte $(x_{p_1}, y_{p_1}, z_{p_1})$

$$\lambda_{p_1} \cos \alpha_1, \ \lambda_{p_1} \cos \beta_1, \ \lambda_{p_1} \cos \gamma_1 \ \text{ u. s. w.},$$

wo $\lambda, \lambda_{p_1} \ldots$ willkürliche Grössen sind, nur dass ihr Zeichen immer so angenommen wird, dass der von ihnen dargestellte Druck gegen die berührenden Flächen stattfindet. Statt der berührenden Flächen kann man nach §. 11 diese Kräfte mit entgegengesetzten Zeichen den gegebenen Kräften zufügen und dann das System als frei betrachten. Die Gleichungen des §. 23 werden dann:

$$\Sigma X - \Sigma \lambda_p \cos \alpha = o,$$
$$\Sigma Y - \Sigma \lambda_p \cos \beta = o,$$
$$\Sigma Z - \Sigma \lambda_p \cos \gamma = o,$$
$$\Sigma (Yz - Zy) - \Sigma \lambda_p (z_p \cos \beta - y_p \cos \gamma) = o,$$
$$\Sigma (Zx - Xz) - \Sigma \lambda_p (x_p \cos \gamma - z_p \cos \alpha) = o,$$
$$\Sigma (Xy - Yx) - \Sigma \lambda_p (y_p \cos \alpha - x_p \cos \beta) = o.$$

Wenn nur eine Ebene gegeben ist, welche wir als diejenige der xy Ebene annehmen können, so sind

$$\cos \gamma_0 = \cos \gamma_1 = \ldots = 1,$$
$$\cos \alpha_0 = \cos \alpha_1 = \ldots = \cos \beta_0 = \cos \beta_1 = \ldots = o,$$

und die vorstehenden Gleichungen des Gleichgewichts werden nun:

$$\Sigma X = o, \quad \Sigma Y = o, \quad \Sigma Z = \Sigma \lambda_p,$$
$$\Sigma(Yz - Zy) = -\Sigma \lambda_p y_p, \quad \Sigma(Zx - Xz) = \Sigma \lambda_p x_p,$$
$$\Sigma(Xy - Yx) = o,$$

wo alle die Grössen λ_p, welche den Druck in jedem Berührungspunkte darstellen, dasselbe Zeichen haben müssen, nämlich das positive, wenn der Körper auf der negativen Seite der xy Ebene liegt, das negative, wenn er auf der positiven Seite dieser Ebene liegt. Wir werden hier den erstern Fall annehmen.

Die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts sind erstens
$$\Sigma X = o, \quad \Sigma Y = o, \quad \Sigma(Xy - Yx) = o,$$
und zweitens, dass die durch die Gleichungen
$$\Sigma Z = \Sigma \lambda_p, \quad \Sigma(Yz - Zy) = -\Sigma \lambda_p y_p, \quad \Sigma(Zx - Xz) = \Sigma \lambda_p x_p$$
bestimmten Werthe von $\lambda_p, \lambda_{p_{,}}, \lambda_{p_{,,}}, \ldots$ alle positiv seien.

Sind mehr als drei Berührungspunkte oder drei in einer geraden Linie liegende Berührungspunkte gegeben, so werden im erstern Falle nur drei, im letztern nur zwei der Grössen $\lambda_p, \lambda_{p_{,}}, \lambda_{p_{,,}}, \ldots$ bestimmt werden können, wenn die übrigen willkürlich gewählt sind.

c) Gleichgewicht biegsamer Systeme.

§. 27.

Es seien (Fig. 7) $M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, \ldots$ gerade Linien von unveränderlicher Länge, welche sich um ihre Endpunkte ohne Hindernisse drehen können, so dass sie ein biegsames Stück eines Vielecks bilden. An den Punkten $M_1, M_2, M_3, \ldots$ seien die Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ angebracht, und halten einander gegenseitig im Gleichgewicht. Man hat alsdann die folgenden $n-1$ Verbindungsgleichungen

$$u_1 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - r_1^2 = o,$$
$$u_2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 - r_2^2 = o,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{n-1} = (x_{n-1} - x_n)^2 + (y_{n-1} - y_n)^2 + (z_{n-1} - z_n)^2 - r_{n-1}^2 = o.$$

Die Componenten der Kräfte $P_1, P_2, \ldots$ nach den drei Coordinataxen werden alsdann

$$\begin{aligned}
X_1 &= 2a_1(x_1 - x_2),\\
X_2 &= -2a_1(x_1 - x_2) + 2a_2(x_2 - x_3),\\
X_3 &= -2a_2(x_2 - x_3) + 2a_3(x_3 - x_4),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_{n-1} &= -2a_{n-2}(x_{n-2} - x_{n-1}) + 2a_{n-1}(x_{n-1} - x_n),\\
X_n &= -2a_{n-1}(x_{n-1} - x_n),\\
Y_1 &= 2a_1(y_1 - y_2),\\
Y_2 &= -2a_1(y_1 - y_2) + 2a_2(y_2 - y_3),\\
Y_3 &= -2a_2(y_2 - y_3) + 2a_3(y_3 - y_4),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Y_{n-1} &= -2a_{n-2}(y_{n-2} - y_{n-1}) + 2a_{n-1}(y_{n-1} - y_n),\\
Y_n &= -2a_{n-1}(y_{n-1} - y_n),\\
Z_1 &= 2a_1(z_1 - z_2),\\
Z_2 &= -2a_1(z_1 - z_2) + 2a_2(z_2 - z_3),\\
Z_3 &= -2a_2(z_2 - z_3) + 2a_3(z_3 - z_4),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Z_{n-1} &= -2a_{n-2}(z_{n-2} - z_{n-1}) + 2a_{n-1}(z_{n-1} - z_n),\\
Z_n &= -2a_{n-1}(z_{n-1} - z_n).
\end{aligned}$$

Eliminirt man zwischen diesen 3n Gleichungen die $n-1$ willkürlichen constanten Coëfficienten $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, so erhält man die folgenden $2n+1$ Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts

$$\begin{aligned}
X_1 + X_2 + \ldots X_n &= o,\\
Y_1 + Y_2 + \ldots Y_n &= o,\\
Z_1 + Z_2 + \ldots Z_n &= o,
\end{aligned}$$

$$\frac{X_1}{x_1 - x_2} = \frac{Y_1}{y_1 - y_2} = \frac{Z_1}{z_1 - z_2},$$

$$\frac{X_1 + X_2}{x_2 - x_3} = \frac{Y_1 + Y_2}{y_2 - y_3} = \frac{Z_1 + Z_2}{z_2 - z_3},$$

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3}{x_3 - x_4} = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{y_3 - y_4} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{z_3 - z_4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}}{x_{n-1} - x_n} = \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{n-1}}{y_{n-1} - y_n} = \frac{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{n-1}}{z_{n-1} - z_n}.$$

Die normal auf den Flächen $u_1 = o$, $u_2 = o$, $\ldots$ $u_{n-1} = o$, d. h. längs der Linien $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$ wirkenden Tensionen sind (§. 14):

im Punkte (x_1, y_1, z_1) längs r_1

$$\lambda'_1 = a_1\sqrt{(d_{x_1}u_1)^2 + (d_{y_1}u_1)^2 + (d_{z_1}u_1)^2} = 2a_1 r_1$$
$$= \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} = t_1,$$

im Punkte (x_2, y_2, z_2) längs r_1

$$\lambda'_2 = a_1\sqrt{(d_{x_2}u_1)^2 + (d_{y_2}u_1)^2 + (d_{z_2}u_1)^2} = -2a_1 r_1$$
$$= -\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} = -t_1,$$

in demselben Punkte längs r_2

$$\lambda''_2 = a_2\sqrt{(d_{x_2}u_2)^2 + (d_{y_2}u_2)^2 + (d_{z_2}u_2)^2} = 2a_2 r_2$$
$$= \sqrt{(X_1 + X_2)^2 + (Y_1 + Y_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2} = t_2,$$

im Punkte (x_3, y_3, z_3) längs r_2

$$\lambda''_3 = a_2\sqrt{(d_{x_3}u_2)^2 + (d_{y_3}u_2)^2 + (d_{z_3}u_2)^2} = -2a_2 r_2$$
$$= -\sqrt{(X_1 + X_2)^2 + (Y_1 + Y_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2} = -t_2,$$

in demselben Punkte längs r_3

$$\lambda'''_3 = a_3\sqrt{(d_{x_3}u_3)^2 + (d_{y_3}u_3)^2 + (d_{z_3}u_3)^2} = 2a_3 r_3$$
$$= \sqrt{(X_1+X_2+X_3)^2+(Y_1+Y_2+Y_3)^2+(Z_1+Z_2+Z_3)^2} = t_3,$$

. .

im Punkte (x_n, y_n, z_n) längs r_{n-1}

$$\lambda_n^{(n-1)} = a_{n-1}\sqrt{(d_{x_n}u_{n-1})^2+(d_{y_n}u_{n-1})^2+(d_{z_n}u_{n-1})^2} = -2a_{n-1}r_{n-1}$$
$$= -\sqrt{(X_1+X_2+\ldots X_{n-1})^2+(Y_1+Y_2+\ldots Y_n)^2+(Z_1+Z_2+\ldots Z_n)^2}$$
$$= -\sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2} = -t_n.$$

Die Tension t_{s-1} in einem der Verbindungspunkte (x_s, y_s, z_s) längs der verbindenden Linie r_{s-1} wird folglich der Resultante aller Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_{s-1}$ gleich aber entgegengesetzt sein, wenn diese parallel mit ihren respectiven Richtungen auf den Punkt (x_s, y_s, z_s) wirkten; längs der verbindenden Linie r_s wird die Tension t_s der Resultante der Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_s$ gleich sein, wenn diese parallel mit ihren respectiven Richtungen auf den Punkt (x_s, y_s, z_s) wirkten. Die Tensionen t_s und t_{s-1} im Punkte (x_s, y_s, z_s) werden folglich immer die Kraft P_s zur Resultante haben, oder P_s wird mit $-t_s$ und $-t_{s-1}$ im Gleichgewichte stehen.

§. 28.

Bezeichnet man durch α_1, β_1, γ_1 die Winkel, welche die Linie r_1 mit den drei Coordinataxen bildet, durch α_2, β_2, γ_2 die Winkel, welche die Linie r_2 mit den drei Coordinataxen bildet, so wird

$$x_1 - x_2 = r_1 \cos\alpha_1,\quad y_1 - y_2 = r_1 \cos\beta_1,\quad z_1 - z_2 = r_1 \cos\gamma_1,$$
$$x_2 - x_3 = r_2 \cos\alpha_2,\quad y_2 - y_3 = r_2 \cos\beta_2,\quad z_2 - z_3 = r_2 \cos\gamma_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n-1} - x_n = r_{n-1} \cos\alpha_{n-1},\quad y_{n-1} - y_n = r_{n-1} \cos\beta_{n-1},$$
$$z_{n-1} - z_n = r_{n-1} \cos\gamma_{n-1}.$$

Diese Werthe, in die Gleichungen des vorigen Paragraphen substituirt, geben

$$X_1 = 2a_1(x_1 - x_2) = 2a_1 r_1 \cos\alpha_1 = t_1 \cos\alpha_1,$$
$$X_2 = -2a_1(x_1 - x_2) + 2a_2(x_2 - x_3) = -t_1 \cos\alpha_1 + t_2 \cos\alpha_2,$$
$$X_3 = -2a_2(x_2 - x_3) + 2a_3(x_3 - x_4) = -t_2 \cos\alpha_2 + t_3 \cos\alpha_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_n = -2a_{n-1}(x_{n-1} - x_n) = -t_{n-1} \cos\alpha_{n-1},$$
$$Y_1 = 2a_1(y_1 - y_2) = 2a_1 r_1 \cos\beta_1 = t_1 \cos\beta_1,$$
$$Y_2 = -2a_1(y_1 - y_2) + 2a_2(y_2 - y_3) = -t_1 \cos\beta_1 + t_2 \cos\beta_2,$$
$$Y_3 = -2a_2(y_2 - y_3) + 2a_3(y_3 - y_4) = -t_2 \cos\beta_2 + t_3 \cos\beta_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y_n = -2a_{n-1}(y_{n-1} - y_n) = -t_{n-1} \cos\beta_{n-1},$$
$$Z_1 = 2a_1(z_1 - z_2) = 2a_1 r_1 \cos\gamma_1 = t_1 \cos\gamma_1,$$
$$Z_2 = -2a_1(z_1 - z_2) + 2a_2(z_2 - z_3) = -t_1 \cos\gamma_1 + t_2 \cos\gamma_2,$$
$$Z_3 = -2a_2(z_2 - z_3) + 2a_3(z_3 - z_4) = -t_2 \cos\gamma_2 + t_3 \cos\gamma_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Z_n = -2a_n(z_{n-1} - z_n) = -t_{n-1} \cos\gamma_{n-1}.$$

Ferner bestehen noch zwischen den Winkeln α_1, β_1, γ_1, α_2, ... die Gleichungen

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1,$$
$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cos^2\alpha_{n-1} + \cos^2\beta_{n-1} + \cos^2\gamma_{n-1} = 1.$$

Man findet dann wie vorher

$$t_1 = \sqrt{[X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2]},$$
$$t_2 = \sqrt{[(X_1 + X_2)^2 + (Y_1 + Y_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2]},$$

$$t_3 = \sqrt{[(X_1 + X_2 + X_3)^2 + (Y_1 + Y_2 + Y_3)^2 + (Z_1 + Z_2 + Z_3)^2]},$$

. .

$$t_{n-1} = \sqrt{[(X_1 + X_2 + .. X_{n-1})^2 + (Y_1 + Y_2 + ... Y_{n-1})^2 + (Z_1 + Z_2 + ... Z_{n-1})^2]}$$
$$= \sqrt{[X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2]},$$

und hieraus wieder

$$\cos\alpha_1 = \frac{X_1}{t_1} = \frac{X_1}{\sqrt{[X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2]}} = \frac{X_1}{P_1},$$

$$\cos\beta_1 = \frac{Y_1}{t_1} = \frac{Y_1}{\sqrt{[X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2]}} = \frac{Y_1}{P_1},$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{Z_1}{t_1} = \frac{Z_1}{\sqrt{[X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2]}} = \frac{Z_1}{P_1},$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{X_1 + X_2}{t_2} = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{[(X_1 + X_2)^2 + (Y_1 + Y_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2]}},$$

$$\cos\beta_2 = \frac{Y_1 + Y_2}{t_2} = \frac{Y_1 + Y_2}{\sqrt{[(X_1 + X_2)^2 + (Y_1 + Y_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2]}},$$

$$X_1 = -(X_2 + X_3 + \ldots + X_n),$$
$$Y_1 = -(Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_n),$$
$$Z_1 = -(Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_n).$$

Durch diese Gleichungen sind die Richtungen der Verbindungslinien $r_1, r_2, r_3, \ldots r_{n-1}$, so wie die Kräfte X_1, Y_1, Z_1, welche den Widerstand des Anfangspunktes des Polygonenstücks ausdrücken, bestimmt, wenn die übrigen Kräfte gegeben sind. Sind ferner die Längen der Verbindungslinien und die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des ersten Anfangspunktes bekannt, so findet man die Coordinaten der übrigen Punkte durch die Gleichungen

$$x_2 = x_1 - r_1\cos\alpha_1,\quad y_2 = y_1 - r_1\cos\beta_1,\quad z_2 = z_1 - r_1\cos\gamma_1,$$
$$x_3 = x_1 - r_1\cos\alpha_1 - r_2\cos\alpha_2,\quad y_3 = y_1 - r_1\cos\beta_1 - r_2\cos\beta_2,$$
$$z_3 = z_1 - r_1\cos\gamma_1 - r_2\cos\gamma_2,$$

. .

$$x_n = x_1 - r_1\cos\alpha_1 - r_2\cos\alpha_2 - \ldots - r_{n-1}\cos\alpha_{n-1},$$
$$y_n = y_1 - r_1\cos\beta_1 - r_2\cos\beta_2 - \ldots - r_{n-1}\cos\beta_{n-1},$$
$$z_n = z_1 - r_1\cos\gamma_1 - r_2\cos\gamma_2 - \ldots - r_{n-1}\cos\gamma_{n-1}.$$

Sind beide Endpunkte befestigt, und folglich ihre Coordinaten (x_1, y_1, z_1), (x_n, y_n, z_n) gegeben, so müssen die an den beiden End-

punkten angebrachten Kräfte P_1 und P_n oder deren Componenten $X_1, Y_1, Z_1, X_n, Y_n, Z_n$, welche die Widerstände der beiden festen Endpunkte ausdrücken, den unbekannten Grössen zugezählt werden. Man hat nun die drei bisher unbekannte Grössen x_n, y_n, z_n weniger, aber statt dessen drei neue unbekannte Grössen X_n, Y_n, Z_n.

Man hat jetzt

$$x_1 - x_n = r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2 + \ldots + r_{n-1} \cos \alpha_{n-1},$$
$$y_1 - y_n = r_1 \cos \beta_1 + r_2 \cos \beta_2 + \ldots + r_{n-1} \cos \beta_{n-1},$$
$$z_1 - z_n = r_1 \cos \gamma_1 + r_2 \cos \gamma_2 + \ldots + r_{n-1} \cos \gamma_{n-1}.$$

Substituirt man hier die Werthe von $\cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2, \ldots \cos \beta_1, \ldots$ so erhält man, um X_1, Y_1, Z_1 zu bestimmen, die Gleichungen

$$\frac{r_1 X_1}{\sqrt{[X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2]}} + \frac{r_2 (X_1 + X_2)}{\sqrt{[(X_1 + X_2)^2 + (Y_1 + Y_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2]}} + \ldots$$
$$+ \frac{r_{n-1}(X_1 + X_2 + \ldots X_{n-1})}{\sqrt{[(X_1+X_2+\ldots X_{n-1})^2 + (Y_1+Y_2+\ldots Y_{n-1})^2 + (Z_1+Z_2+\ldots Z_{n-1})^2]}}$$
$$= x_1 - x_n,$$

$$\frac{r_1 Y_1}{\sqrt{[X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2]}} + \frac{r_2 (Y_1 + Y_2)}{\sqrt{[(X_1 + X_2)^2 + (Y_1 + Y_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2]}} + \ldots$$
$$+ \frac{r_{n-1}(Y_1 + Y_2 + \ldots Y_{n-1})}{\sqrt{[(X_1+X_2+\ldots X_{n-1})^2 + (Y_1+Y_2+\ldots Y_{n-1})^2 + (Z_1+Z_2+\ldots Z_{n-1})^2]}}$$
$$= y_1 - y_n,$$

$$\frac{r_1 Z_1}{\sqrt{[X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2]}} + \frac{r_2 (Z_1 + Z_2)}{\sqrt{[(X_1 + X_2)^2 + (Y_1 + Y_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2]}} + \ldots$$
$$+ \frac{r_{n-1}(Z_1 + Z_2 + \ldots Z_{n-1})}{\sqrt{[(X_1+X_2+\ldots X_{n-1})^2 + (Y_1+Y_2+\ldots Y_{n-1})^2 + (Z_1+Z_2+\ldots Z_{n-1})^2]}}$$
$$= z_1 - z_n.$$

Um X_n, Y_n, Z_n zu bestimmen, hat man dann die Gleichungen

$$X_n = -(X_1 + X_2 + \ldots X_{n-1}),\quad Y_n = -(Y_1 + Y_2 + \ldots Y_{n-1}),$$
$$Z_n = -(Z_1 + Z_2 + \ldots Z_{n-1}),$$

und die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \ldots$ werden durch die Kräfte X_1, $X_2, \ldots Y_1, Y_2, \ldots Z_1, Z_2, \ldots$ wie vorher bestimmt werden.

Ist das Polygon geschlossen, so braucht man in diesen Gleichungen nur $x_1 - x_n = o$, $y_1 - y_n = o$, $z_1 - z_n = o$ zu setzen,

um dann die Kräfte X_1, Y_1, Z_1 und die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \ldots \gamma_{n-1}$ bestimmen zu können. Die Componenten der im Verbindungspunkte der Linien r_1 und r_n wirkenden Kraft sind

$$X_1 + X_n = -(X_2 + X_3 + \ldots X_{n-1}),$$
$$Y_1 + Y_n = -(Y_2 + Y_3 + \ldots Y_{n-1}),$$
$$Z_1 + Z_n = -(Z_2 + Z_3 + \ldots Z_{n-1}).$$

§. 29.

Sind die Richtungen aller Kräfte, ausser der auf den beiden Endpunkten wirkenden, parallel und wählt man das Coordinatensystem so, dass diese Richtung der z Axe parallel wird, so ist

$$X_2 = X_3 = \ldots = X_{n-1} = Y_2 = Y_3 = \ldots = Y_{n-1} = o.$$

Diese Werthe in die Gleichungen des §. 27 eingesetzt, giebt die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3} = \ldots = \frac{x_{n-1} - x_n}{y_{n-1} - y_n} = \frac{X_1}{Y_1} = \frac{X_n}{Y_n},$$
$$\frac{X_1}{x_1 - x_2} = \frac{Z_1}{z_1 - z_2},$$
$$\frac{X_1}{x_2 - x_3} = \frac{Z_1 + Z_2}{z_2 - z_3},$$
$$\frac{X_1}{x_3 - x_4} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{z_3 - z_4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{X_1}{x_{n-1} - x_n} = \frac{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{n-1}}{z_{n-1} - z_n},$$
$$X_1 + X_n = o, \quad Y_1 + Y_n = o, \quad Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = o.$$

Aus den ersten dieser Gleichungen geht hervor, dass alle Punkte in einer verticalen Ebene liegen müssen. Nimmt man diese Ebene als diejenige der x und z Axe an, so wird

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = o, \quad Y_1 = Y_n = o.$$

Bezeichnet man ferner durch $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{n-1}$ die Winkel, welche die Linien $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$ mit der z Axe bilden, so wird

$$x_1 - x_2 = r_1 \sin\gamma_1, \quad x_2 - x_3 = r_2 \sin\gamma_2, \quad x_{n-1} - x_n = r_{n-1} \sin\gamma_{n-1},$$
$$z_1 - z_2 = r_1 \cos\gamma_1, \quad z_2 - z_3 = r_2 \cos\gamma_2, \quad z_{n-1} - z_n = r_{n-1} \cos\gamma_{n-1}.$$

Die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts werden dann

$$\frac{X_1}{\sin\gamma_1} = \frac{Z_1}{\cos\gamma_1},$$
$$\frac{X_1}{\sin\gamma_2} = \frac{Z_1 + Z_2}{\cos\gamma_2},$$
$$\frac{X_1}{\sin\gamma_3} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{\cos\gamma_3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{X_1}{\sin\gamma_{n-1}} = \frac{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{n-1}}{\cos\gamma_{n-1}},$$
$$X_1 + X_n = 0, \quad Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0,$$

und hieraus, indem man bemerkt, dass, wenn zwei Brüche gleich sind, jeder einem neuen Bruche gleich ist, dessen Zähler die Differenz der Zähler und dessen Nenner die Differenz der Nenner ist,

$$X_1 = \frac{Z_1}{\operatorname{cotang}\gamma_1} = \frac{Z_2}{\operatorname{cotang}\gamma_2 - \operatorname{cotang}\gamma_1} = \frac{Z_3}{\operatorname{cotang}\gamma_3 - \operatorname{cotang}\gamma_2} = \ldots$$
$$= \frac{Z_{n-1}}{\operatorname{cotang}\gamma_{n-1} - \operatorname{cotang}\gamma_{n-2}} = -\frac{Z_n}{\operatorname{cotang}\gamma_{n-1}} = -X_n.$$

Multiplicirt man in diesen Brüchen die Zähler und Nenner respective mit $\sin\gamma_1$, $\sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$, $\sin\gamma_2 . \sin\gamma_3$, ... $\sin\gamma_{n-1}$, so können diese Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts auch auf die Form gebracht werden

$$X_1 = \frac{Z_1 \sin\gamma_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_1\right)} = Z_2 \frac{\sin\gamma_1 \sin\gamma_2}{\sin(\gamma_1 - \gamma_2)} = Z_3 \frac{\sin\gamma_2 \sin\gamma_3}{\sin(\gamma_2 - \gamma_3)} = \ldots$$
$$= Z_{n-1} \frac{\sin\gamma_{n-2} \sin\gamma_{n-1}}{\sin(\gamma_{n-2} - \gamma_{n-1})} = Z_n \frac{\sin\gamma_{n-1}}{\sin\left(\gamma_{n-1} - \frac{\pi}{2}\right)} = -X_n.$$

Die Tension an jedem Ende einer Verbindungslinie r_s wird dem §. 27 zufolge die Resultante einer horizontalen Kraft $\pm X_1$ und der verticalen Kräfte $Z_1, Z_2, \ldots Z_s$ sein, wenn diese im Endpunkte der Linie angebracht werden. Man hat alsdann

$$t_s = \pm\sqrt{[X_1^2 + (Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots Z_s)^2]} = \pm\sqrt{\left[X_1^2 + \frac{X_1^2 \cos^2\gamma_s}{\sin^2\gamma_s}\right]}$$
$$= \pm\frac{X_1}{\sin\gamma_s}.$$

Die horizontale Componente der Tension wird folglich überall dieselbe gleich $\pm X_1 = \mp X_n$ sein.

Ist das eine Ende des Polygons befestigt, d. h. sind x_1 und z_1 bekannte Grössen, sind ferner die Länge der Verbindungslinien $r_1, r_2, \dots r_n$, so wie die Kräfte $Z_2, Z_3, \dots Z_n, X_n$ bekannt, so werden die Winkel $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_{n-1}$, so wie die Kräfte X_1 und Z_1, welche den Widerstand des festen Punktes ausdrücken, durch die folgenden Gleichungen bestimmt

$$X_1 = -X_n, \quad Z_1 = -(Z_2 + Z_3 + \dots Z_n),$$

$$\operatorname{cotang} \gamma_{n-1} = \frac{Z_n}{X_n},$$

$$\operatorname{cotang} \gamma_{n-2} = \frac{Z_n + Z_{n-1}}{X_n},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\operatorname{cotang} \gamma_1 = \frac{Z_n + Z_{n-1} + \dots Z_2}{X_n} = -\frac{Z_1}{X_n} = \frac{Z_1}{X_1},$$

und die Lage der Verbindungspunkte durch die Gleichungen

$$x_2 = x_1 - r_1 \sin \gamma_1, \qquad z_2 = z_1 - r_1 \cos \gamma_1,$$

$$x_3 = x_1 - r_1 \sin \gamma_1 - x_2 \sin \gamma_2, \qquad z_3 = z_1 - r_1 \cos \gamma_1 - r_2 \cos \gamma_2,$$

u. s. w.

Sind beide Endpunkte des Polygons befestigt, folglich x_1, z_1, x_n, z_n bekannte Grössen, dagegen X_1 und Z_1, X_n und Z_n, welche den Widerstand der beiden festen Punkte ausdrücken, unbekannte Grössen, so findet man diese durch die folgenden vier Gleichungen

$$X_1 + X_n = o, \quad Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n = o,$$

$$\frac{r_1 X_1}{\sqrt{[X_1^2 + Z_1^2]}} + \frac{r_2 X_1}{\sqrt{[X_1^2 + (Z_1 + Z_2)^2]}} + \frac{r_3 X_1}{\sqrt{[X_1^2 + (Z_1 + Z_2 + Z_3)^2]}} + \dots$$

$$+ \frac{r_{n-1} X_1}{\sqrt{[X_1^2 + (Z_1 + Z_2 + \dots Z_{n-1})^2]}} = x_1 - x_n,$$

$$\frac{r_1 Z_1}{\sqrt{[X_1^2 + Z_1^2]}} + \frac{r_2 (Z_1 + Z_2)}{\sqrt{[X_1^2 + (Z_1 + Z_2)^2]}} + \frac{r_3 (Z_1 + Z_2 + Z_3)}{\sqrt{[X_1^2 + (Z_1 + Z_2 + Z_3)^2]}} + \dots$$

$$+ \frac{r_{n-1} (Z_1 + Z_2 + \dots Z_{n-1})}{\sqrt{[X_1^2 + (Z_1 + Z_2 + \dots Z_{n-1})^2]}} = z_1 - z_n.$$

Alsdann werden die Winkel $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ und die Coordinaten der Verbindungspunkte wie vorher gefunden.

§. 30.

Wenn das gegebene System von Punkten eine Schnur von vollkommener Biegsamkeit, von gleichförmigem Gewicht und von unveränderlicher Länge ist, so wird die Linie, welche die Schnur im Zustande des Gleichgewichts bildet, wenn sie an ihren beiden Endpunkten befestigt wird, eine Kettenlinie genannt. Um die Gleichung dieser Linie zu finden, braucht man nur in den im vorigen Paragraphen entwickelten Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts eines von parallelen Kräften angegriffenen Polygons die Seiten unendlich klein und die Kräfte dieser Seiten proportional anzunehmen.

Bezeichnet man folglich (Fig. 8) durch s die Länge eines Bogens der Kettenlinie, durch k das Gewicht einer Längeneinheit, durch Θ den Winkel, welchen die Tangente im Punkte (x, z) mit der z-Axe bildet, so ist

$$r_s = ds, \quad Z_s = kds, \quad \gamma_s = \Theta, \quad \gamma_{s-1} = \Theta - d\Theta.$$

Die im vorigen Paragraphen mitgetheilten Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts

$$X_1 = \frac{Z_s \sin\gamma_{s-1} \sin\gamma_s}{\sin(\gamma_{s-1} - \gamma_s)} = -X_n$$

werden dann

$$X_1 = -X_n = -\frac{k \sin^2\Theta ds}{d\Theta},$$

woraus

$$ds = -\frac{X_1}{k} \cdot \frac{d\Theta}{\sin^2\Theta},$$

$$dx = \sin\Theta ds = -\frac{X_1}{k} \cdot \frac{d\Theta}{\sin\Theta},$$

$$dz = \cos\Theta ds = -\frac{X_1}{k} \cdot \frac{\cos\Theta d\Theta}{\sin^2\Theta}.$$

Nimmt man den untersten Punkt der Kettenlinie A als Anfangspunkt der Coordinaten an, so ist hier $\Theta = \frac{\pi}{2}$. Integrirt man dann die vorhergehenden Gleichungen in Bezug auf Θ von $\frac{\pi}{2}$ bis Θ, so erhält man

$$s = \frac{X_1}{k} \text{cotang}\, \Theta, \quad x = \frac{X_1}{k} \log \text{cotang} \tfrac{1}{2}\Theta, \quad z = \frac{X_1}{k}\left(\frac{1}{\sin \Theta} - 1\right).$$

Hieraus findet man dann wieder

$$\sin \Theta = \frac{X_1}{X_1 + kz}, \quad \cos \Theta = \frac{\sqrt{2kX_1 z + k^2 z^2}}{X_1 + kz},$$

$$\text{cotang} \tfrac{1}{2}\Theta = \frac{1 + \cos \Theta}{\sin \Theta} = \frac{X_1 + kz + \sqrt{2kX_1 z + k^2 z^2}}{X_1}$$

$$= \frac{X_1}{X_1 + kz - \sqrt{2kX_1 z + k^2 z^2}},$$

folglich

$$s = \frac{\sqrt{2kX_1 z + k^2 z^2}}{k},$$

$$x = \frac{X_1}{k} \log \text{nat} \left(\frac{X_1 + kz + \sqrt{2kX_1 z + k^2 z^2}}{X_1}\right)$$

$$= -\frac{X_1}{k} \log \text{nat} \left(\frac{X_1 + kz - \sqrt{2kX_1 z + k^2 z^2}}{X_1}\right).$$

Hieraus erhält man dann, wenn wie gewöhnlich e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet,

$$X_1 e^{\frac{kx}{X_1}} = X_1 + kz + \sqrt{2kX_1 z + k^2 z^2},$$

$$X_1 e^{-\frac{kx}{X_1}} = X_1 + kz - \sqrt{2kX_1 z + k^2 z^2},$$

$$ks = \sqrt{2kX_1 z + k^2 z^2},$$

und hieraus

$$s = \frac{1}{2}\frac{X_1}{k}\left(e^{\frac{kx}{X_1}} - e^{-\frac{kx}{X_1}}\right),$$

$$z = -\frac{X_1}{k} + \frac{1}{2}\frac{X_1}{k}\left(e^{\frac{kx}{X_1}} + e^{-\frac{kx}{X_1}}\right),$$

unter welcher Form gewöhnlich die Gleichung der Kettenlinie dargestellt wird.

Es seien jetzt $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{z}_1$ die Coordinaten der beiden Aufhängepunkte, wo $\mathfrak{x}_1$ negativ genommen werden muss, wenn der tiefste Punkt der Kettenlinie zwischen beiden Aufhängepunkten sich befindet. Es sei ferner L die ganze Länge des Fadens, $AM_1 = \lambda$, $AM_{11} = L - \lambda$, so hat man zwischen den unbekannten Grössen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{z}_1$, λ, X_1 folgende 6 Gleichungen

$$\mathfrak{z} = -\frac{X_1}{k} + \frac{1}{2}\frac{X_1}{k}\left(e^{\frac{k\mathfrak{x}}{X_1}} + e^{-\frac{k\mathfrak{x}}{X_1}}\right),$$

$$\mathfrak{z}_1 = -\frac{X_1}{k} + \frac{1}{2}\frac{X_1}{k}\left(e^{\frac{k\mathfrak{x}_1}{X_1}} + e^{-\frac{k\mathfrak{x}_1}{X_1}}\right),$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{X_1}{k}\left(e^{\frac{k\mathfrak{x}}{X_1}} - e^{-\frac{k\mathfrak{x}}{X_1}}\right),$$

$$\lambda - L = \frac{1}{2}\frac{X_1}{k}\left(e^{\frac{k\mathfrak{x}_1}{X_1}} - e^{-\frac{k\mathfrak{x}_1}{X_1}}\right),$$

$$\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1 = a,$$

$$\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1 = b,$$

wo a und b die horizontale und verticale Projection des Abstandes beider Aufhängepunkte sind. Eliminirt man $\mathfrak{z}$, λ, $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{z}_1$, so erhält man zwischen X_1 und $\mathfrak{x}$ die zwei Gleichungen

$$b = \frac{1}{2}\frac{X_1}{k}\left(e^{\frac{k\mathfrak{x}}{X_1}} + e^{-\frac{k\mathfrak{x}}{X_1}} - e^{\frac{k(\mathfrak{x}-a)}{X_1}} - e^{-\frac{k(\mathfrak{x}-a)}{X_1}}\right),$$

$$L = \frac{1}{2}\frac{X_1}{k}\left(e^{\frac{k\mathfrak{x}}{X_1}} - e^{-\frac{k\mathfrak{x}}{X_1}} - e^{\frac{k(\mathfrak{x}-a)}{X_1}} + e^{-\frac{k(\mathfrak{x}-a)}{X_1}}\right),$$

und hieraus wieder

$$b + L = \frac{X_1}{k}\left(e^{\frac{k\mathfrak{x}}{X_1}} - e^{\frac{k(\mathfrak{x}-a)}{X_1}}\right),$$

$$b - L = \frac{X_1}{k}\left(e^{-\frac{k\mathfrak{x}}{X_1}} - e^{-\frac{k(\mathfrak{x}-a)}{X_1}}\right),$$

$$L^2 - b^2 = \frac{X_1^2}{k^2}\left(e^{\frac{ka}{X_1}} + e^{-\frac{ka}{X_1}} - 2\right),$$

$$\sqrt{L^2 - b^2} = \frac{X_1}{k}\left(e^{\frac{ka}{2X_1}} - e^{-\frac{ka}{2X_1}}\right).$$

Um aus dieser Gleichung durch Annäherung X_1 bequem finden zu können, setze man

$$\frac{2X_1}{k\sqrt{L^2-b^2}} = \tang\mu, \quad X_1 = \frac{k\sqrt{L^2-b^2}}{2}\tang\mu,$$

so wird die obige Gleichung

$$\sqrt{L^2 - b^2} = \frac{\sqrt{L^2 - b^2}}{2} \operatorname{tang} \mu \left(e^{\frac{a}{\sqrt{L^2 - b^2}} \operatorname{tang} \mu} - e^{-\frac{a}{\sqrt{L^2 - b^2}} \operatorname{tang} \mu} \right),$$

oder

$$e^{\frac{a}{\sqrt{L^2 - b^2}} \operatorname{cotang} \mu} - e^{-\frac{a}{\sqrt{L^2 - b^2}} \operatorname{cotang} \mu} = 2 \operatorname{cotang} \mu.$$

Es ist aber

$$\left(e^{\frac{a}{\sqrt{L^2 - b^2}} \operatorname{cotang} \mu} + e^{-\frac{a}{\sqrt{L^2 - b^2}} \operatorname{cotang} \mu} \right)^2 - \left(e^{\frac{a}{\sqrt{L^2 - b^2}} \operatorname{cotang} \mu} - e^{-\frac{a}{\sqrt{L^2 - b^2}} \operatorname{cotang} \mu} \right)^2 = 4.$$

Daher

$$e^{\frac{a}{\sqrt{L^2 - b^2}} \operatorname{cotang} \mu} + e^{-\frac{a}{\sqrt{L^2 - b^2}} \operatorname{cotang} \mu} = 2\sqrt{1 + \operatorname{cotang}^2 \mu} = \frac{2}{\sin \mu},$$

wo das positive Wurzelzeichen gewählt werden muss, weil der Ausdruck links nur positive Werthe haben kann. Werden diese beiden Gleichungen addirt, so erhält man

$$e^{\frac{a}{\sqrt{L^2 - b^2}} \operatorname{cotang} \mu} = \operatorname{cotang} \mu + \frac{1}{\sin \mu} = \frac{1 + \cos \mu}{\sin \mu} = \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}\mu,$$

folglich

$$\frac{a}{\sqrt{L^2 - b^2}} \operatorname{cotang} \mu = \log \operatorname{nat} \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}\mu$$

oder

$$\operatorname{tang} \mu \log \operatorname{nat} \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}\mu = \frac{a}{\sqrt{L^2 - b^2}},$$

wo $\frac{a}{\sqrt{L^2 - b^2}}$ immer kleiner als 1 ist. Aus dieser Gleichung wird dann μ durch Hülfe der folgenden Tafel gefunden:

μ	tang μ × log nat cotang $\frac{1}{2}\mu$	μ	tang μ × log nat cotang $\frac{1}{2}\mu$	μ	tang μ × log nat cotang $\frac{1}{2}\mu$
0°	0,000 0000				
1°	0,082 7605	31°	0,770 6440	61°	0,954 7970
2°	0,141 3637	32°	0,780 5621	62°	0,958 0277
3°	0,190 8971	33°	0,790 1180	63°	0,961 1207
4°	0,234 5816	34°	0,799 3269	64°	0,964 0789
5°	0,273 9534	35°	0,808 1834	65°	0,966 9054
6°	0,309 9209	36°	0,816 7626	66°	0,969 6020
7°	0,343 0870	37°	0,825 0162	67°	0,972 1722
8°	0,373 8817	38°	0,832 9766	68°	0,974 6174
9°	0,402 6276	39°	0,840 6560	69°	0,976 9402
10°	0,424 5760	40°	0,848 0640	70°	0,979 1419
11°	0,454 9278	41°	0,855 2110	71°	0,981 2250
12°	0,478 8481	42°	0,862 1070	72°	0,983 1919
13°	0,501 4738	43°	0,868 7606	73°	0,985 0420
14°	0,522 9216	44°	0,875 1800	74°	0,986 7800
15°	0,543 2910	45°	0,881 3736	75°	0,988 4044
16°	0,562 6683	46°	0,887 3486	76°	0,989 9190
17°	0,581 1289	47°	0,893 1120	77°	0,991 3230
18°	0,598 7393	48°	0,898 6714	78°	0,992 6192
19°	0,615 5587	49°	0,904 0318	79°	0,993 8070
20°	0,631 6396	50°	0,909 2008	80°	0,994 8897
21°	0,647 0293	51°	0,914 1824	81°	0,995 8632
22°	0,661 7701	52°	0,918 9828	82°	0,996 7367
23°	0,675 9013	53°	0,923 6072	83°	0,997 5047
24°	0,689 4576	54°	0,928 0606	84°	0,998 1689
25°	0,702 4710	55°	0,932 3472	85°	0,998 7277
26°	0,714 9713	56°	0,936 4720	86°	0,999 1860
27°	0,726 9850	57°	0,940 4379	87°	0,999 5426
28°	0,738 5717	58°	0,944 2500	88°	0,999 7957
29°	0,749 6504	59°	0,947 9120	89°	0,999 9552
30°	0,760 3460	60°	0,951 4259	90°	1,000 0000

Wenn aus dieser Tafel μ durch Interpolation mit hinlänglicher Genauigkeit gefunden ist, so findet man

$$X_1 = \frac{1}{2}k \tang \mu \sqrt{L^2 - b^2},$$

$$x = \frac{X_1}{k}\left[\log(L+b) - \log\frac{X_1}{k} - \log\left(1 - e^{-\frac{ka}{X_1}}\right)\right],$$

$$z = -\frac{X_1}{k} + \frac{1}{2}\frac{X_1}{k}\left(e^{\frac{kr}{X_1}} - e^{-\frac{kr}{X_1}}\right),$$

wodurch die Lage des tiefsten Punktes der Kettenlinie bestimmt ist.

Bezeichnet man die Spannung im Punkte (x, z) durch t, so ist, weil die horizontale Componente dieser Spannung überall gleich X_1 ist,

$$t \sin\Theta = X_1,$$

folglich

$$t = \frac{X_1}{\sin\Theta} = X_1\sqrt{1 + \operatorname{cotang}^2\Theta},$$

und weil

$$s = \frac{X_1}{k}\operatorname{cotang}\Theta,$$

oder

$$t = \sqrt{X_1^2 + k^2 s^2}.$$

Die verticale Componente der Spannung ist alsdann, was auch aus dem §. 29 hervorgeht, gleich ks, d. h. gleich dem Gewicht der Schnur vom Punkte (x, z) bis zum niedrigsten Punkte. Es ist ferner

$$z = \frac{X_1}{k}\left(\frac{1}{\sin\Theta} - 1\right),$$

daher

$$kz + X_1 = \frac{X_1}{\sin\Theta}$$

und

$$t = kz + X_1,$$

wodurch die Spannung in jedem Punkte am einfachsten ausgedrückt ist.

Bezeichnet man den Krümmungshalbmesser der Kettenlinie im Punkte (x, z) durch R, so ist, wie bekannt

$$R = \frac{-[1 + (d_z x)^2]^{\frac{3}{2}}}{d_z^2 x} = -\frac{(d_z s)^3}{d_z^2 x}.$$

Es ist aber bei der Kettenlinie

$$s = \frac{X_1}{k}\operatorname{cotang}\Theta = \frac{X_1}{k d_z x},$$

daher

$$s\, d_z x = \frac{X_1}{k},$$

und durch Differentiation

$$d_z s \,.\, d_z x + s d_z^2 x = o,$$

oder, wenn der Werth von s substituirt wird,

$$d_z s \,.\, (d_z x)^2 + \frac{X_1}{k} \cdot d_z^2 x = o.$$

Es ist aber

$$d_z x = d_z s \,.\, \sin \Theta,$$

daher

$$t d_z x = d_z s \,.\, t \,.\, \sin \Theta = X_1 d_z s,$$

$$d_z x = \frac{X_1}{t} d_z s.$$

Dieser Werth von $d_z x$ substituirt, giebt

$$\frac{X_1^2}{t^2} (d_z s)^3 + \frac{X_1}{k} d_z^2 x = o,$$

oder

$$-\frac{(d_z s)^3}{d_z^2 x} = \frac{t^2}{k X_1},$$

und folglich der Krümmungshalbmesser der Kettenlinie

$$R = \frac{t^2}{k X_1} = \frac{X_1}{k \sin^2 \Theta}.$$

Im tiefsten Punkte der Kettenlinie ist $\Theta = \frac{\pi}{2}$, daher

$$R = \frac{X_1}{k}.$$

Die horizontale Spannung der Kettenlinie ist nun das Gewicht eines Theils der Kette, deren Länge gleich dem Krümmungshalbmesser des tiefsten Punktes ist.

Wir haben vorher gefunden

$$z = -\frac{X_1}{k} + \tfrac{1}{2} \frac{X_1}{k} \left(e^{\frac{kx}{X_1}} + e^{-\frac{kx}{X_1}} \right).$$

Entwickelt man hier die Exponentialgrössen in Reihen, so erhält man

$$z = -\frac{X_1}{k} + \frac{X_1}{k} \left(1 + \frac{k^2 x^2}{2 X_1^2} + \frac{k^4 x^4}{2.3.4. X_1^4} + \ldots \right)$$

$$= \frac{X_1}{k} \left(\frac{k^2 x^2}{2 X_1^2} + \frac{k^4 x^4}{2.3.4. X_1^4} + \ldots \right).$$

Für sehr kleine Werthe von z, d. h. in der Nähe des Scheitels, wird alsdann

$$x^2 = 2\frac{X_1}{k}\cdot z,$$

oder in der Nähe des Scheitels nähert sich die Kettenlinie einer Parabel, deren halber Parameter gleich $\frac{X_1}{k}$ ist.

§. 31.

Wir werden jetzt die Theorie des Gleichgewichts einer Kette untersuchen, wenn sie durch dicht an einander gereihete Hängestangen mit einer horizontalen Brücke verbunden ist. Eine solche Brücke wird eine Kettenbrücke genannt. Gewöhnlich kann man das Gewicht der Kette und der Hängestangen ganz ausser Acht lassen und hat nur das Gewicht der Brücke in Betracht zu ziehen.

Bezeichnet man durch k das Gewicht einer Längeneinheit der Brücke, so wird im §. 29

$$r_s = ds,\ Z_s = kdx,\ \gamma_s = \Theta,\ \gamma_{s-1} = \Theta - d\Theta,$$

folglich, wenn man diese Werthe in die Gleichgewichtsgleichung des §. 29

$$X_1 = \frac{Z_s \sin\gamma_{s-1} \sin\gamma_s}{\sin(\gamma_{s-1} - \gamma_s)} = -X_n$$

substituirt,

$$X_1 = -X_n = -\frac{k\sin^2\Theta\,.\,dx}{d\Theta},$$

und hieraus

$$dx = -\frac{X_1}{k}\cdot\frac{d\Theta}{\sin^2\Theta},$$

$$dz = dx\,.\,\text{cotang}\,\Theta = -\frac{X_1}{k}\cdot\frac{d\Theta\,.\,\text{cotang}\,\Theta}{\sin^2\Theta}.$$

Nimmt man den untersten Punkt A (Fig. 9) der Kette, wo $\Theta = \frac{\pi}{2}$, als Anfangspunkt des Coordinatensystems an, und integrirt diese Gleichungen in Bezug auf Θ von $\frac{\pi}{2}$ bis Θ, so wird

$$x = \frac{X_1}{k}\cdot\text{cotang}\,\Theta,\quad z = \frac{X_1}{2k}\cdot\text{cotang}^2\,\Theta,$$

und wenn Θ eliminirt wird,

$$x^2 = \frac{2X_1}{k} \cdot z,$$

was die Gleichung einer Parabel ist. *Die Kette einer Kettenbrücke wird folglich, wenn das Gewicht der Ketten und Hängestangen vernachlässigt wird, eine Parabel werden, deren halber Parameter gleich $\frac{X_1}{k}$ wird.*

Es seien x, z, $-x_1$, z_1 die Coordinaten der beiden Aufhängepunkte, wo $-x$ immer negativ genommen wird, so sind z, z_1 und $x + x_1$ als bekannte Grössen anzunehmen, und man hat dann, um die unbekannten Grössen x, x_1, X_1 zu bestimmen, die drei Gleichungen

$$x^2 = \frac{2X_1}{k} z,$$

$$x_1^2 = \frac{2X_1}{k} z_1,$$

$$x + x_1 = L,$$

wo L die Länge der Brücke unter den beiden Aufhängepunkten bezeichnet. Hieraus findet man

$$\frac{x}{x_1} = \sqrt{\frac{z}{z_1}},$$

$$x = \frac{L\sqrt{z}}{\sqrt{z} + \sqrt{z_1}}, \quad x_1 = \frac{L\sqrt{z_1}}{\sqrt{z} + \sqrt{z_1}},$$

$$X_1 = \frac{kL^2}{2(\sqrt{z} + \sqrt{z_1})^2},$$

$$x^2 = \frac{L^2}{(\sqrt{z} + \sqrt{z_1})^2} \cdot z, \quad z = \left[\frac{x(\sqrt{z} + \sqrt{z_1})}{L}\right]^2,$$

durch welche Gleichungen die Längen der Hängestangen, die Lage des tiefsten Punktes der Kette und die horizontale Componente der Spannung der Kette bestimmt sind.

Die Spannung im Punkte (x, z) wird durch die Gleichung

$$t = \frac{X_1}{\sin \Theta} = X_1 \sqrt{1 + \text{cotang}^2 \Theta} = \sqrt{X_1^2 + k^2 x^2}$$

bestimmt. Die verticale Componente der Spannung wird nun, wie auch voraus bekannt war, dem Gewicht der zwischen dem Punkte (x, z) und dem tiefsten Punkte der Kette hangende Theil der Brücke gleich sein.

§. 32.

Wir werden jetzt zu den allgemeinen Formeln der §§. 27 und 28, welche die Bedingungen des Gleichgewichts eines von beliebigen Kräften angegriffenen Seilpolygons bezeichnen, zurückkehren und diese auf den Fall anwenden, dass alle Kräfte $P_2, P_3, \ldots P_{n-1}$ die entsprechenden Polygonwinkel halbiren.

Weil in jedem Punkte (x_s, y_s, z_s) die Kraft P_s die Resultante der beiden Spannungen t_{s-1} und t_s ist, so wird, wenn die Kraft P_s mit beiden gleiche Winkel bildet

$$t_s = t_{s-1}.$$

Die Spannung wird nun überall im Polygon gleich sein, und gleich der auf den beiden Endpunkten wirkenden gleich grossen Kräfte P_1 und P_n.

Bezeichnet man durch u_s den Polygonwinkel im Punkte (x_s, y_s, z_s), so wird ferner, weil P_s die Resultante von t_s und t_{s-1} ist,

$$P_s : \sin u = t_s : \sin \tfrac{1}{2} u,$$

daher

$$P_s = \frac{t_s \cdot \sin u}{\sin \frac{1}{2} u} = 2 t_s \cos \tfrac{1}{2} u.$$

Sind die Seiten r_s und r_{s-1} einander gleich, und bezeichnet man durch R_s den Halbmesser des Kreises, welcher durch den Punkt (x_s, y_s, z_s) und die auf jeder Seite nächsten Punkte des Polygons sich beschreiben lässt, so ist

$$r_s = 2 R_s \cos \tfrac{1}{2} u,$$

folglich

$$P_s = \frac{t_s \cdot r_s}{R} = \frac{P_1 r_s}{R_s}.$$

§. 33.

Sind die Verbindungspunkte des in den §§. 27, 28 und 29 behandelten Polygons noch dazu genöthigt, sich auf einer gegebenen Fläche, deren Gleichung $U = o$ ist, zu befinden, so hat man folglich noch die Verbindungsgleichung $U = o$. In den vorigen Gleichungen des Gleichgewichts wird man nun zu den Werthen von

X_s, Y_s, Z_s noch respective die Grössen $a_n d_{x_s} U$, $a_n d_{y_s} U$, $a_n d_{z_s} U$ hinzufügen, oder, was dasselbe ist, statt X_s, Y_s, Z_s respective $X_s - a_n d_{x_s} U$, $Y_s - a_n d_{y_s} U$, $Z_s - a_n d_{z_s} U$ setzen müssen. Ausser den Spannungen in den Seiten des Polygons, welche dieselben Werthe wie vorher erhalten, wird noch in jedem Punkte x_s, y_s, z_s ein auf der Fläche $U = o$ normaler Druck stattfinden. Bezeichnet man diesen Druck durch N_s, so ist

$$N_s = a_n \sqrt{[(d_{x_s} U)^2 + (d_{y_s} U)^2 + (d_{z_s} U)^2]}.$$

Wenn man durch λ_s, μ_s, ν_s die Winkel bezeichnet, welche die Normale mit den Coordinataxen bildet, folglich

$$\cos \lambda_s = \frac{d_{x_s} U}{\sqrt{[(d_{x_s} U)^2 + (d_{y_s} U)^2 + (d_{z_s} U)^2]}},$$

$$\cos \mu_s = \frac{d_{y_s} U}{\sqrt{[(d_{x_s} U)^2 + (d_{y_s} U)^2 + (d_{z_s} U)^2]}},$$

$$\cos \nu_s = \frac{d_{z_s} U}{\sqrt{[(d_{x_s} U)^2 + (d_{y_s} U)^2 + (d_{z_s} U)^2]}},$$

so wird

$$a_n d_{x_s} U = N_s \cos \lambda_s, \quad a_n d_{y_s} U = N_s \cos \mu_s, \quad a_n d_{z_s} U = N_s \cos \nu_s.$$

In die Gleichungen der §§. 27, 28, 29 muss man nun statt X_s, Y_s, Z_s die Grössen $X_s - N_s \cos \lambda_s$, $Y_s - N_s \cos \mu_s$, $Z_s - N_s \cos \nu_s$ setzen.

Dasselbe gilt von den Gleichungen einer schweren Schnur, welche in den §§. 30, 31, 32 entwickelt worden sind, wenn diese Schnur auf der Oberfläche $U = o$ zu bleiben genöthigt ist.

Werden diese Substitutionen ausgeführt, so erhält man aus den Gleichungen des §. 28 die folgenden

$$X_1 - N_1 \cos \lambda_1 = t_1 \cos \alpha_1,$$

$$X_2 - N_2 \cos \lambda_2 = -t_1 \cos \alpha_1 + t_2 \cos \alpha_2,$$

$$X_3 - N_3 \cos \lambda_3 = -t_2 \cos \alpha_2 + t_3 \cos \alpha_3,$$

. .

$$X_n - N_n \cos\lambda_n = -t_{n-1}\cos\alpha_{n-1},$$
$$Y_1 - N_1 \cos\mu_1 = t_1\cos\beta_1,$$
$$Y_2 - N_2 \cos\mu_2 = -t_1\cos\beta_1 + t_2\cos\beta_2,$$
$$Y_3 - N_3 \cos\mu_3 = -t_2\cos\beta_2 + t_3\cos\beta_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$Y_n - N_n \cos\mu_n = -t_{n-1}\cos\beta_{n-1},$$
$$Z_1 - N_1 \cos\nu_1 = t_1\cos\gamma_1,$$
$$Z_2 - N_2 \cos\nu_2 = -t_1\cos\gamma_1 + t_2\cos\gamma_2,$$
$$Z_3 - N_3 \cos\nu_3 = -t_2\cos\gamma_2 + t_3\cos\gamma_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$Z_n - N_n \cos\alpha_n = -t_{n-1}\cos\gamma_{n-1}.$$

Hieraus erhält man wieder

$$t_s\cos\alpha_s = (X_1 + X_2 + \dots + X_s) - (N_1\cos\lambda_1 + N_2\cos\lambda_2 + \dots + N_s\cos\lambda_s),$$
$$t_s\cos\beta_s = (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_s) - (N_1\cos\mu_1 + N_2\cos\mu_2 + \dots + N_s\cos\mu_s),$$
$$t_s\cos\gamma_s = (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_s) - (N_1\cos\nu_1 + N_2\cos\nu_2 + \dots + N_s\cos\nu_s).$$

§. 34.

Um die Bedingungen des Gleichgewichts einer auf einer gegebenen Fläche ruhenden Kettenlinie zu finden, muss man in diesen Gleichungen, wenn man durch k das Gewicht einer Längeneinheit der Linie bezeichnet, setzen

$$X_s = o,\quad Y_s = o,\quad Z_s = kds,$$
$$\cos\alpha_s = d_s x,\quad \cos\beta_s = d_s y,\quad \cos\gamma_s = d_s z,$$
$$N_s = Nds,$$

wo N der auf eine Längeneinheit der Linie stattfindende Druck ist, wenn dieser überall dem im Punkte (x, y, z) stattfindenden gleich wäre. Die Gleichungen des vorigen Paragraphen geben dann

$$t d_s x = X_1 - \int N\cos\lambda ds,$$
$$t d_s y = Y_1 - \int N\cos\mu ds,$$
$$t d_s z = Z_1 + k\int ds - \int N\cos\nu ds,$$

$$X_{\iota} = t_{\iota} d_{s_{\iota}} x_{\iota},$$
$$Y_{\iota} = t_{\iota} d_{s_{\iota}} y_{\iota},$$
$$Z_{\iota} = t_{\iota} d_{s_{\iota}} z_{\iota},$$
$$X_{\iota} + X_{\shortparallel} - \int N \cos \lambda ds = o,$$
$$Y_{\iota} + Y_{\shortparallel} - \int N \cos \mu ds = o,$$
$$Z_{\iota} + Z_{\shortparallel} - \int N \cos \nu ds = o.$$

Aus den drei ersten dieser Gleichungen erhält man, wenn man in Bezug auf s differentiirt,

$$d_s t \,.\, d_s x + t d_s^2 x = \quad - N \cos \lambda,$$
$$d_s t \,.\, d_s y + t d_s^2 y = \quad - N \cos \mu,$$
$$d_s t \,.\, d_s z + t d_s^2 z = k - N \cos \nu.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $d_s x$, $d_s y$, $d_s z$, addirt sie dann und bemerkt, dass, weil

$$(d_s x)^2 + (d_s y)^2 + (d_s z)^2 = 1,$$
$$d_s x \,.\, d_s^2 x + d_s y \,.\, d_s^2 y + d_s z \,.\, d_s^2 z = o,$$

so erhält man

$$d_s t = k d_s z - N(\cos \lambda d_s x + \cos \mu d_s y + \cos \nu d_s z).$$

Es ist aber, weil λ, μ, ν die Richtung der Normale angeben,

$$\cos \lambda d_s x + \cos \mu d_s y + \cos \nu d_s z = o,$$

daher

$$d_s t = k_s dz.$$

Wählt man den Anfangspunkt der Coordinaten in einem Punkte der Kettenlinie, wo diese Tangente horizontal ist, und bezeichnet die Tension in diesem Punkte durch t_0, so erhält man durch Integration

$$t = kz + t_0.$$

§. 35.

Ist die Schnur ohne Schwere und über eine krumme Fläche gespannt, und diese so geformt, dass die Schnur überall der Fläche folgen kann, so wird in den Gleichungen des vorigen Paragraphen $k = o$. Man erhält alsdann

$$t = t_0,$$

d. h. die Spannung ist überall constant. Ferner erhält man, weil

$$(d_s x)^2 + (d_s y)^2 + (d_s z)^2 = 1,$$

$$t = \sqrt{X_{\iota}^2 + Y_{\iota}^2 + Z_{\iota}^2},$$

und, weil $d_s t = o$,

$$t d_s^2 x + N \cos \lambda = o,$$

$$t d_s^2 y + N \cos \mu = o,$$

$$t d_s^2 z + N \cos \nu = o.$$

Hieraus erhält man dann wieder

$$\frac{d_s^2 x}{\cos \lambda} = \frac{d_s^2 y}{\cos \mu} = \frac{d_s^2 z}{\cos \nu},$$

d. h. der Krümmungshalbmesser der Kurve fällt mit der Normale der Fläche zusammen. Man erhält ferner, weil $\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1$,

$$t^2[(d_s^2 x)^2 + (d_s^2 y)^2 + (d_s^2 z)^2] = N^2.$$

Bezeichnet man durch R den Krümmungshalbmesser der Kurve, so ist

$$R^2 = \frac{1}{(d_s^2 x)^2 + (d_s^2 y)^2 + (d_s^2 z)^2},$$

daher

$$N = \frac{t}{R},$$

oder der normale Druck ist der Krümmung $\frac{1}{R}$ proportional, welches mit dem §. 32 übereinstimmt.

Cap. V.

Reduction der Kräfte.

§. 36.

Wenn mehrere Kräfte auf verschiedene Punkte eines Systems wirken und nicht im Gleichgewicht sind, kann man, um sie in jedem Augenblick zu den wenigst möglichen Kräften zu reduciren, das System in diesem Augenblick als fest betrachten.

Die Bedingungen des Gleichgewichts eines festen Körpers waren nach §. 23

$$\Sigma X = o, \quad \Sigma Y = o, \quad \Sigma Z = o,$$

$$\Sigma(Yz - Zy) = o, \quad \Sigma(Zx - Xz) = o, \quad \Sigma(Xy - Yx) = o.$$

Nehmen wir jetzt an, diese Gleichungen finden nicht statt, folglich auch nicht das Gleichgewicht, so kann dieses augenscheinlich immer hergestellt werden, wenn man drei neue Kräfte von unbestimmter Grösse und Richtung hinzufügt. Man hat alsdann 6 Gleichungen und 12 willkürliche Grössen, nämlich die sechs Componenten der beiden Kräfte und die sechs Coordinaten ihrer Angriffspunkte, wovon sechs immer so bestimmt werden können, dass sie den sechs obigen Gleichungen genügen. Es wird alsdann Gleichgewicht stattfinden, und die gegebenen Kräfte können nun zu zwei jenen Kräften gleiche, aber entgegengesetzten Kräften reducirt werden. Von den sechs Coordinaten der Angriffspunkte beider Kräfte muss bei jedem Punkte die eine unbestimmt verbleiben, weil der Angriffspunkt einer Kraft willkürlich in der Richtung der Kraft gewählt werden kann.

Unter gewissen Umständen kann auch eine neue Kraft zureichen, um Gleichgewicht hervorzubringen, und alle die gegebenen Kräfte haben dann eine dieser Kraft gleiche, aber entgegengesetzte Resultantkraft.

Wir werden diesen letzten Fall zuerst untersuchen. Es sei die Resultante aller Kräfte R, ihre Componenten X, Y, Z und die Coordinaten eines Punktes in ihrer Richtung, welcher als der Angriffspunkt angesehen werden kann, x, y, z, so wird eine in diesem Punkte wirkende Kraft $-$R, deren Componenten $-X$, $-Y$, $-Z$ sind, die gegebenen Kräfte in Gleichgewicht halten, und man hat alsdann die Gleichungen

$$\Sigma \mathrm{X} - X = 0,$$
$$\Sigma \mathrm{Y} - Y = 0,$$
$$\Sigma \mathrm{Z} - Z = 0,$$
$$\Sigma(\mathrm{Yz} - \mathrm{Zy}) - (Yz - Zy) = 0,$$
$$\Sigma(\mathrm{Zx} - \mathrm{Xz}) - (Zx - Xz) = 0,$$
$$\Sigma(\mathrm{Xy} - \mathrm{Yx}) - (Xy - Yx) = 0.$$

Eliminirt man zwischen den drei letzten Gleichungen die Coordinaten x, y, z, so erhält man

$$X\Sigma(Yz - Zy) + Y\Sigma(Zx - Xz) + Z\Sigma(Xy - Yx) = o,$$

oder, wenn man die Werthe von X, Y, Z aus den drei ersten Gleichungen substituirt,

$$\Sigma X . \Sigma(Yz - Zy) + \Sigma Y . \Sigma(Zx - Xz) + \Sigma Z . \Sigma(Xy - Yx) = o.$$

Dieses ist dann die Bedingungsgleichung, welche zwischen den gegebenen Grössen stattfinden muss, wenn die Kräfte Gleichgewicht haben sollen. Die Grösse und Neigung dieser Resultante ist dann durch die Gleichung

$$X = \Sigma X, \quad Y = \Sigma Y, \quad Z = \Sigma Z$$

bestimmt; um ihre Richtung zu finden, kann man die Lage der Punkte suchen, in welchen sie die drei Coordinatenebenen schneidet. Im Durchschnittspunkte mit der xy Ebene ist $z = o$, und daher

$$x = \frac{\Sigma(Zx - Xz)}{\Sigma Z}, \quad y = -\frac{\Sigma(Yz - Zy)}{\Sigma Z},$$

im Durchschnittspunkte mit der xz Ebene ist $y = o$, und

$$x = -\frac{\Sigma(Xy - Yx)}{\Sigma Y}, \quad z = \frac{\Sigma(Yz - Zy)}{\Sigma Y},$$

im Durchschnittspunkte mit der yz Ebene ist $x = o$, und

$$y = \frac{\Sigma(Xy - Yx)}{\Sigma X}, \quad z = -\frac{\Sigma(Zx - Xz)}{\Sigma X}.$$

In der Richtung dieser Linie kann alsdann der Angriffspunkt der Resultante R beliebig gewählt werden.

Im Allgemeinen haben die Kräfte eine Resultante, wenn die eben entwickelte Bedingungsgleichung

$$\Sigma X . \Sigma(Yz - Zy) + \Sigma Y . \Sigma(Zx - Xz) + \Sigma Z . \Sigma(Xy - Yx) = o$$

stattfindet, und wir haben gezeigt, wie man alsdann die Grösse und Richtung dieser Resultante finden kann. Diese Regel hat indessen eine Ausnahme, wenn nämlich $\Sigma X = o$, $\Sigma Y = o$, $\Sigma Z = o$. Alsdann wird der obigen Bedingungsgleichung Genüge geleistet, die Kräfte haben aber doch keine Resultante. Es würde nämlich alsdann im Durchschnittspunkte dieser Resultante mit der xy Ebene, weil $\Sigma Z = o$, $x = \infty$, $y = \infty$ werden, d. h. die Resultante würde parallel mit der xy Ebene sein. Ebenso würde sie auch, weil $\Sigma Y = o$, $\Sigma Z = o$,

parallel mit der xz Ebene und yz Ebene sein, was voraussetzt, dass sie unendlich weit von allen Ebenen entfernt ist, d. h. gar nicht existirt.

Die Bedingungsgleichung, dass die Kräfte eine Resultante haben,

$$\Sigma X . \Sigma(Yz - Zy) + \Sigma Y(\Sigma Zx - Xz) + \Sigma Z(\Sigma Xy - Yx) = o,$$

wird immer erfüllt, wenn die Kräfte in einer Ebene liegen. Denn es sei diese die xy Ebene, so werden alle Z und z gleich Null, und daher die obige Gleichung identisch Null. Kräfte in einer Ebene haben folglich immer eine Resultante, wenn nicht zugleich $\Sigma X = o$, $\Sigma Y = o$, $\Sigma Z = o$.

§. 37.

Wenn die Kräfte parallel sind und α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche sie mit den Axen bilden, so wird

$$X = P\cos\alpha, \quad Y = P\cos\beta, \quad Z = P\cos\gamma,$$

$$\Sigma X = \cos\alpha\Sigma P, \quad \Sigma Y = \cos\beta\Sigma P, \quad \Sigma Z = \cos\gamma\Sigma P,$$

also wird die Bedingungsgleichung, dass die Kräfte eine Resultante haben, wenn man mit ΣP dividirt,

$$\cos\alpha\Sigma[P(z\cos\beta - y\cos\gamma)] + \cos\beta\Sigma[P(x\cos\gamma - z\cos\alpha)]$$
$$+ \cos\gamma\Sigma[P(y\cos\alpha - x\cos\beta)] = o,$$

welche Gleichung identisch ist. Parallele Kräfte werden daher immer eine Resultante haben, mit der einzigen Ausnahme, wenn $\Sigma X = o$, $\Sigma Y = o$, $\Sigma Z = o$, oder, was dasselbe wird,

$$\Sigma P = o.$$

In diesem letzten Falle werden die Kräfte keine Resultantenkraft haben können, und sie werden auch nicht im Gleichgewicht sein, wenn nicht zugleich

$$\Sigma P(z\cos\beta - y\cos\gamma) = o, \quad \Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = o,$$
$$\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta) = o.$$

Ist dagegen nicht $\Sigma P = o$, so werden die Kräfte immer eine Resultantenkraft haben. Um die Grösse und Neigung dieser Resultante zu bestimmen, hat man die Gleichungen

$$X = \cos\alpha\Sigma P,$$
$$Y = \cos\beta\Sigma P,$$
$$Z = \cos\gamma\Sigma P.$$

Die Resultante R wird daher gleich ΣP und parallel mit den parallelen Kräften sein. Die Lage der Resultante wird durch die drei Gleichungen

$$\cos\beta\Sigma Pz - \cos\gamma\Sigma Py = (\cos\beta\, z - \cos\gamma\, y)\Sigma P,$$
$$\cos\gamma\Sigma Px - \cos\alpha\Sigma Pz = (\cos\gamma\, x - \cos\gamma\, z)\Sigma P,$$
$$\cos\alpha\Sigma Py - \cos\beta\Sigma Px = (\cos\alpha\, y - \cos\beta\, x)\Sigma P,$$

bestimmt, unter welchen Gleichungen die eine von den beiden andern abhängig ist. Man kann hier x einen beliebigen Werth geben und dann die entsprechenden Werthe von y und z finden. Setzt man

$$x = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P},$$

so wird

$$y = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P},$$
$$z = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P},$$

und die Lage dieses Punktes der Resultante ist dann von der Richtung der Kräfte unabhängig.

§. 38.

Sind der parallelen Kräfte nur zwei, P_1 und P_2, so wird

$$x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2},$$
$$y = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2}{P_1 + P_2},$$
$$z = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2}{P_1 + P_2}.$$

Nimmt man den einen Wirkepunkt A (Fig. 10) zum Anfangspunkt des Coordinatensystems und die Linie AB zwischen beiden Wirkepunkten als x Axe an, so wird

$$x_1 = y_1 = z_1 = y_2 = z_2 = o, \quad x_2 = AB, \quad x = AC,$$

daher

$$y = z = o,$$
$$AC = \frac{P_2 . AB}{P_1 + P_2} = \frac{P_2 . AB}{R},$$

oder

$$P_2 : AC = P_1 : BC = R : AB,$$

d. h. *die Resultante zweier parallelen Kräfte theilt die gerade Linie zwischen beiden Wirkepunkten so, dass jede der drei Kräfte, die beiden gegebenen und die Resultante, proportional mit dem zwischen den beiden andern Kräften liegenden Theil der geraden Linie ist.*

Sind die Kräfte gleich, $P_1 = P_2$, so wird $AC = CB$, oder die Resultante fällt in die Mitte zwischen beiden Kräften.

Ist eine der Kräfte, z. B. P_1 negativ (Fig. 11), so wird jene Proportion noch bestehen. Der Wirkepunkt der Resultante wird nun in die Verlängerung der Linie AB zur Seite der grössern Kraft, in der Figur P_2, fallen, und die Resultante gleich dem Unterschied beider Kräfte sein, und in demselben Sinne wie die grössere Kraft P_2 wirken.

Sind beide Kräfte P_1 und P_2 gleich, wirken aber im entgegengesetzten Sinne und in verschiedenen Punkten, so ist $\Sigma P = o$, und sie haben dann keine Resultante und sind auch nicht im Gleichgewicht. Sie können folglich alsdann nicht weiter reducirt werden.

Dass beide Kräfte in diesem Falle keine Resultante haben können, daher auch nicht durch eine einzige Kraft im Gleichgewicht zu halten sind, kann auch auf die folgende indirecte Weise bewiesen werden. Es seien P und $-P$ (Fig. 12) zwei gleiche, parallele, im entgegengesetzten Sinne wirkende Kräfte. Nähme man an, sie würden durch irgend eine Kraft S im Gleichgewicht gehalten, so kann man immer auf der entgegengesetzten Seite von AB eine Kraft T annehmen, so dass $T = S$, $T \mp S$ und $AD = BE$. Alsdann wäre die Figur (P, $-P$, S) vollkommen congruent mit der Figur ($-P$, P, T), und folglich, wenn die Kräfte P, $-P$, S im Gleichgewicht wären, müssten auch die Kräfte $-P$, P und T im Gleichgewicht sein. Bringt man jetzt in D eine der T entgegengesetzte und gleiche Kraft U an, so werden T und U im Gleichgewicht sein; es sind aber S, $-P$, P im Gleichgewicht, daher würden auch die fünf Kräfte S, $-P$, P, T, U im Gleichgewicht sein, und weil $-P$, P, T im Gleichgewicht sind, müssten auch S und U im Gleichgewicht unter einander sein. Dies

ist aber unmöglich, weil S und U parallel sind und in demselben Sinne wirken, folglich eine Resultante in diesem Sinne haben. Es ist daher auch unmöglich, dass zwei parallele im entgegengesetzten Sinne und auf verschiedene Punkte wirkende Kräfte durch irgend eine Kraft im Gleichgewicht gehalten werden können, und sie können alsdann auch keine Resultante haben.

Zwei solche Kräfte, welche nicht durch irgend eine Kraft ersetzt werden können, wird ein Kräftepaar oder auch schlechthin ein Paar genannt.

§. 39.

Ehe wir weiter die Reduction beliebiger Kräfte, welche auf einen festen Körper wirken, untersuchen, werden wir erst die Theorie der Kräftepaare genauer entwickeln.

Es sei (Fig. 13) (P, — P) ein Kräftepaar, so wird die Linie AB zwischen den Angriffspunkten der beiden Kräfte der Arm des Paares, der senkrechte Abstand beider parallelen Kräfte AC die Breite des Paares genannt. Da man den Angriffspunkt der Kraft — P in ihrer Richtung beliebig verlegen kann, so kann man C als ihren Angriffspunkt annehmen und die Breite wird alsdann auch der Arm des Paares. Das Paar wird alsdann rechtwinklig genannt. Die durch den Arm und beide Kräfte gehende Ebene wird die Ebene des Paares genannt.

Ein Kräftepaar kann in seiner Ebene oder in einer mit dieser parallelen Ebene beliebig versetzt werden, wenn es nur immer den Arm nach derselben Seite zu drehen strebt und die neuen Angriffspunkte mit den vorigen fest verbunden sind.

Um diesen Satz, welcher in Bezug auf die Kräftepaare das nämlich ist, was für eine einzelne Kraft die willkürliche Verlegung des Angriffspunktes in der Richtungslinie der Kraft ist, zu beweisen, kann man ihn erst für den Fall beweisen, dass der neue Arm mit dem vorigen parallel ist, und dann, dass das eine Kräftepaar in seiner Ebene um den Mittelpunkt des Armes beliebig gedreht werden kann.

Um den ersten Satz zu beweisen, sei (Fig. 14) (P, — P) am

Arme AB das gegebene Kräftepaar, (Q, — Q) am Arme CD das neue Kräftepaar, AB = und ∦ CD, P = und ∦ Q, und AB und CD fest verbunden. Man ziehe die Linien BC und AD, so werden die Dreiecke ABE und DCE congruent sein, und folglich wird der Punkt E der gemeinschaftliche Mittelpunkt beider Linien AD und BC. In den Punkten C und D füge man noch die Kräfte S, — S hinzu, welche den Kräften — Q, Q respective gleich, aber entgegengesetzt sind. Die Kräfte Q, — Q, S, — S werden dann einander im Gleichgewicht halten. Statt des Paares (P, — P) kann man nun die sechs Kräfte P, — P, Q, — Q, S, — S setzen. Die Kräfte P und S sind jetzt gleich und wirken in derselben Richtung auf die Enden der geraden Linie AD, sie werden daher eine Resultante R = 2P in der Mitte E der Linie AD wirkend haben. Ebenso werden die Kräfte — P und — S eine im Punkte E wirkende Resultante — R haben. Diese beiden Kräfte R und — R heben einander aber auf, und die vier Kräfte P, — P, S, — S halten folglich einander im Gleichgewicht. Statt der sechs Kräfte P, — P, Q, — Q, S, — S können also die zwei Q, — Q gesetzt werden, und es kann daher auch statt des Kräftepaares (P, — P) das neue Kräftepaar (Q, — Q) gesetzt werden, w. z. b. w.

Um den zweiten Satz, dass ein Kräftepaar in seiner Ebene um den Mittelpunkt des Armes beliebig gedreht werden kann, zu beweisen, sei (Fig. 15) (P, — P) am Arme AB das gegebene Kräftepaar, (Q, — Q) am Arme CD das neue, und P = Q, AB = CD, G der gemeinschaftliche Mittelpunkt der beiden Arme. In den Punkten C und D füge man noch die Kräfte S, — S hinzu, welche den Kräften — Q und Q respective gleich, aber entgegengesetzt sind. Statt des Paares (P, — P) kann man dann die sechs Kräfte P, — P, Q, — Q, S, — S setzen. Die Verlängerungen der Kräfte — S und P werden einander in einem Punkt E schneiden, welcher folglich als ihr gemeinschaftlicher Angriffspunkt angesehen werden kann; die Verlängerungen der Kräfte S und — P werden einander ebenfalls in einem Punkte F schneiden, welcher gleichfalls als ihr gemein-

schaftlicher Angriffspunkt angesehen werden kann. Weil die Dreiecke DEG und AEG congruent sind, wird die Linie EG den Winkel DEA halbiren, und da die Kräfte — S und P gleich sind, wird ihre Resultante längs der Linie FG fallen; ebenso findet man, dass die Resultante von P und — S längs der Linie FG fallen wird. Diese beiden Resultanten werden ferner auch gleich sein, und die Linien EG und GF, welche ihre Richtungen angeben, eine gerade Linie bilden, weil sie die Scheitelwinkel DGA und BGC respective halbiren. Jene Resultanten und die vier Kräfte P, — P, S, — S werden einander im Gleichgewicht halten. Statt der sechs Kräfte P, — P, Q, — Q, S, — S kann man die zwei Q, — Q setzen, und es kann daher auch statt des gegebenen Kräftepaars (P, — P) das neue (Q, — Q) gesetzt werden.

Aus diesen beiden Sätzen folgt dann unmittelbar der Hauptsatz dieses Paragraphen, dass ein Kräftepaar in seiner Ebene oder in parallelen Ebenen beliebig verschoben werden kann.

§. 40.

Das Product aus der Breite eines Kräftepaares in die Intensität einer der Seitenkräfte wird das Moment des Paares genannt.

Zwei Paare von gleichen Momenten, welche in derselben oder in parallelen Ebenen in entgegengesetztem Sinne wirken, halten einander im Gleichgewicht.

Es sei (Fig. 16) (P, — P) das eine Paar, AB seine Breite, (Q, — Q) das zweite in entgegengesetzter Richtung wirkende Paar, welches so versetzt werden kann, dass seine Breite BC die Verlängerung derjenigen des erstern Paares bildet. Nach der Annahme ist $P.AB = Q.BC$. Es werden alsdann die Kräfte — P und — Q zu einer Kraft $-R = -(P+Q)$ in B wirkend zusammengesetzt werden können, und die zwei Kräfte P und Q zu einer Kraft $R = (P+Q)$, welche auch in B wirken wird, weil wegen $P.AB = Q.BC$, $P:BC = Q:AB$ ist. Die Kräfte R und — R heben aber einander auf, und die Kräftepaare (P, — P) und (Q, — Q) sind folglich im Gleichgewicht.

Zwei Kräftepaare von gleichen Momenten, welche in derselben oder in parallelen Ebenen und im gleichen Sinne wirken, können statt einander gesetzt werden und sind folglich gleichgeltend.

Denn es seien (Fig. 17) (P, — P) und (S, — S) die beiden Kräftepaare, und man bringe in C und D die Kräfte — Q und Q an, welche S und — S gleich und respective entgegengesetzt sind, so werden (Q, — Q) und (S, — S) einander im Gleichgewicht halten. Es halten aber wegen des vorhergehenden Satzes auch (P, — P) und (Q, — Q) einander im Gleichgewicht; die Kräftepaare (P, — P) und (S, — S) sind deshalb gleichgeltend.

§. 41.

Wenn die Breiten beider Kräftepaare gleich sind, so sind ihre Wirkungen den Seitenkräften proportional.

Es seien (Fig. 18) (P, — P) am rechtwinkligen Arme AB und (Q, — Q) am rechtwinkligen Arme CD, wo CD = AB, die beiden gegebenen Paare; es soll nun bewiesen werden, dass

$$(P, -P):(Q, -Q) = P:Q.$$

Wir werden diesen Satz erst für den Fall beweisen, dass die Kräfte P und Q commensurabel sind. Es sei alsdann p ihr gemeinschaftliches Maass, und $P = m \times p$,

$$Q = r \times p,$$

so wird $P:Q = m:r.$

Die Kraft P kann jetzt in m Kräfte, jede gleich p und in A angebracht, zerlegt werden; ebenso kann — P in m Kräfte, jede gleich — p und in B angebracht, zerlegt werden, und das Paar (P, — P) ist dadurch in m Kräftepaare, jedes gleich (p, — p), zerlegt. Es ist daher

$$(P, -P) = m \times (p, -p).$$

Ebenso wird das Paar (Q, — Q) in r Kräftepaare, jedes gleich (p, — p) zerlegt, folglich

$$(Q, -Q) = r \times (p, -p).$$

Es wird alsdann $(P, -P):(Q, -Q) = m:r,$

daher auch $(P, -P):(Q, -Q) = P:Q,$ w. z. b. w.

Es seien jetzt P und Q incommensurabel. Der Beweis wird dann indirect ganz auf die Weise wie die in der elementaren Mathematik häufig vorkommenden analogen Beweise geführt werden können.

Aus diesem und dem vorhergehenden Satz folgt dann der folgende: *Die Kräftepaare sind ihren Momenten proportional.*

Denn es seien (Fig. 19) (P, — P) am rechtwinkligen Arme AB und (Q, — Q) am rechtwinkligen Arme CD die gegebenen Kräftepaare, so kann man ein drittes rechtwinkliges Paar (R, — R) am Arme EF construiren, so dass $EF = AB$ und $R.EF = Q.CD$, daher $(Q, -Q) = (R, -R)$. Es ist alsdann

$$(P, -P):(R, -R) = P:R = P.AB:R.AB,$$

$$(R, -R) = (Q, -Q), \quad R.AB = R.EF = Q.CD,$$

folglich $(P, -P):(Q, -Q) = P.AB:Q.CD$, w. z. b. w.

§. 42.

Die Kräftepaare lassen sich durch Linien ebenso darstellen wie einzelne Kräfte. Errichtet man nämlich auf der Ebene eines Paares ein seinem Moment proportionales Loth, welches die **Axe des Kräftepaares** heisse, so wird diese Axe durch ihre Richtung die Richtung der Ebene und durch ihre Grösse das Moment des Kräftepaares bezeichnen. Wird ferner angenommen, dass die Drehung, welche ein Paar zu bewirken strebt, einem in dem Endpunkte der Axe befindlichen, nach einem der Angriffspunkte hinblickenden Auge immer in demselben Sinne, etwa von der Linken zur Rechten, fortgehend erscheinen soll, so ist durch die Axe auch der Sinn des Kräftepaares gehörig dargestellt. Ein Kräftepaar wird dann wie eine einzelne Kraft durch einen im Endpunkte der Axe geschriebenen Buchstaben bezeichnet.

Sind mehrere Kräftepaare gegeben, so können alle ihre Ebenen parallel mit ihren ursprünglichen Stellungen durch einen gemeinschaftlichen Punkt gelegt werden, welcher dann zum gemeinschaftlichen Anfangspunkt aller Axen angenommen werden kann. Die Kräftepaare werden alsdann genau nach denselben Regeln wie die Kräfte zusammengesetzt, indem man beweisen kann, dass

die Axe des Resultantenpaares zweier gegebenen Kräftepaare die Diagonale des von den Axen beider Paare gebildeten Parallelogramms ist.

Um diesen Satz zu beweisen, verändere man erst nach §. 40 das eine Kräftepaar, so dass beide gleiche Breiten bekommen, und versetze dann beide in ihre respectiven Ebenen, so dass ihre rechtwinkligen Arme in den Durchschnittslinien beider Ebenen einander decken. Es sei alsdann (Fig. 20) AB der gemeinschaftliche Arm, (P, — P) das eine Kräftepaar und AL seine Axe, (Q, — Q) das zweite Kräftepaar und AM seine Axe, folglich

$$AL \perp AP, \quad AL \perp AB,$$
$$AM \perp AQ, \quad AM \perp AB,$$

so wird R die Resultante der beiden Kräfte P und Q, — R die Resultante der beiden Kräfte — P und — Q werden, R gleich und parallel mit — R und senkrecht auf AB. Das Kräftepaar (R, — R) wird alsdann das Resultantenpaar von (P, — P) und (Q, — Q) sein, und weil diese drei Paare einen gemeinschaftlichen Arm haben, werden sie den Kräften proportional sein. Bildet man jetzt das Parallelogramm LM und zieht die Diagonale AG, so wird, weil AL und AM den Momenten der Paare, folglich auch den Kräften P und Q proportional sind,

$$AL : LG = AP : PR,$$

ferner

$$\angle ALG = \angle APR,$$

weil $AL \perp AP$ und $AM \perp AQ$. Es ist daher

$$\triangle ALG \sim \triangle APR,$$
$$\angle LAG = \angle PAR,$$
$$\angle LAG + \angle RAL = \angle PAR + \angle RAL,$$

oder

$$\angle GAR = \angle PAL = R,$$

und folglich $AG \perp AB$; es ist ferner, weil $AB \perp AL$ und $AB \perp AM$, auch $AB \perp AG$. Die Diagonale AG ist die Richtung der Axe des Resultantenpaares; sie ist diesen auch proportional in demselben Verhältnisse wie die zwei anderen Axen ihren Paaren, weil

$$AL : AP = AM : AQ = AG : AB,$$

und weil die Paare ihren Kräften proportional sind. Es ist daher AG die Axe des Resultantenpaares, w. z. b. w.

Die Zusammensetzung zweier Kräftepaare kann auch auf die Weise geschehen, dass man das eine Paar erst nach §. 40 so verändert, dass beide gleiche Kräfte erhalten, und die Paare dann so versetzt, dass zwei ihrer Kräfte zusammenfallen. Es sei (Fig. 21) (P, — P) am Arme AB das eine Paar und (P, — P) am Arme AC das zweite, so wird (P, — P) am Arme AD das Resultantenpaar werden, wo AD die Diagonale des von den Armen AB und AC gebildeten Parallelogramms ist. Fügt man nämlich zu den beiden gegebenen Paaren zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte P, — P in D hinzu, so wird hierdurch nichts geändert. Die Kraft P in D und die Kraft — P in C werden aber alsdann ein Kräftepaar bilden, welches man parallel mit seiner jetzigen Lage nach dem Arme AB versetzen kann, wo es das gegebene Paar (P, — P) am Arme AB aufheben wird. Man behält dann aber nur das Paar (P, — P) am Arme AD übrig, welches folglich das Resultantenpaar wird.

§. 43.

Weil die Theorie der Zusammensetzung und Zerlegung zweier Kräftepaare, wenn diese durch ihre Axen ausgedrückt werden, genau dieselbe ist wie die Theorie der Zusammensetzung und Zerlegung zweier auf einen gemeinschaftlichen Punkt wirkenden Kräfte, so gelten auch die in den §§. 7, 8, 9 und 10 entwickelten Formeln, wenn man statt der Kräfte die Momente der Kräftepaare, und statt der Winkel, welche die Kräfte mit den Coordinataxen bilden, diejenigen setzt, welche die Axen der Kräftepaare mit denselben Coordinataxen bilden.

Bezeichnet man durch G, G′, G″ die Momente mehrerer Kräftepaare, durch λ, μ, ν, λ', μ', ν', ... die Winkel, welche ihre Axen respective mit der x Axe, y Axe, z Axe des Coordinatensystems bilden, durch H das Moment des Resultantenpaares und durch l, m, n die Winkel, welche ihre Axe mit den Coordinataxen einschliessen, so wird

$$H\cos l = G\cos\lambda + G'\cos\lambda' + G''\cos\lambda'' + \ldots = \Sigma G\cos\lambda,$$
$$H\cos m = G\cos\mu + G'\cos\mu' + G''\cos\mu'' + \ldots = \Sigma G\cos\mu,$$
$$H\cos n = G\cos\nu + G'\cos\nu' + G''\cos\nu'' + \ldots = \Sigma G\cos\nu,$$
$$H = \sqrt{(\Sigma G\cos\lambda)^2 + (\Sigma G\cos\mu)^2 + (\Sigma G\cos\nu)^2}.$$

Das Resultantenpaar H wird dann durch diese Formeln in die Seitenpaare $H\cos l$, $H\cos m$, $H\cos n$, deren Axen respective die x Axe, y Axe, z Axe, und deren Ebenen die yz Ebene, xz Ebene und xy Ebene des Coordinatensystems sind, zerlegt werden können.

§. 44.

Es sei $(P, -P)$ ein Kräftepaar, sein Arm r, seine Breite p und sein Moment $Pp = G$. Bezeichnet man durch X, Y, Z die Projectionen der Kraft P, durch x, y, z die Projectionen des Arms q und durch λ, μ, ν die Winkel, welche die Axe des Paares mit den drei Coordinataxen bilden, so ist

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

ferner, weil die Axe des Paares senkrecht auf der Richtung der Kraft P ist,

$$X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu = o,$$

und weil die Axe auch senkrecht auf der Richtung des Armes q ist,

$$x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = o.$$

Aus diesen drei Gleichungen findet man dann

$$\cos\lambda = \frac{Yz - Zy}{\sqrt{(Yz - Zy)^2 + (Zx - Xz)^2 + (Xy - Yx)^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{Zx - Xz}{\sqrt{(Yz - Zy)^2 + (Zx - Xz)^2 + (Xy - Yx)^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{Xy - Yx}{\sqrt{(Yz - Zy)^2 + (Zx - Xz)^2 + (Xy - Yx)^2}},$$

Bezeichnet man jetzt durch φ den Winkel, welchen die Kraft P mit dem Arme q bildet, so wird $\frac{\pi}{2} - \varphi$ der Winkel sein, welchen der Arm q mit der Breite p macht, und

$$p = q\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = q\sin\varphi,$$

$$p^2 = q^2 - q^2\cos^2\varphi.$$

Es wird ferner

$$\cos\varphi = \frac{X}{P}\cdot\frac{x}{q} + \frac{Y}{P}\cdot\frac{y}{q} + \frac{Z}{P}\cdot\frac{z}{q},$$

daher

$$Pq\cos\varphi = Xx + Yy + Zz,$$

und

$$P^2q^2\cos^2\varphi = X^2x^2 + Y^2y^2 + Z^2z^2 + 2YZyz + 2XZxz + 2XYxy.$$

Es ist jetzt

$$(Yz - Zy)^2 + (Zx - Xz)^2 + (Xy - Yx)^2 = X^2(y^2 + z^2)$$
$$+ Y^2(x^2 + z^2) + Z^2(x^2 + y^2) - 2YZyz - 2XZxz - 2XYxy,$$

und folglich

$$(Yz - Zy)^2 + (Zx - Xz)^2 + (Xy - Yx)^2$$
$$= (X^2 + Y^2 + Z^2)(x^2 + y^2 + z^2) - P^2q^2\cos^2\varphi$$
$$= P^2q^2 - P^2q^2\cos^2\varphi = P^2p^2 = G^2,$$

und

$$G = Pp = \sqrt{(Yz - Zy)^2 + (Zx - Xz)^2 + (Xy - Yx)^2}.$$

Dieser Werth in die vorherstehenden Werthe von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ substituirt giebt

$$G\cos\lambda = Yz - Zy,$$
$$G\cos\mu = Zx - Xz,$$
$$G\cos\nu = Xy - Yx,$$

durch welche Gleichungen die Seitenpaare des Kräftepaares $(P, -P)$ ausgedrückt werden.

§. 45.

Um die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen zu zeigen, sei das gegebene Kräftepaar parallel mit seiner ursprünglichen Richtung so versetzt, dass das eine Ende seines Armes im Anfangspunkt des Coordinatensystems fällt. Es sei nun (Fig. 22) $(P, -P)$ am Arme AB das gegebene Kräftepaar; man zerlege die Kraft P in die drei Componenten X, Y, Z und die Kraft $-P$ in $-X$, $-Y$, $-Z$. Aus den drei Coordinaten x, y, z des Punktes B bilde man ein Parallelepipedon. Die Kraft X kann alsdann statt in B in C wirkend angenommen werden, und wird mit $-X$ ein Paar bilden, dessen Arm AC ist. Dieses Paar kann nach §. 42 in die zwei Paare $(X, -X)$ am Arme AD in der xz Coordinatenebene, und in das Paar

(X, — X) am Arme AE in der xy Ebene wirkend, zerlegt werden. Das Moment des ersten Paares wird Xz, und es wird in der xz-Ebene, wenn das Product Xz positiv ist, von der positiven z Axe zur positiven x Axe drehen; wenn Xz negativ ist, in entgegengesetzter Richtung. Das Moment des zweiten Paares wird Xy sein, und es wird in der xy Coordinatenebene von der positiven y Axe zur positiven x Axe drehen, wenn das Product positiv ist; wenn Xy negativ ist, in entgegengesetzter Richtung. Diese Richtungen sind in der Figur bei den in den respectiven Ebenen zugeschriebenen Momenten durch Pfeile angezeigt worden.

Die Kraft Y kann ähnlicher Weise als in F wirkend angenommen werden, und wird dann mit — Y in A ein Paar (Y, — Y) am Arme AF bilden. Dieses Paar kann wieder in zwei Paare (Y, — Y) am Arme AB und (Y, — Y) am Arme AG zerlegt werden. Das Moment des ersten Paares wird Yz, und es wird in der yz Ebene von der positiven z Axe zur positiven y Axe drehen, wenn das Product Yz positiv ist; in entgegengesetzter Richtung, wenn Yz negativ ist. Das Moment des zweiten Paares wird Yx sein, und es wird in der xy Ebene von der positiven x Axe zur positiven y Axe drehen, wenn das Product Yx positiv ist; in entgegengesetzter Richtung, wenn es negativ ist.

Endlich kann die Kraft Z als in H wirkend angenommen werden, und wird alsdann mit — Z in A ein Paar (Z, — Z) am Arme AH bilden. Dieses Paar kann wieder in zwei Paare (Z, — Z) am Arme AG und (Z, — Z) am Arme AE wirkend zerlegt werden. Das Moment des ersten Paares wird Zx sein, und es wird in der xz Coordinatenebene von der positiven x Axe zur positiven z Axe drehen, wenn das Product Zx positiv ist; in entgegengesetzter Richtung, wenn es negativ ist. Das Moment des zweiten Paares wird Zy sein, und es wird in der yz Coordinatenebene von der positiven y Axe zur positiven z Axe drehen, wenn das Product Zy positiv ist; in entgegengesetzter Richtung, wenn es negativ ist.

Nimmt man als positiv die Paare an, welche von der positiven

z zur positiven y Axe, von der positiven y zur positiven x und von der positiven x zur positiven z Axe in den entsprechenden Coordinatebenen wirken, so wird das Kräftepaar (P, — P) in die drei Seitenpaare zerlegt werden

$$L = Yz - Zy,$$
$$M = Zx - Xz,$$
$$N = Xy - Yx,$$

deren Axen respective die x, y, z Axe des Coordinatensystems sind, und welche deshalb die Seitenpaare oder Componenten des Kräftepaares in Bezug auf die drei Coordinatenebenen zy, yx, xz, oder auch die Momente der Kraft P in Bezug auf diese Axen genannt werden.

Die obigen Formeln stimmen mit den im vorigen Paragraphen erhaltenen Werthen völlig überein.

§. 46.

Wir haben vorher (§. 36) die Bedingungen untersucht, unter welchen mehrere auf einen festen Körper wirkende Kräfte eine Resultantkraft haben können. Wir werden jetzt untersuchen, welches die Bedingungen sind, unter welchen sich die Kräfte zu einem Kräftepaar $(P, -P)$ reduciren lassen, und durch ein diesem gleichen aber entgegengesetztes Kräftepaar $(-Q, Q)$ im Gleichgewicht gehalten werden.

Es seien x, y, z die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft P, folglich auch der Kraft $-Q$, $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ diejenigen des Angriffspunktes der Kraft $-P$, also auch der Kraft Q, so werden $(x - x_{,})$, $(y - y_{,})$, $(z - z_{,})$ die Projectionen des Armes des Kräftepaares $(P, -P)$ oder des entgegengesetzten Paares $(-Q, Q)$ sein. Es seien ferner X, Y, Z die Componenten der Kraft P, daher auch der Kraft Q, und $-X$, $-Y$, $-Z$ die Componenten der Kräfte $-P$ und $-Q$, so werden die im §. 23 entwickelten Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts zwischen den gegebenen Kräften und den neuen Kräften $-Q$ und Q:

$$\Sigma X - X + X = \Sigma X = 0,$$
$$\Sigma Y - Y + Y = \Sigma Y = 0,$$
$$\Sigma Z - Z + Z = \Sigma Z = 0,$$
$$\Sigma(Yz - Zy) - (Yz - Zy) + (Yz_{,} - Zy_{,}) = 0,$$
$$\Sigma(Zx - Xz) - (Zx - Xz) + (Zx_{,} - Xz_{,}) = 0,$$
$$\Sigma(Xy - Yx) - (Xy - Yx) + (Xy_{,} - Yx_{,}) = 0.$$

Die drei letzten dieser Gleichungen können immer erfüllt werden, und es werden daher die Bedingungsgleichungen der Möglichkeit die gegebenen Kräfte zu einem Kräftepaar zusammenzusetzen

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0.$$

Die drei letzten der vorhergehenden Gleichungen können auch auf die Form gebracht werden

$$\Sigma(Yz - Zy) = Y(z - z_{,}) - Z(y - y_{,}),$$
$$\Sigma(Zx - Xz) = Z(x - x_{,}) - X(z - z_{,}),$$
$$\Sigma(Xy - Yx) = X(y - y_{,}) - Y(x - x_{,}).$$

Bezeichnet man durch G das Moment des Kräftepaares $(P, -P)$, durch L, M, N seine drei Seitenpaare in Bezug auf die zy, zx, yx Ebenen des Coordinatensystems, so ist nach §. 45

$$L = Y(z - z_{,}) - Z(y - y_{,}),$$
$$M = Z(x - x_{,}) - X(z - z_{,}),$$
$$N = X(y - y_{,}) - Y(x - x_{,}).$$

Diese Werthe in die vorstehenden Gleichungen substituirt geben dann

$$L = \Sigma(Yz - Zy),$$
$$M = \Sigma(Zx - Xz),$$
$$N = \Sigma(Xy - Yx).$$

Es ist nun die Componente des Resultantenpaares in Bezug auf jede der Coordinatenebenen der Summe der Momente der gegebenen Kräfte in Bezug auf die gegen die Ebene senkrechte Axe gleich.

Die Grösse des Resultantenpaares ist

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

§. 47.

Eine Kraft und ein Kräftepaar werden nie durch ein neues Kräftepaar ersetzt werden können, denn es werden hier nie die im

vorigen Paragraphen entwickelten Bedingungsgleichungen stattfinden. Dagegen können sie unter gewissen Umständen durch eine neue Kraft ersetzt werden. Es sei P die gegebene Kraft, (S, — S) das gegebene Kräftepaar, X, Y, Z die Componenten von P, $X_,$, $Y_,$, $Z_,$ diejenigen von S, $-X_,$, $-Y_,$, $-Z_,$ diejenigen von — S, x, y, z die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft P, $x_,$, $y_,$, $z_,$ diejenigen der Kraft S, $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$ diejenigen der Kraft — S, so wird nach §. 37 die Bedingungsgleichung, dass P, S, — S eine Resultantenkraft haben können,

$$\Sigma X . \Sigma(Yz - Zy) + \Sigma Y . \Sigma(Zx - Xz) + \Sigma Z . \Sigma(Xy - Yx) = o,$$

mit der Bemerkung, dass nicht zugleich

$$\Sigma X = o, \quad \Sigma Y = o, \quad \Sigma Z = o.$$

Diese letzte Bemerkung wird hier immer erfüllt, und die Bedingungsgleichung kann daher auf die Form gebracht werden

$$X[Y_,(z_, - z_{,,}) - Z_,(y_, - y_{,,})] + Y[Z_,(x_, - x_{,,}) - X_,(z_, - z_{,,})] + Z[X_,(y_, - y_{,,}) - Y_,(x_, - x_{,,})] = o.$$

Bezeichnet man durch α, β, γ die Winkel, welche die Kraft P, und durch λ, μ, ν die Winkel, welche die Axe des Paares (S, — S) mit den Coordinataxen bildet, so ist

$$\cos\alpha = \frac{X}{P}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{P}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{P},$$

$$\cos\lambda = \frac{Y_,(z_, - z_{,,}) - Z_,(y_, - y_{,,})}{G}, \quad \cos\mu = \frac{Z_,(x_, - x_{,,}) - X_,(z_, - z_{,,})}{G},$$

$$\cos\nu = \frac{X_,(y_, - y_{,,}) - Y_,(x_, - x_{,,})}{G},$$

wo G das Moment des Paares (S, — S) bezeichnet. Die obige Bedingungsgleichung wird alsdann

$$GP(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu) = o,$$

d. h. die Kraft P und die Axe des Paares (S, — S) müssen senkrecht auf einander sein, oder mit anderen Worten:

Damit eine Kraft und ein Kräftepaar durch eine einzelne Kraft ersetzt werden können, ist es nothwendig und hinreichend, dass sie in derselben oder in parallelen Ebenen liegen.

Es ist ferner leicht zu sehen, dass diese ersetzende Kraft Q mit P parallel und in einer mit der Ebene des Paares (S, — S) parallelen Ebene liegend, gleich P, in demselben Sinne wirkend und in einem senkrechten Abstand von P, gleich p sein muss, wo

$$Pp = G = \text{dem Moment des Paares } (S, -S).$$

Es wird in der That alsdann eine der Q entgegengesetzte Kraft — Q mit P ein Paar bilden, welches mit dem Paare (S, — S) parallel, gleiches Momentes und in entgegengesetzter Richtung drehend wird. Es wird — Q mit P und (S, — S) im Gleichgewichte sein, und daher Q die Resultante von P und (S, — S) sein.

§. 48.

Wir haben schon vorher (§. 37) gezeigt, dass beliebige auf einen festen Körper wirkende Kräfte immer auf zwei Kräfte reducirt werden können. Diese Reduction, welche auf unendlich viele verschiedene Weisen geschehen kann, bietet indessen nichts bemerkenswerthes dar. Wir werden deswegen statt dieser Reduction diejenige zu einer Kraft und einem Kräftepaare betrachten, und erst zeigen, dass diese Reduction immer ausgeführt werden kann.

Es sei R die Kraft, X, Y, Z ihre Componenten, x, y, z die Coordinaten ihres Angriffspunktes, welcher willkürlich in der Richtung der Kraft angenommen werden kann; ferner $(S, -S)$ das Kräftepaar, $X_{,}, Y_{,}, Z_{,}$ die Componenten von S, $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ die Coordinaten seines Angriffspunktes, $x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}$ diejenigen des Angriffspunktes der Kraft $-S$, G das Moment des Paares (S, — S), L, M, N seine drei Componenten, so ist

$$L = Y_{,}(z_{,} - z_{,,}) - Z_{,}(y_{,} - y_{,,}),$$
$$M = Z_{,}(x_{,} - x_{,,}) - X_{,}(z_{,} - z_{,,}),$$
$$N = X_{,}(y_{,} - y_{,,}) - Y_{,}(x_{,} - x_{,,}).$$

Die gegebenen Kräfte sind mit der Kraft $-R$ und dem Paare $(-S, S)$ im Gleichgewicht. Die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts werden nun nach §. 23:

$$\Sigma X - X = o,$$
$$\Sigma Y - Y = o,$$
$$\Sigma Z - Z = o,$$

$$\Sigma(\mathrm{Yz} - \mathrm{Zy}) - (Yz - Zy) - \mathrm{L} = 0,$$
$$\Sigma(\mathrm{Zx} - \mathrm{Xz}) - (Zx - Xz) - \mathrm{M} = 0,$$
$$\Sigma(\mathrm{Xy} - \mathrm{Yx}) - (Xy - Yx) - \mathrm{N} = 0.$$

Hieraus findet man, dass

$$X = \Sigma\mathrm{X},\quad Y = \Sigma\mathrm{Y},\quad Z = \Sigma\mathrm{Z},$$
$$R = \sqrt{[(\Sigma\mathrm{X})^2 + (\Sigma\mathrm{Y})^2 + (\Sigma\mathrm{Z})^2]},$$
$$L = \Sigma(\mathrm{Yz} - \mathrm{Zy}) - (z\Sigma\mathrm{Y} - y\Sigma\mathrm{Z}),$$
$$M = \Sigma(\mathrm{Zx} - \mathrm{Xz}) - (x\Sigma\mathrm{Z} - z\Sigma\mathrm{X}),$$
$$N = \Sigma(\mathrm{Xy} - \mathrm{Yx}) - (y\Sigma\mathrm{X} - x\Sigma\mathrm{Y}),$$
$$G = \sqrt{\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2}.$$

Der Wirkepunkt (x, y, z) der Resultantkraft ist willkürlich, seine Grösse und Neigung aber bestimmt. Die Grösse und Neigung des Resultantenpaares ist verschieden, je nachdem man der Resultantkraft verschiedene Stellungen im Raume giebt. Geht die Resultantkraft durch den Anfangspunkt der Coordinaten, so ist

$$Yz - Zy = 0,\quad Zx - Xz = 0,\quad Xy - Yx = 0,$$

und daher

$$L = \Sigma(\mathrm{Yz} - \mathrm{Zy}),$$
$$M = \Sigma(\mathrm{Zx} - \mathrm{Xz}),$$
$$N = \Sigma(\mathrm{Xy} - \mathrm{Yx}).$$

Alle auf einen festen Körper wirkenden beliebigen Kräfte können immer zu einer Kraft und einem Kräftepaare reducirt werden; die Componente der Kraft nach jeder der Coordinataxen ist der Summe der Componenten der gegebenen Kräfte nach derselben Axe gleich, und das Kräftepaar in Bezug auf jede der Coordinataxen ist der Summe der Momente der gegebenen Kräfte in Bezug auf diese Coordinataxe gleich, wenn der Anfangspunkt des Coordinatensystems irgendwo in der Richtung der Resultantkraft angenommen wird, oder, was einerlei ist, wenn die Resultantkraft durch den willkürlich gewählten Anfangspunkt der Coordinaten gehend angenommen wird.

§. 49.

Die in dem vorigen Paragraphen entwickelte Reduction der Kräfte zu einer Resultantkraft und zu einem Resultantenpaare, kann auch folgendermaassen geometrisch bewiesen werden. Es sei (Fig. 22)

P eine der gegebenen Kräfte, so kann man im Anfangspunkte des Coordinatensystems zwei mit P parallele, gleiche und einander entgegengesetzte Kräfte P und —P anbringen; hierdurch wird dann nichts gestört. Dies ist aber dasselbe, als hätte man die Kraft P vom Punkte B parallel mit sich selbst nach A versetzt, und durch diese Versetzung wird ein Kräftepaar (P, —P) am Arme AB gebildet, dessen Moment das Product der in B angebrachten Kraft P in seinem Abstande vom Punkte A ist. Dieses Moment wird das Moment der Kraft P in Bezug auf den Punkt A genannt. Die Kraft P in A kann jetzt in die drei Kräfte X, Y, Z nach den drei Coordinataxen, und das Kräftepaar (P, —P) nach §. 45 in die drei Seitenpaare Yz — Zy, Zx — Xz, Xy — Yx in Bezug auf die drei Coordinataxen zerlegt werden. Versetzt man auf diese Weise alle Kräfte nach A, zerlegt sie da, zerlegt auch alle durch die Versetzungen hervorgebrachten Paare, so wird man längs der drei Coordinataxen die Kräfte

$$\mathfrak{X} = \Sigma X, \quad \mathfrak{Y} = \Sigma Y, \quad \mathfrak{Z} = \Sigma Z$$

und in den drei Coordinatenebenen die Kräftepaare

$$L = \Sigma(Yz - Zy), \quad M = \Sigma(Zx - Xz), \quad N = \Sigma(Xy - Yx)$$

erhalten, was mit den Resultaten des §. 49 übereinstimmt.

§. 50.

Im Allgemeinen bleibt man bei den Kräften $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und den Paaren L, M, N stehen und setzt diese nicht wieder mit der Kraft R und dem Paare G zusammen. Die Gleichung $\mathfrak{X} = \Sigma X = o$ drückt dann aus, dass der Körper nicht in der Richtung der x Axe, die Gleichung $\mathfrak{Y} = \Sigma Y = o$, dass der Körper nicht in der Richtung der y Axe, die Gleichung $\mathfrak{Z} = \Sigma Z = o$, dass der Körper nicht in der Richtung der z Axe bewegt wird; die Gleichung $L = \Sigma(Yz - Zy) = o$ besagt, dass der Körper nicht um die x Axe, die Gleichung $M = \Sigma(Zx - Xz) = o$, dass der Körper nicht um die y Axe, die Gleichung $N = \Sigma(Xy - Yx) = o$, dass der Körper nicht um die z Axe gedreht wird. Finden alle diese Gleichungen statt, so muss natürlich auch, wie vorher bewiesen, Gleichgewicht stattfinden, sonst aber nicht.

§. 51.

Wie wir §. 48 gesehen haben, können alle auf einen festen Körper wirkende Kräfte immer zu einer durch einen beliebigen Punkt (x, y, z) gehende Resultantkraft R, und zu einem Resultantenpaare G reducirt werden, und es sind diese durch die Gleichungen

$$X = \Sigma \mathrm{X},\quad Y = \Sigma \mathrm{Y},\quad Z = \Sigma \mathrm{Z},$$
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$
$$L = \Sigma(\mathrm{Yz} - \mathrm{Zy}) - (Yz - Zy),$$
$$M = \Sigma(\mathrm{Zx} - \mathrm{Xz}) - (Zx - Xz),$$
$$N = \Sigma(\mathrm{Xy} - \mathrm{Yx}) - (Xy - Yx),$$
$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

bestimmt.

Die Grössen x, y, z können willkürlich genommen werden, und das Resultantenpaar G wird eine davon abhängige Grösse und Lage erhalten. Es wird deswegen das Resultantenpaar in Bezug auf den Punkt (x, y, z) genannt. In Bezug auf die an verschiedenen Punkten derselben mit der Richtung der Resultantenkraft R parallele Linie wird aber G immer denselben Werth behalten. Man kann deswegen immer den willkürlichen Punkt (x, y, z) in einer alle Stellungen der Resultantenkraft R schneidenden Ebene annehmen, z. B. in einer durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems in der auf der Richtung von R senkrechten Ebene. Es ist alsdann

$$Xx + Yy + Zz = 0.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\Sigma(\mathrm{Yz} - \mathrm{Zy}) = \mathrm{L},\quad \Sigma(\mathrm{Zx} - \mathrm{Xz}) = \mathrm{M},\quad \Sigma(\mathrm{Xy} - \mathrm{Yx}) = \mathrm{N},$$
$$\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2 = \mathrm{G}^2,$$

so erhält man

$$L = \mathrm{L} - (Yz - Zy),$$
$$M = \mathrm{M} - (Zx - Xz),$$
$$N = \mathrm{N} - (Xy - Yx),$$
$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2 = \mathrm{G}^2 + R^2(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$- 2\mathrm{L}(Yz - Zy) - 2\mathrm{M}(Zx - Xz) - 2\mathrm{N}(Xy - Yx).$$

Unter den verschiedenen Werthen von G ist derjenige zu merken, welcher ein Minimum ist. Bezeichnet man die entsprechenden

Werthe von x, y, z durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, so wird man die Gleichungen, wodurch diese Grössen bestimmt werden, erhalten, indem man $d_x G$, $d_y G$, $d_z G$ gleich Null setzt. Man erhält alsdann

$$(1)\quad \begin{aligned} R^2\mathfrak{x} &= MZ - NY, \\ R^2\mathfrak{y} &= NX - LZ, \\ R^2\mathfrak{z} &= LY - MX. \end{aligned}$$

Unter diesen drei Gleichungen ist die eine von den beiden andern abhängig, und diese in Verbindung mit der Gleichung

$$X\mathfrak{x} + Y\mathfrak{y} + Z\mathfrak{z} = 0$$

bestimmen dann die Lage des Punktes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ in der vom Anfangspunkte des Coordinatensystems in der Richtung von R senkrechten Ebene.

Aus den Gleichungen (1) findet man jetzt

$$Y\mathfrak{z} - Z\mathfrak{y} = L - \frac{X}{R^2}(LX + MY + NZ),$$

$$Z\mathfrak{x} - X\mathfrak{z} = M - \frac{Y}{R^2}(LX + MY + NZ),$$

$$X\mathfrak{y} - Y\mathfrak{x} = N - \frac{Z}{R^2}(LX + MY + NZ).$$

Bezeichnet man jetzt die dem Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ entsprechenden Werthe von G, L, M, N durch $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, so werden

$$\mathfrak{L} = L - (Y\mathfrak{z} - Z\mathfrak{y}),\quad \mathfrak{M} = M - (Z\mathfrak{x} - X\mathfrak{z}),\quad \mathfrak{N} = N - (X\mathfrak{y} - Y\mathfrak{x}),$$

$$\mathfrak{G} = \sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2},$$

oder, wenn man die obigen Werthe von $Y\mathfrak{z} - Z\mathfrak{y}$, $Z\mathfrak{x} - X\mathfrak{z}$, $X\mathfrak{y} - Y\mathfrak{x}$ substituirt

$$\mathfrak{L} = \frac{X}{R} \cdot \frac{LX + MY + NZ}{R},$$

$$\mathfrak{M} = \frac{Y}{R} \cdot \frac{LX + MY + NZ}{R},$$

$$\mathfrak{N} = \frac{Z}{R} \cdot \frac{LX + MY + NZ}{R},$$

$$\mathfrak{G} = \frac{LX + MY + NZ}{R},$$

$$\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{G}} = \frac{X}{R},\quad \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{G}} = \frac{Y}{R},\quad \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{G}} = \frac{Z}{R}.$$

Aus den letzten drei Gleichungen geht hervor, dass das kleinste Resultantenpaar $\mathfrak{G}$ auf der durch den Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ gehenden Resultantkraft R senkrecht ist.

Multiplicirt man die Gleichungen (1) der Reihe nach respective mit L, M, N und addirt, so erhält man

$$\mathrm{L}\mathfrak{x} + \mathrm{M}\mathfrak{y}' + \mathrm{N}\mathfrak{z} = o,$$

d. h. der Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, welcher in der durch den Anfangspunkt der Coordinaten in der Richtung von R senkrechten Ebene angenommen ist, liegt auch in der Ebene des Resultantenpaares G; er liegt folglich in der Linie, in welcher diese beiden Ebenen einander schneiden. Multiplicirt man die Gleichungen (1) der Reihe nach mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ und addirt, so erhält man

$$R^2(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2) = \mathrm{G}^2 - \mathfrak{G}^2,$$

und es wird daher der Abstand

$$\mathfrak{r} = \sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}$$

des Punktes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ vom Anfangspunkte der Coordinaten

$$\mathfrak{r} = \frac{\sqrt{\mathrm{G}^2 - \mathfrak{G}^2}}{R},$$

wodurch dann die Lage der durch $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ mit R parallelen Linie völlig bestimmt ist. Alle Kräfte, welche auf den festen Körper wirken, können dann zu einer längs dieser Linie wirkenden Kraft $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ und zu einem auf dieser Linie senkrechten Kräftepaar $\mathfrak{G} = \frac{\mathrm{L}X + \mathrm{M}Y + \mathrm{N}Z}{R}$ zusammengesetzt werden, und das Kräftepaar hat in dieser Stellung seinen kleinsten Werth. Diese Lage der Resultantenkraft R, welche dann auch diejenige der Axe des Kräftepaares $\mathfrak{G}$ ist, wird die Centralaxe der gegebenen Kräfte genannt.

§. 52.

Multiplicirt man die Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen respective mit x, y, z und addirt, so erhält man

$$R^2(\mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y + \mathfrak{z}z) = \mathrm{L}(Yz - Zy) + \mathrm{M}(Zx - Xz) + \mathrm{N}(Xy - Yx).$$

Dieser Werth in die Formel des Kräftepaares in Bezug auf den Punkt (x, y, z) substituirt, giebt dann

$$\begin{aligned} G^2 &= \mathrm{G}^2 + R^2(x^2 + y^2 + z^2) - 2\mathrm{L}(Yz - Zy) - 2\mathrm{M}(Zx - Xz) \\ &\qquad - 2\mathrm{N}(Xy - Yx) \\ &= \mathrm{G}^2 + R^2(x^2 + y^2 + z^2) - 2R^2(\mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y + \mathfrak{z}z) \\ &= \mathrm{G}^2 + R^2[(x - \mathfrak{x})^2 + (y - \mathfrak{y})^2 + (z - \mathfrak{z})^2] - R^2(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2), \end{aligned}$$

oder
$$G^2 = \mathfrak{G}^2 + R^2\mathfrak{r}^2,$$
wenn $\mathfrak{r} = \sqrt{[(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2 + (z-\mathfrak{z})^2]}$ den Abstand des Punktes (x, y, z) von der Centralaxe bezeichnet.

Aus dieser Gleichung leuchtet dann auch ein, dass $\mathfrak{G}$ der kleinste Werth von G ist, und dass G für Punkte, welche gleiche Entfernung von der Centralaxe haben, gleiche Werthe hat.

Bezeichnet man durch φ den Winkel, welcher die Axe des Resultantenpaares G mit der Centralaxe bildet, so ist
$$\cos\varphi = \frac{LX + MY + NZ}{GR} = \frac{\mathrm{L}X + \mathrm{M}Y + \mathrm{N}Z}{GR} = \frac{\mathfrak{G}}{G},$$
daher
$$\mathfrak{G} = \mathrm{G}\cos\varphi,$$
$$R\mathfrak{r} = \mathrm{G}\sin\varphi.$$

Es ist G das Resultantenpaar des auf der Centralaxe senkrechten Kräftepaars $\mathfrak{G}$ und eines in der durch die Centralebene und den Punkt (x, y, z) gelegten Ebene wirkenden Kräftepaars, dessen Moment das Product der Kraft R mit dem Abstand des Punktes (x, y, z) von der Centralaxe ist.

§. 53.

Die in den beiden vorigen Paragraphen entwickelten Sätze lassen sich auch geometrisch folgender Weise darstellen. Es sei (Fig. 23) R die in irgend einem Punkte angebrachte Resultantkraft, G das Resultantenpaar in der Ebene MN wirkend. Man lege durch A eine Ebene ST senkrecht auf AR, durch den Durchschnitt AB beider Ebenen ST und MN und durch die Linie AR die Ebene UV. Man zerlege dann das Paar G in zwei Paare, $\mathfrak{G}$ in ST und $\mathfrak{G}'$ in UV wirkend. Die Kraft R und das Paar UV können nun nach §. 49 zu einer mit AR parallelen und gleichen Kraft zusammengesetzt werden, indem man R in der Ebene UV so weit und in eine solche Richtung nach C versetzt, dass das durch die Versetzung hervorgebrachte Paar $(R, -R)$ das Paar $\mathfrak{G}'$ aufhebt, folglich dass $\mathfrak{G}' = R\,.\,\mathrm{AC} = R\,.\,\mathfrak{r}$. Es bleiben alsdann das Paar $\mathfrak{G}$ in ST und die Kraft R in C übrig, und CR ist folglich die Centralaxe der gegebenen Kräfte.

§. 54.

Weil $\mathfrak{G}$ der kleinste Werth von G ist, so muss, wenn die gegebenen Kräfte nur eine Resultantenkraft haben sollen, $\mathfrak{G} = 0$ sein, folglich

$$LX + MY + NZ = \text{L}X + \text{M}Y + \text{N}Z = 0,$$

d. h. *das Resultantenpaar G in Bezug auf einen beliebigen Punkt (x, y, z) muss mit der durch diesen Punkt gehenden Resultantenkraft R immer in derselben Ebene liegen.*

Substituirt man die Werthe von L, M, N, so erhält man

$$\Sigma X . \Sigma(Yz - Zy) + \Sigma Y . \Sigma(Zx - Xz) + \Sigma Z . \Sigma(Xy - Yx) = 0,$$

was mit der im §. 36 entwickelten Bedingungsgleichung übereinstimmt.

Es folgt aus der obigen geometrischen Erklärung dieser Bedingungsgleichung, dass zwei Kräfte, welche nicht in derselben Ebene wirken, nie durch eine Resultantkraft ersetzt werden können. Denn es sei (Fig. 24) P die eine, Q die andere Kraft, AB eine auf beiden senkrechte Linie, also ihr kleinster Abstand. Man versetze Q von B nach A, so entsteht durch diese Versetzung ein Kräftepaar (Q, — Q) am Arme AB. Die Kräfte P und Q, in A wirkend, können nun zu einer Kraft R zusammengesetzt werden, und man behält alsdann diese Kraft und das Kräftepaar (Q, — Q) übrig. Der Neigungswinkel der Kraft R mit der Ebene des Paares ist PAQ, und dieser Winkel kann nie verschwinden, wenn nicht P gleich Null ist. Die Kraft R und das Paar (Q, — Q), und so auch die Kräfte P und Q, können daher nie durch eine Resultantenkraft ersetzt werden.

Die Kraft

$$R = \sqrt{[(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2]},$$

längs der Centralaxe wirkend, wird die Mittelkraft des Systems, und das Kräftepaar

$$\mathfrak{G} = \frac{\Sigma X . \Sigma(Yz - Zy) + \Sigma Y . \Sigma(Zx - Xz) + \Sigma Z . \Sigma(Xy - Yx)}{\sqrt{[(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2]}},$$

senkrecht auf der Centralaxe, wird das Mittelpaar des Systems genannt.

Cap. VI.

Centralpunkt, Centrallinie und Centralebene der Kräfte.

§. 55.

Wir werden jetzt die Bedingungen des Gleichgewichts eines festen Körpers und die Reduction der Kräfte suchen, wenn diese mit unveränderlichen Intensitäten in unveränderlichen Richtungen an ihren Angriffspunkten haften, in welcher Stellung sich der feste Körper auch befindet.

Wenn man den Körper nur parallel mit sich selbst fortschiebt, findet augenscheinlich keine Aenderung in der gegenseitigen Stellung des Körpers und der Kräfte statt. Man braucht daher nur die Drehung des Körpers um einen beliebigen Punkt, als welchen wir den Anfangspunkt der Coordinaten annehmen wollen, zu betrachten.

Um diese Drehung des Körpers in Formeln ausdrücken zu können, ziehe man durch den Anfangspunkt der Coordinaten drei auf einander senkrechte, im Körper feste, mit ihm aber im Raume bewegliche Axen u, v, w, und drei im Raume feste rechtwinklige Axen x, y, z. Es sei P eine der gegebenen Kräfte, x, y, z die Coordinaten des Angriffspunktes nach den im Raume festen Axen, u, v, w die Coordinaten desselben Punktes nach den im Körper festen Axen. Bezeichnet man durch ψ den Winkel, welchen die Durchschnittslinie der vw und yz Ebenen mit der z Axe bildet, durch φ den Winkel, welchen dieselbe Linie mit der w Axe bildet, und durch ϑ den Winkel, welchen die z und w Axe mit einander bilden, so wird, wie aus der analytischen Geometrie bekannt ist,

$$x = u(-\sin\psi\sin\vartheta) + v(-\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta) + w(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta),$$

$$y = u(-\cos\psi\sin\vartheta) + v(\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta) + w(-\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta),$$

$$z = u(\sin\varphi\sin\vartheta) + v(\cos\varphi\sin\vartheta) + w(\cos\vartheta).$$

Die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts eines festen Körpers sind jetzt nach §. 23

$$\Sigma X = o, \quad \Sigma Y = o, \quad \Sigma Z = o,$$
$$\Sigma(Yz - Zy) = o, \quad \Sigma(Zx - Xz) = o, \quad \Sigma(Xy - Yx) = o.$$

Substituirt man in diese Gleichungen die Werthe von x, y, z und bemerkt, dass sie für jeden Werth von ψ, φ, ϑ stattfinden sollen, so erhält man die Gleichungen

$$\Sigma X = o, \quad \Sigma Y = o, \quad \Sigma Z = o, \quad \Sigma Xu = o, \quad \Sigma Xv = o, \quad \Sigma Xw = o,$$
$$\Sigma Yu = o, \quad \Sigma Yv = o, \quad \Sigma Yw = o, \quad \Sigma Zu = o, \quad \Sigma Zv = o, \quad \Sigma Zw = o.$$

Wenn die u, v, w Axen mit den x, y, z Axen zusammenfallen, sind $x = u$, $y = v$, $z = w$. Die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts eines festen Körpers bei jeder Stellung des Körpers, wenn die Kräfte immer mit unveränderlicher Intensität und in unveränderlichen Richtungen an ihren Angriffspunkten haften, sind

$$\Sigma X = o, \quad \Sigma Y = o, \quad \Sigma Z = o, \quad \Sigma Xx = o, \quad \Sigma Xy = o, \quad \Sigma Xz = o,$$
$$\Sigma Yx = o, \quad \Sigma Yy = o, \quad \Sigma Yz = o, \quad \Sigma Zx = o, \quad \Sigma Zy = o, \quad \Sigma Zz = o.$$

Finden diese Gleichungen bei irgend einer Stellung des Körpers statt, so werden sie auch für jede andere Stellung stattfinden und der Körper daher in jeder Lage im Gleichgewicht sein.

§. 56.

Finden dagegen nicht alle jene Gleichungen statt, so kann man immer eine oder mehrere neue Kräfte hinzufügen, welche das Gleichgewicht für jede Stellung des Körpers herstellen, wenn diese neuen Kräfte wie die übrigen immer mit unveränderlichen Intensitäten und in unveränderlichen Richtungen an ihren Angriffspunkten haften. Die Kräfte, welche diesen entgegengesetzt in denselben Angriffspunkten wirken, werden dann bei jeder Stellung des Körpers die gegebenen Kräfte ersetzen. Wir werden erst den Fall untersuchen, wenn nur eine solche neue Kraft nöthig ist. Es sei R diese Kraft, x, y, z die Coordinaten ihres Angriffspunktes, X, Y, Z ihre Componenten, so soll $-R$ immer die gegebenen Kräfte im Gleichgewicht halten, und es gehen daher nun die Gleichungen des vorigen Paragraphen in

$$\Sigma X - X = o, \quad \Sigma Xx - Xx = o, \quad \Sigma Xy - Xy = o, \quad \Sigma Xz - Xz = o,$$
$$\Sigma Y - Y = o, \quad \Sigma Yx - Yx = o, \quad \Sigma Yy - Yy = o, \quad \Sigma Yz - Yz = o,$$
$$\Sigma Z - Z = o, \quad \Sigma Zx - Zx = o, \quad \Sigma Zy - Zy = o, \quad \Sigma Zz - Zz = o,$$

über, woraus, wenn die Mittelkraft nicht Null ist, d. h. nicht zugleich $\Sigma X = o$, $\Sigma Y = o$, $\Sigma Z = o$, die folgenden Bedingungsgleichungen hervorgehen

$$\frac{\Sigma Xx}{\Sigma X} = \frac{\Sigma Yx}{\Sigma Y} = \frac{\Sigma Zx}{\Sigma Z}, \quad \frac{\Sigma Xy}{\Sigma X} = \frac{\Sigma Yy}{\Sigma Y} = \frac{\Sigma Zy}{\Sigma Z}, \quad \frac{\Sigma Xz}{\Sigma X} = \frac{\Sigma Yz}{\Sigma Y} = \frac{\Sigma Zz}{\Sigma Z}.$$

Sind diese Bedingungsgleichungen erfüllt, so wird

$$X = \Sigma X, \quad Y = \Sigma Y, \quad Z = \Sigma Z, \quad x = \frac{\Sigma Xx}{\Sigma X}, \quad y = \frac{\Sigma Yy}{\Sigma Y}, \quad z = \frac{\Sigma Zz}{\Sigma Z}.$$

Der Punkt (x, y, z) wird alsdann der Centralpunkt der gegebenen Kräfte genannt.

Sind die Kräfte parallel und ihre Summe ΣP nicht gleich Null, so finden die obigen Bedingungsgleichungen immer statt. Bezeichnet man nämlich durch α, β, γ die Winkel, welche die Kräfte mit den drei Axen bilden, so wird

$$\frac{\Sigma Xx}{\Sigma X} = \frac{\cos\alpha\, \Sigma Px}{\cos\alpha\, \Sigma P} = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad \text{ebenso} \quad \frac{\Sigma Yx}{\Sigma Y} = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P} \text{ u. s. w.}$$

Die Resultantkraft, welche bei jeder Stellung des Körpers die gegebenen Kräfte ersetzen kann, wird alsdann

$$R = \Sigma P,$$

und die Coordinaten ihres Angriffspunktes sind

$$x = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad y = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}, \quad z = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P},$$

was mit den Resultaten des §. 37 übereinstimmt. Der Punkt (x, y, z) wird dann der Mittelpunkt der parallelen Kräfte genannt.

§. 57.

Finden die Bedingungsgleichungen des vorigen Paragraphen nicht statt, so können sie nicht bei jeder Stellung des Körpers durch eine immer in demselben Punkte haftende Resultantkraft ersetzt werden. Suchen wir nun die Bedingungsgleichungen, wie die gegebenen Kräfte durch zwei neue Kräfte, oder was immer dasselbe ist, durch eine Kraft und ein Kräftepaar ersetzt werden können. Dass man statt zweier Kräfte eine Kraft und ein Kräftepaar annehmen kann, sieht man leicht ein, denn es seien (Fig. 24) P in A und Q in B die beiden Kräfte, so kann man sie immer bei jeder Stellung der Linie

AB auf eine Kraft R in A und auf ein Kräftepaar (Q, — Q), am Arme AB wirkend, reduciren.

Es sei jetzt R die ersetzende Kraft, X, Y, Z ihre Componenten, x, y, z die Coordinaten ihres Wirkepunktes, $\mathfrak{R}$ die Kraft des ersetzenden Paares, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ ihre Componenten, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Projectionen ihres Armes, x', y', z' die Coordinaten des Wirkepunktes der Kraft $\mathfrak{R}$, x'', y'', z'' diejenigen der Kraft $-\mathfrak{R}$, daher

$$\mathfrak{x} = x' - x'', \quad \mathfrak{y} = y' - y'', \quad \mathfrak{z} = z' - z'',$$

so werden die Bedingungsgleichungen, welche ausdrücken, dass die gegebenen Kräfte mit den neuen Kräften R, $\mathfrak{R}$, $-\mathfrak{R}$ im Gleichgewicht sind, nach §. 55

$$\begin{aligned}
&\Sigma\mathrm{X} = X, \quad \Sigma\mathrm{Xx} = Xx + \mathfrak{X}\mathfrak{x}, \quad \Sigma\mathrm{Xy} = Xy - \mathfrak{X}\mathfrak{y}, \quad \Sigma\mathrm{Xz} = Xz - \mathfrak{X}\mathfrak{z},\\
&\Sigma\mathrm{Y} = Y, \quad \Sigma\mathrm{Yx} = Yx + \mathfrak{Y}\mathfrak{x}, \quad \Sigma\mathrm{Yy} = Yy + \mathfrak{Y}\mathfrak{y}, \quad \Sigma\mathrm{Yz} = Yz - \mathfrak{Y}\mathfrak{z},\\
&\Sigma\mathrm{Z} = Z, \quad \Sigma\mathrm{Zx} = Zx + \mathfrak{Z}\mathfrak{x}, \quad \Sigma\mathrm{Zy} = Zy + \mathfrak{Z}\mathfrak{y}, \quad \Sigma\mathrm{Zz} = Zz + \mathfrak{Z}\mathfrak{z}.
\end{aligned}$$

Eliminirt man hier zuerst die Grössen X, Y, Z, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, so erhält man

$$(1)\quad \begin{aligned}
&\mathfrak{y}\Sigma\mathrm{Xx} - \mathfrak{x}\Sigma\mathrm{Xy} - (\mathfrak{y}x - \mathfrak{x}y)\Sigma\mathrm{X} = 0, \quad \mathfrak{z}\Sigma\mathrm{Xx} - \mathfrak{x}\Sigma\mathrm{Xz} - (\mathfrak{z}x - \mathfrak{x}z)\Sigma\mathrm{X} = 0,\\
&\mathfrak{y}\Sigma\mathrm{Yx} - \mathfrak{x}\Sigma\mathrm{Yy} - (\mathfrak{y}x - \mathfrak{x}y)\Sigma\mathrm{Y} = 0, \quad \mathfrak{z}\Sigma\mathrm{Yx} - \mathfrak{x}\Sigma\mathrm{Yz} - (\mathfrak{z}x - \mathfrak{x}z)\Sigma\mathrm{Y} = 0,\\
&\mathfrak{y}\Sigma\mathrm{Zx} - \mathfrak{x}\Sigma\mathrm{Zy} - (\mathfrak{y}x - \mathfrak{x}y)\Sigma\mathrm{Z} = 0, \quad \mathfrak{z}\Sigma\mathrm{Zx} - \mathfrak{x}\Sigma\mathrm{Zz} - (\mathfrak{z}x - \mathfrak{x}z)\Sigma\mathrm{Z} = 0.
\end{aligned}$$

Eliminirt man nun ferner die Grössen $(\mathfrak{y}x - \mathfrak{x}y)$ und $(\mathfrak{z}x - \mathfrak{x}z)$, so erhält man, wenn nicht die Mittelkraft Null ist,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{y}[\Sigma\mathrm{Y}\Sigma\mathrm{Xx} - \Sigma\mathrm{X}\Sigma\mathrm{Yx}] &= \mathfrak{x}[\Sigma\mathrm{Y}\Sigma\mathrm{Xy} - \Sigma\mathrm{X}\Sigma\mathrm{Yy}],\\
\mathfrak{y}[\Sigma\mathrm{Z}\Sigma\mathrm{Xx} - \Sigma\mathrm{X}\Sigma\mathrm{Zx}] &= \mathfrak{x}[\Sigma\mathrm{Z}\Sigma\mathrm{Xy} - \Sigma\mathrm{X}\Sigma\mathrm{Zy}],\\
\mathfrak{z}[\Sigma\mathrm{Y}\Sigma\mathrm{Xx} - \Sigma\mathrm{X}\Sigma\mathrm{Yx}] &= \mathfrak{x}[\Sigma\mathrm{Y}\Sigma\mathrm{Xz} - \Sigma\mathrm{X}\Sigma\mathrm{Yz}],\\
\mathfrak{z}[\Sigma\mathrm{Z}\Sigma\mathrm{Xx} - \Sigma\mathrm{X}\Sigma\mathrm{Zx}] &= \mathfrak{x}[\Sigma\mathrm{Z}\Sigma\mathrm{Xz} - \Sigma\mathrm{X}\Sigma\mathrm{Zz}],
\end{aligned}$$

und hieraus endlich die zwei Bedingungsgleichungen

$$(2)\quad \begin{aligned}
&\Sigma\mathrm{X}[\Sigma\mathrm{Yx}\Sigma\mathrm{Zy} - \Sigma\mathrm{Zx}\Sigma\mathrm{Yy}] + \Sigma\mathrm{Y}[\Sigma\mathrm{Xy}\Sigma\mathrm{Zx} - \Sigma\mathrm{Zy}\Sigma\mathrm{Xx}]\\
&\qquad + \Sigma\mathrm{Z}[\Sigma\mathrm{Yy}\Sigma\mathrm{Xx} - \Sigma\mathrm{Xy}\Sigma\mathrm{Yx}] = 0,\\
&\Sigma\mathrm{X}[\Sigma\mathrm{Yx}\Sigma\mathrm{Zz} - \Sigma\mathrm{Zx}\Sigma\mathrm{Yz}] + \Sigma\mathrm{Y}[\Sigma\mathrm{Xz}\Sigma\mathrm{Zx} - \Sigma\mathrm{Zz}\Sigma\mathrm{Xx}]\\
&\qquad + \Sigma\mathrm{Z}[\Sigma\mathrm{Yy}\Sigma\mathrm{Xx} - \Sigma\mathrm{Xz}\Sigma\mathrm{Yx}] = 0.
\end{aligned}$$

Sind diese Bedingungsgleichungen erfüllt, und nicht zugleich $\Sigma\mathrm{X} = 0$, $\Sigma\mathrm{Y} = 0$, $\Sigma\mathrm{Z} = 0$, und setzt man der Kürze wegen

$$\Sigma\mathrm{Y}\Sigma\mathrm{Xx} - \Sigma\mathrm{X}\Sigma\mathrm{Yx} = S_x, \quad \Sigma\mathrm{Y}\Sigma\mathrm{Xy} - \Sigma\mathrm{X}\Sigma\mathrm{Yy} = S_y,$$
$$\Sigma\mathrm{Y}\Sigma\mathrm{Xz} - \Sigma\mathrm{X}\Sigma\mathrm{Yz} = S_z,$$

so findet man, wenn $\mathfrak{x}$ willkürlich angenommen wird,

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} \cdot \frac{S_y}{S_x}, \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{x} \cdot \frac{S_z}{S_x}.$$

Bezeichnet man durch λ, μ, ν die Winkel, welche der Arm ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) des Kräftepaares ($\mathfrak{R}$, $-\mathfrak{R}$) mit den Coordinataxen bildet, so wird

$$\cos\lambda = \frac{S_x}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}}, \quad \cos\mu = \frac{S_y}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{S_z}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}}.$$

Die Richtung dieser Linie ist folglich eine bestimmte und von dem willkürlichen Werth von $\mathfrak{x}$ unabhängig.

Setzt man ferner der Kürze willen

$$\Sigma Yy \Sigma Xx - \Sigma Xy \Sigma Yx = T_y, \quad \Sigma Yz \Sigma Xx - \Sigma Xz \Sigma Yx = T_z,$$

so erhält man aus den Gleichungen (1), wenn x willkürlich angenommen wird,

$$(3) \qquad y = x \cdot \frac{S_y}{S_x} + \frac{T_y}{S_x}, \quad z = x \cdot \frac{S_z}{S_x} + \frac{T_z}{S_x}.$$

Diese sind aber die Gleichungen einer mit dem Arme des Kräftepaars ($\mathfrak{R}$, $-\mathfrak{R}$) parallelen Linie, in welcher der Wirkepunkt der Kraft R willkürlich angenommen werden kann. Ihre Lage ist durch die Gleichungen (3) völlig bestimmt und im Körper fest; sie wird die Centrallinie des Systems genannt.

Die Kräfte X, Y, Z, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ werden durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$X = \Sigma X, \quad Y = \Sigma Y, \quad Z = \Sigma Z,$$

$$\mathfrak{X} = \frac{\Sigma Xx - x\Sigma X}{\mathfrak{x}}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{\Sigma Yx - x\Sigma Y}{\mathfrak{x}}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{\Sigma Zx - x\Sigma Z}{\mathfrak{x}}.$$

Wenn die Bedingungsgleichungen (2) der Centrallinie erfüllt sind, können die gegebenen Kräfte immer auf eine Kraft und auf ein Kräftepaar reducirt werden. Der Wirkepunkt der Kraft kann willkürlich in der Centrallinie gewählt werden, und die Kraft ist der Mittelkraft des Systems gleich und parallel; der Arm des Paares kann beliebig auf einer der Centrallinie parallelen Linie angenommen wer-

den, und die Kraft des Paares bekommt eine von der willkürlich gewählten Länge des Arms und der Lage des Wirkepunkts der Kraft bestimmte Grösse.

Statt auf eine Kraft und auf ein Paar können die gegebenen Kräfte auch auf zwei Kräfte reducirt werden, deren Wirkepunkte dann willkürlich in der Centrallinie gewählt werden können. Die Componenten und Coordinaten der Wirkepunkte dieser Kräfte sind dann

$$X-\mathfrak{X},\ Y-\mathfrak{Y},\ Z-\mathfrak{Z},\ x,\ y,\ z,$$
$$\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z},\ x+\mathfrak{x},\ y+\mathfrak{y},\ z+\mathfrak{z}.$$

Die Bedingungsgleichungen (2) werden erfüllt, wenn alle gegebenen Kräfte einer Ebene parallel sind, weil alsdann alle $Z=0$.

§. 58.

Wenn die Mittelkraft Null ist, folglich $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$, $\Sigma Z=0$, so erhält man aus den Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen die folgenden Bedingungsgleichungen

$$(1)\qquad \frac{\Sigma X\mathrm{x}}{\Sigma X\mathrm{y}}=\frac{\Sigma Y\mathrm{x}}{\Sigma Y\mathrm{y}}=\frac{\Sigma Z\mathrm{x}}{\Sigma Z\mathrm{y}},\quad \frac{\Sigma X\mathrm{x}}{\Sigma X\mathrm{z}}=\frac{\Sigma Y\mathrm{x}}{\Sigma Y\mathrm{z}}=\frac{\Sigma Z\mathrm{x}}{\Sigma Z\mathrm{z}}.$$

Eine der Projectionen des Armes, z. B. $\mathfrak{x}$, kann, wenn diese Bedingungsgleichungen erfüllt sind, willkürlich gewählt werden und man hat

$$\mathfrak{y}=\mathfrak{x}\cdot\frac{\Sigma X\mathrm{y}}{\Sigma X\mathrm{x}},\quad \mathfrak{z}=\mathfrak{x}\cdot\frac{\Sigma X\mathrm{z}}{\Sigma X\mathrm{x}},$$

ferner

$$X=0,\ Y=0,\ Z=0,\ \mathfrak{X}=\frac{\Sigma X\mathrm{x}}{\mathfrak{x}},\ \mathfrak{Y}=\frac{\Sigma Y\mathrm{x}}{\mathfrak{x}},\ \mathfrak{Z}=\frac{\Sigma Z\mathrm{x}}{\mathfrak{x}}.$$

Die gegebenen Kräfte können immer durch ein Paar ersetzt werden, dessen Arm eine willkürliche Länge und Anfangspunkt gegeben werden kann, dessen Neigung aber bestimmt ist. Bezeichnet man wie vorher durch λ, μ, ν die Winkel, welche der Arm mit den drei Coordinataxen bildet, so ist

$$\cos\lambda=\frac{\Sigma X\mathrm{x}}{\sqrt{(\Sigma X\mathrm{x})^2+(\Sigma X\mathrm{y})^2+(\Sigma X\mathrm{z})^2}}=\frac{\Sigma Y\mathrm{x}}{\sqrt{(\Sigma Y\mathrm{x})^2+(\Sigma Y\mathrm{y})^2+(\Sigma Y\mathrm{z})^2}}$$
$$=\frac{\Sigma Z\mathrm{x}}{\sqrt{(\Sigma Z\mathrm{x})^2+(\Sigma Z\mathrm{y})^2+(\Sigma Z\mathrm{z})^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{\Sigma Xy}{\sqrt{(\Sigma Xx)^2 + (\Sigma Xy)^2 + (\Sigma Xz)^2}} = \frac{\Sigma Yy}{\sqrt{(\Sigma Yx)^2 + (\Sigma Yy)^2 + (\Sigma Yz)^2}}$$
$$= \frac{\Sigma Zy}{\sqrt{(\Sigma Zx)^2 + (\Sigma Zy)^2 + (\Sigma Zz)^2}},$$
$$\cos\nu = \frac{\Sigma Xz}{\sqrt{(\Sigma Xx)^2 + (\Sigma Xy)^2 + (\Sigma Xz)^2}} = \frac{\Sigma Yz}{\sqrt{(\Sigma Yx)^2 + (\Sigma Yy)^2 + (\Sigma Yz)^2}}$$
$$= \frac{\Sigma Zz}{\sqrt{(\Sigma Zx)^2 + (\Sigma Zy)^2 + (\Sigma Zz)^2}}.$$

Die Bedingungsgleichungen (1) werden erfüllt, wenn die gegebenen Kräfte alle parallel sind, und weder eine Resultantkraft haben, noch im Gleichgewichte sind.

§. 59.

Sind keine der vorhergehenden Bedingungsgleichungen erfüllt, so können die Kräfte doch immer durch d r e i neue Kräfte, oder, was dasselbe ist, durch eine Kraft und zwei Kräftepaare ersetzt werden, den einzigen Fall ausgenommen, wenn die Mittelkraft Null ist.

Es sei R die ersetzende Kraft, X, Y, Z ihre Componenten, x, y, z die Coordinaten ihres Wirkepunktes, $\mathfrak{R}$ die Kraft des ersten ersetzenden Paares, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ ihre Componenten, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Projectionen ihres Armes, $\mathfrak{R}'$ die Kraft des zweiten ersetzenden Paares, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ ihre Componenten, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ die Projectionen ihres Armes. Die Bedingungsgleichungen, welche ausdrücken, dass die gegebenen Kräfte mit der Kraft $-R$ und mit den beiden Kräftepaaren $(-\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$, $(-\mathfrak{R}', \mathfrak{R}')$ in fortwährendem Gleichgewicht sind, welche Stellung auch dem Körper gegeben wird, sind nach §. 55

$$\Sigma X = X,\quad \Sigma Y = Y,\quad \Sigma Z = Z,$$
$$\Sigma Xx = Xx + \mathfrak{X}\mathfrak{x} + \mathfrak{X}'\mathfrak{x}',\quad \Sigma Xy = Xy + \mathfrak{X}\mathfrak{y} + \mathfrak{X}'\mathfrak{y}',\quad \Sigma Xz = Xz + \mathfrak{X}\mathfrak{z} + \mathfrak{X}'\mathfrak{z}',$$
$$\Sigma Yx = Yx + \mathfrak{Y}\mathfrak{x} + \mathfrak{Y}'\mathfrak{x}',\quad \Sigma Yy = Yy + \mathfrak{Y}\mathfrak{y} + \mathfrak{Y}'\mathfrak{y}',\quad \Sigma Yz = Yz + \mathfrak{Y}\mathfrak{z} + \mathfrak{Y}'\mathfrak{z}',$$
$$\Sigma Zx = Zx + \mathfrak{Z}\mathfrak{x} + \mathfrak{Z}'\mathfrak{x}',\quad \Sigma Zy = Zy + \mathfrak{Z}\mathfrak{y} + \mathfrak{Z}'\mathfrak{y}',\quad \Sigma Zz = Zz + \mathfrak{Z}\mathfrak{z} + \mathfrak{Z}'\mathfrak{z}'.$$

Eliminirt man hier erst die Grössen X, Y, Z, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ und setzt der Kürze wegen

$$\mathfrak{y}\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}\mathfrak{y}' = u,\quad \mathfrak{z}\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}\mathfrak{z}' = v,\quad \mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}' = w,\quad ux + vy + wz = s,$$

so wird
$$u\Sigma Xx + v\Sigma Xy + w\Sigma Xz - s\Sigma X = o,$$
$$u\Sigma Yx + v\Sigma Yy + w\Sigma Yz - s\Sigma Y = o,$$
$$u\Sigma Zx + v\Sigma Zy + w\Sigma Zz - s\Sigma Z = o.$$

Setzt man jetzt der Kürze willen

$$\begin{aligned}
&\Sigma X(\Sigma Zz\,\Sigma Yy - \Sigma Yz\,\Sigma Zy) + \Sigma Y(\Sigma Zy\,\Sigma Xz - \Sigma Zz\,\Sigma Xy)\\
&\qquad + \Sigma Z(\Sigma Yz\,\Sigma Xy - \Sigma Yy\,\Sigma Xz) = U,\\
&\Sigma X(\Sigma Yz\,\Sigma Zx - \Sigma Zz\,\Sigma Yx) + \Sigma Y(\Sigma Zz\,\Sigma Xx - \Sigma Zx\,\Sigma Xz)\\
&\qquad + \Sigma Z(\Sigma Yx\,\Sigma Xz - \Sigma Yx\,\Sigma Xx) = V,\\
&\Sigma X(\Sigma Yx\,\Sigma Zy - \Sigma Zx\,\Sigma Yy) + \Sigma Y(\Sigma Zy\,\Sigma Xx - \Sigma Zx\,\Sigma Xy)\\
&\qquad + \Sigma Z(\Sigma Yx\,\Sigma Xy - \Sigma Yy\,\Sigma Xx) = W,\\
&\Sigma Xx(\Sigma Zz\,\Sigma Yy - \Sigma Yz\,\Sigma Zy) + \Sigma Yx(\Sigma Zy\,\Sigma Xz - \Sigma Zz\,\Sigma Xy)\\
&\qquad + \Sigma Zx(\Sigma Yz\,\Sigma Xy - \Sigma Yy\,\Sigma Xz) = S,
\end{aligned}$$

so erhält man aus den vorigen Gleichungen, wenn nicht die Mittelkraft Null ist, d. h. wenn nicht zugleich $\Sigma X = o$, $\Sigma Y = o$, $\Sigma Z = o$,

$$\frac{u}{s} = \frac{U}{S},\quad \frac{v}{s} = \frac{V}{S},\quad \frac{w}{s} = \frac{W}{S}.$$

Nimmt man die Grössen x, y, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$ willkürlich an, so findet man

$$\mathfrak{z} = -\frac{U\mathfrak{x} + V\mathfrak{y}}{W},\quad \mathfrak{z}' = -\frac{U\mathfrak{x}' + V\mathfrak{y}'}{W},\quad z = \frac{S - Ux - Vy}{W}.$$

Diese Gleichungen bezeichnen, dass der Punkt (x, y, z) willkürlich in einer Ebene gewählt werden kann, deren Gleichung

$$Ux + Vy + Wz = S$$

ist, und die beiden Arme, deren Projectionen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ sind, können beliebig dieser Ebene parallel angenommen werden. Diese Ebene wird die Centralebene der gegebenen Kräfte genannt, und ist im Körper fest. Die Kräfte $X, Y, Z, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}'$ werden

$$X = \Sigma X,\quad Y = \Sigma Y,\quad Z = \Sigma Z,$$

$$\mathfrak{X} = \frac{\mathfrak{y}'\Sigma Xx - \mathfrak{x}'\Sigma Xy - (\mathfrak{y}'x - \mathfrak{x}'y)\Sigma X}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'},$$

$$\mathfrak{Y} = \frac{\mathfrak{y}'\Sigma Yx - \mathfrak{x}'\Sigma Yy - (\mathfrak{y}'x - \mathfrak{x}'y)\Sigma Y}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'},$$

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{y}'\Sigma Zx - \mathfrak{x}'\Sigma Zy - (\mathfrak{y}'x - \mathfrak{x}'y)\Sigma Z}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'},$$

$$\mathfrak{X}' = \frac{\mathfrak{x}\Sigma Xy - \mathfrak{y}\Sigma Xx - (\mathfrak{x}y - \mathfrak{y}x)\Sigma X}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'},$$

$$\mathfrak{Y}' = \frac{\mathfrak{x}\Sigma Yy - \mathfrak{y}\Sigma Yx - (\mathfrak{x}y - \mathfrak{y}x)\Sigma Y}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'},$$

$$\mathfrak{Z}' = \frac{\mathfrak{x}\Sigma Zy - \mathfrak{y}\Sigma Zx - (\mathfrak{x}y - \mathfrak{y}x)\Sigma Z}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'}.$$

Wenn die Mittelkraft nicht Null ist, können die gegebenen Kräfte immer zu einer Kraft und zu zwei Paaren reducirt werden. Der Wirkepunkt der Kraft kann beliebig in der Centralebene gewählt werden, und sie ist der Mittelkraft des Systems gleich und parallel; nimmt man die Arme der beiden Paare auf zwei der Centralebene parallelen Linien beliebig an, so wird die Grösse der Kräfte dieser Paare von der willkürlich gewählten Lage und Grösse der Arme und von der Lage des Wirkepunkts der Kraft abhängig.

Statt auf eine Kraft und auf zwei Paare können die gegebenen Kräfte auch auf drei Kräfte reducirt werden, deren Wirkepunkte überdies willkürlich in der Centralebene gewählt werden können. Die Componenten und Coordinaten der Wirkepunkte dieser Kräfte sind dann

$$X-\mathfrak{X}-\mathfrak{X}',\ Y-\mathfrak{Y}-\mathfrak{Y}',\ Z-\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}',\ x,\ y,\ z,$$
$$\mathfrak{X},\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z},\ x+\mathfrak{x},\ y+\mathfrak{y},\ z+\mathfrak{z},$$
$$\mathfrak{X}',\mathfrak{Y}',\mathfrak{Z}',\ x+\mathfrak{x}',\ y+\mathfrak{y}',\ z+\mathfrak{z}'.$$

§. 60.

Unter den verschiedenen Lagen, welche man dem Wirkepunkt der Kraft und den Armen der beiden Paare geben kann, ist vorzüglich diejenige zu merken, welche so gewählt ist, dass jede Kraft auf der Richtung der anderen senkrecht steht und die Arme der beiden Paare auch auf einander senkrecht sind. Die Grössen x, y, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$ müssen dann so gewählt werden, dass

$$X\mathfrak{X}+Y\mathfrak{Y}+Z\mathfrak{Z}=o,\ X\mathfrak{X}'+Y\mathfrak{Y}'+Z\mathfrak{Z}'=o,\ \mathfrak{X}\mathfrak{X}'+\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}'+\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'=o,$$
$$\mathfrak{x}\mathfrak{x}'+\mathfrak{y}\mathfrak{y}'+\mathfrak{z}\mathfrak{z}'=o.$$

Substituirt man in die zwei ersten dieser Gleichungen die Werthe von X, Y, Z, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$, so erhält man

$$\mathfrak{y}'[\Sigma X\Sigma Xx+\Sigma Y\Sigma Yx+\Sigma Z\Sigma Zx]-\mathfrak{x}'[\Sigma X\Sigma Xy+\Sigma Y\Sigma Yy+\Sigma Z\Sigma Zy]$$
$$-(\mathfrak{y}'x-\mathfrak{x}'y)[(\Sigma X)^2+(\Sigma Y)^2+(\Sigma Z)^2]=o,$$
$$\mathfrak{y}[\Sigma X\Sigma Xx+\Sigma Y\Sigma Yx+\Sigma Z\Sigma Zx]-\mathfrak{x}[\Sigma X\Sigma Xy+\Sigma Y\Sigma Yy+\Sigma Z\Sigma Zy]$$
$$-(\mathfrak{y}x-\mathfrak{x}y)[(\Sigma X)^2+(\Sigma Y)^2+(\Sigma Z)^2]=o,$$

und hieraus

$$x=\frac{\Sigma X\Sigma Xx+\Sigma Y\Sigma Yx+\Sigma Z\Sigma Zx}{(\Sigma X)^2+(\Sigma Y)^2+(\Sigma Z)^2},\quad y=\frac{\Sigma X\Sigma Xy+\Sigma Y\Sigma Yy+\Sigma Z\Sigma Zy}{(\Sigma X)^2+(\Sigma Y)^2+(\Sigma Z)^2},$$

und wiederum

$$z = \frac{S - Ux - Vy}{w} = \frac{\Sigma X \Sigma Xz + \Sigma Y \Sigma Yz + \Sigma Z \Sigma Zz}{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}.$$

Dieser Punkt (x, y, z) ist aber nun der Mittelpunkt aller mit der Mittelkraft parallelen Projectionen der gegebenen Kräfte. Denn es ist die Projection der im Punkte (x, y, z) wirkenden Kraft P: $\frac{X\Sigma X + Y\Sigma Y + Z\Sigma Z}{\sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}}$, und folglich werden die Coordinaten des Mittelpunkts dieser Kräfte die obigen Werthe erhalten.

Dieser Punkt (x, y, z) wird der Mittelpunkt der Centralebene genannt.

Wir werden jetzt diesen Punkt x, y, z als Anfangspunkt der Coordinaten und den Körper in eine solche Stellung gedreht annehmen, dass die Centralebene mit der xy Ebene zusammenfällt. Wir nehmen ferner die Arme der beiden Paare in der Centralebene und senkrecht auf einander an; der erste Arm bilde einen Winkel u mit der x Axe, der zweite den Winkel $\frac{\pi}{2} + u$, so soll u jetzt so bestimmt werden, dass die Kräfte $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$, $(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}')$ senkrecht auf einander stehen, oder dass $\mathfrak{X}\mathfrak{X}' + \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}' + \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}' = 0$. Weil jetzt x, y, z gleich Null sind, geben die Formeln des vorigen Paragraphen

$$\mathfrak{X} = \frac{\mathfrak{y}'\Sigma Xx - \mathfrak{x}'\Sigma Xy}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'}, \quad \mathfrak{X}' = \frac{\mathfrak{x}\Sigma Xy - \mathfrak{y}\Sigma Xx}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'},$$

$$\mathfrak{Y} = \frac{\mathfrak{y}'\Sigma Yx - \mathfrak{x}'\Sigma Yy}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'}, \quad \mathfrak{Y}' = \frac{\mathfrak{x}\Sigma Yy - \mathfrak{y}\Sigma Xx}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'},$$

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{y}'\Sigma Zx - \mathfrak{x}'\Sigma Zy}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'}, \quad \mathfrak{Z}' = \frac{\mathfrak{x}\Sigma Zy - \mathfrak{y}\Sigma Xx}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'},$$

folglich

$$\mathfrak{X}\mathfrak{X}' + \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}' + \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}' = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' + \mathfrak{y}\mathfrak{x}'}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'}[\Sigma Xx\Sigma Xy + \Sigma Yx\Sigma Yy + \Sigma Zx\Sigma Zy]$$
$$- \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}'[(\Sigma Xx)^2 + (\Sigma Yx)^2 + (\Sigma Zx)^2] + \mathfrak{y}\mathfrak{y}'[(\Sigma Xy)^2 + (\Sigma Yy)^2 + (\Sigma Zy)^2]}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'}.$$

Es ist aber jetzt

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} \operatorname{tang} u, \quad \mathfrak{y}' = -\mathfrak{x}' \operatorname{cotang} u,$$

daher

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y}' + \mathfrak{y}\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}\mathfrak{x}'(\operatorname{tang} u - \operatorname{cotang} u) = -2\mathfrak{x}\mathfrak{x}' \operatorname{cotang} 2u,$$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}\mathfrak{y}' = \mathfrak{y}\mathfrak{y}'(1 - \operatorname{tang} u \operatorname{cotang} u) = 0, \quad \mathfrak{y}\mathfrak{y}' = -\mathfrak{x}\mathfrak{x}',$$

und

$$\mathfrak{X}\mathfrak{X}'+\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}'+\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}'=\frac{-\mathfrak{x}\mathfrak{x}'}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}'-\mathfrak{y}\mathfrak{x}'}[2\text{cotang}\,2u(\Sigma Xx\Sigma Xy+\Sigma Yx\Sigma Yy+\Sigma Zx\Sigma Zy)$$
$$+(\Sigma Xx)^2+(\Sigma Yx)^2+(\Sigma Zx)^2-(\Sigma Xy)^2-(\Sigma Yy)^2-(\Sigma Zy)^2].$$

Damit dieser Ausdruck Null werde, muss man u so wählen, dass

$$\text{cotang}\,2u=\frac{(\Sigma Xy)^2+(\Sigma Yy)^2+(\Sigma Zy)^2-(\Sigma Xx)^2-(\Sigma Yx)^2-(\Sigma Zx)^2}{2(\Sigma Xx\Sigma Xy+\Sigma Yx\Sigma Yy+\Sigma Zx\Sigma Zy)}.$$

Zieht man durch den Mittelpunkt der Centralebene zwei mit den auf diese Weise bestimmten Richtungen der Arme parallele Linien, so werden diese die Mittellinien der Centralebene genannt.

§. 61.

Wenn die Mittelkraft Null ist, d. h. $\Sigma X=o$, $\Sigma Y=o$, $\Sigma Z=o$, so erhält man aus den Gleichungen (1) des §. 59 die folgende Bedingungsgleichung $S=o$.

Wenn diese Bedingungsgleichung erfüllt ist, findet man

$$\frac{u}{w}=\frac{\Sigma Xy\Sigma Yz-\Sigma Xz\Sigma Yy}{\Sigma Xx\Sigma Yy-\Sigma Xy\Sigma Yx},\quad \frac{v}{w}=\frac{\Sigma Xz\Sigma Yx-\Sigma Xx\Sigma Yz}{\Sigma Xx\Sigma Yy-\Sigma Xy\Sigma Yx}.$$

Zwischen den 6 Grössen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ finden dann nur zwei Gleichungen statt. Nimmt man $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$ willkürlich, so findet man

$$\mathfrak{z}=-\mathfrak{x}\cdot\frac{u}{w}-\mathfrak{y}\cdot\frac{v}{w},\quad \mathfrak{z}'=-\mathfrak{x}'\frac{u}{w}-\mathfrak{y}'\cdot\frac{v}{w},$$

d. h. beide Arme müssen der Ebene

$$x(\Sigma Xy\Sigma Yz-\Sigma Xz\Sigma Yy)+y(\Sigma Xz\Sigma Yx-\Sigma Xx\Sigma Yz)$$
$$+z(\Sigma Xx\Sigma Yy-\Sigma Xy\Sigma Yx)=o$$

parallel sein, können aber mit beliebiger Grösse und Richtung angenommen werden. Für die Kräfte findet man ferner

$$X=o,\quad Y=o,\quad Z=o,$$

$$\mathfrak{X}=\frac{\mathfrak{y}'\Sigma Xx-\mathfrak{x}'\Sigma Xy}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}'-\mathfrak{y}\mathfrak{x}'},\quad \mathfrak{Y}=\frac{\mathfrak{y}'\Sigma Yx-\mathfrak{x}'\Sigma Yy}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}'-\mathfrak{y}\mathfrak{x}'},\quad \mathfrak{Z}=\frac{\mathfrak{y}'\Sigma Zx-\mathfrak{x}'\Sigma Zy}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}'-\mathfrak{y}\mathfrak{x}'},$$

$$\mathfrak{X}'=\frac{\mathfrak{x}\Sigma Xy-\mathfrak{y}\Sigma Xx}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}'-\mathfrak{y}\mathfrak{x}'},\quad \mathfrak{Y}'=\frac{\mathfrak{x}\Sigma Yy-\mathfrak{y}\Sigma Yx}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}'-\mathfrak{y}\mathfrak{x}'},\quad \mathfrak{Z}'=\frac{\mathfrak{x}\Sigma Zy-\mathfrak{y}\Sigma Zx}{\mathfrak{x}\mathfrak{y}'-\mathfrak{y}\mathfrak{x}'}.$$

§. 62.

Wenn endlich die Mittelkraft Null ist, die Bedingungsgleichung $S=o$ aber nicht stattfindet, so können immer die gegebenen Kräfte auf drei Kräftepaare reducirt werden. Es seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Componenten der Kraft, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Projectionen des Armes des ersten

Paares, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ die Componenten der Kraft und $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ die Projectionen des Armes des zweiten Paares, $\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{Y}''$, $\mathfrak{Z}''$ die Componenten der Kraft und $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{y}''$, $\mathfrak{z}''$ die Projectionen des Armes des zweiten Paares, so werden die Bedingungsgleichungen des §. 55

$$\Sigma Xx = \mathfrak{X}\mathfrak{x} + \mathfrak{X}'\mathfrak{x}' + \mathfrak{X}''\mathfrak{x}'', \quad \Sigma Xy = \mathfrak{X}\mathfrak{y} + \mathfrak{X}'\mathfrak{y}' + \mathfrak{X}''\mathfrak{y}'',$$
$$\Sigma Yx = \mathfrak{Y}\mathfrak{x} + \mathfrak{Y}'\mathfrak{x}' + \mathfrak{Y}''\mathfrak{x}'', \quad \Sigma Yy = \mathfrak{Y}\mathfrak{y} + \mathfrak{Y}'\mathfrak{y}' + \mathfrak{Y}''\mathfrak{y}'',$$
$$\Sigma Zx = \mathfrak{Z}\mathfrak{x} + \mathfrak{Z}'\mathfrak{x}' + \mathfrak{Z}''\mathfrak{x}'', \quad \Sigma Zy = \mathfrak{Z}\mathfrak{y} + \mathfrak{Z}'\mathfrak{y}' + \mathfrak{Z}''\mathfrak{y}'',$$
$$\Sigma Xz = \mathfrak{X}\mathfrak{z} + \mathfrak{X}'\mathfrak{z}' + \mathfrak{X}''\mathfrak{z}'',$$
$$\Sigma Yz = \mathfrak{Y}\mathfrak{z} + \mathfrak{Y}'\mathfrak{z}' + \mathfrak{Y}''\mathfrak{z}'',$$
$$\Sigma Zz = \mathfrak{Z}\mathfrak{z} + \mathfrak{Z}'\mathfrak{z}' + \mathfrak{Z}''\mathfrak{z}''.$$

Die Grössen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{y}''$, $\mathfrak{z}''$, d. h. die Grösse und Lage der Arme könne ganz willkürlich angenommen werden. Die Kräfte $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \ldots \mathfrak{Z}''$ werden dann durch die folgenden Gleichungen bestimmt

$$\mathfrak{X} = \frac{\Sigma Xx(\mathfrak{z}''\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''\mathfrak{z}') + \Sigma Xy(\mathfrak{z}'\mathfrak{x}'' - \mathfrak{x}'\mathfrak{z}'') + \Sigma Xz(\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'' - \mathfrak{y}'\mathfrak{x}'')}{\mathfrak{x}(\mathfrak{z}''\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''\mathfrak{z}') + \mathfrak{y}(\mathfrak{z}'\mathfrak{x}'' - \mathfrak{x}'\mathfrak{z}'') + \mathfrak{z}(\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'' - \mathfrak{y}'\mathfrak{x}'')},$$
$$\mathfrak{Y} = \frac{\Sigma Yx(\mathfrak{z}''\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''\mathfrak{z}') + \Sigma Yy(\mathfrak{z}'\mathfrak{x}'' - \mathfrak{x}'\mathfrak{z}'') + \Sigma Yz(\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'' - \mathfrak{y}'\mathfrak{x}'')}{\mathfrak{x}(\mathfrak{z}''\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''\mathfrak{z}') + \mathfrak{y}(\mathfrak{z}'\mathfrak{x}'' - \mathfrak{x}'\mathfrak{z}'') + \mathfrak{z}(\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'' - \mathfrak{y}'\mathfrak{x}'')},$$

u. s. w.

§. 63.

Wir haben §. 60 gesehen, dass, wenn mehrere Kräfte auf einen Körper wirken und bei jeder Stellung, welche man dem Körper geben mag, in unveränderlichen Richtungen mit unveränderlichen Intensitäten an ihren Angriffspunkten haften, so können sie, wenn die Mittelkraft nicht Null ist, durch eine Kraft und zwei Kräftepaare ersetzt werden. Der Wirkepunkt der Kraft kann im Mittelpunkte der Centralebene gewählt werden, und diese Kraft ist der Mittelkraft des Systems gleich und parallel. Die Arme der beiden Paare können den Mittellinien parallel und mit beliebiger Länge angenommen werden. Die Kräfte dieser Paare sind dann auf einander und auf der Resultantkraft senkrecht. Bei jeder Stellung des Körpers können diese Paare zu einem Resultantenpaar reducirt werden, und durch Versetzen der Kraft in irgend einen Punkt der zu dieser Stellung gehörigen Centralaxe (§. 51) können wieder das Resultantenpaar und das durch die Versetzung hervorgebrachte Paar zu einem

auf der Centralaxe senkrechten Kräftepaar zusammengesetzt werden. Dieses ist alsdann das bei dieser Stellung des Körpers möglichst kleinste Paar und gleich der Projection des ersten Resultantenpaares auf einer Ebene, welche senkrecht in der Richtung der Mittelkraft ist (§. 51).

Verändert man die Richtung des Körpers, so verändert sich auch die Lage dieser Centralaxe im Körper, so wie die Grösse des dazu gehörigen kleinsten Paares. Wir werden jetzt die Stellungen der Centralaxe suchen, wenn das kleinste Kräftepaar Null ist, und die Kräfte folglich zu einer Resultantenkraft reducirbar sind.

Statt aber wie bisher Alles auf die im Raume festen Coordinatenaxen zu beziehen, d. h. die Richtung der Kräfte als unveränderlich und die Lage des Körpers als drehbar zu betrachten, werden wir jetzt drei im Körper feste Axen zu Coordinataxen annehmen, und daher den Körper als fest, die Richtungen der Kräfte aber als veränderlich betrachten, doch so, dass die Kräfte fortwährend dieselben Winkel unter einander bilden, also immer dieselbe Stellung zu drei im Raume beweglichen Coordinatenaxen haben.

Nehmen wir jetzt als Anfangspunkt des im Körper festen Coordinatensystems den Mittelpunkt der Centralebene, die z Axe senkrecht auf derselben, die x und y Axe längs der beiden Mittellinien an, so wird, wenn wie vorher $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Projectionen des Armes des ersten Paares, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ diejenigen des zweiten bezeichnen,

$$\mathfrak{y} = o, \quad \mathfrak{z} = o, \quad \mathfrak{y}' = o, \quad \mathfrak{z}' = o.$$

Bezeichnet man ferner wie vorher durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Componenten der Kraft $\mathfrak{R}$ des ersten Paares, durch $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ diejenigen der Kraft $\mathfrak{R}'$ des zweiten Paares, so wird nach §. 60

$$X = \Sigma X, \quad Y = \Sigma Y, \quad Z = \Sigma Z,$$

$$\mathfrak{X} = \frac{\Sigma Xx}{\mathfrak{x}}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{\Sigma Yx}{\mathfrak{x}}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{\Sigma Zx}{\mathfrak{x}}, \quad \mathfrak{X}' = \frac{\Sigma Xy}{\mathfrak{y}'}, \quad \mathfrak{Y}' = \frac{\Sigma Yy}{\mathfrak{y}'}, \quad \mathfrak{Z}' = \frac{\Sigma Zy}{\mathfrak{y}'}.$$

Die Componenten des Resultantenpaares der beiden gegebenen Kräftepaare werden, weil die Resultantenkraft im Anfangspunkt der Coordinaten angebracht ist,

$$\mathrm{L} = \mathfrak{Y}\mathfrak{z} + \mathfrak{Y}'\mathfrak{z}' - \mathfrak{Z}\mathfrak{y} - \mathfrak{Z}'\mathfrak{y}' = -\mathfrak{Z}'\mathfrak{y}',$$
$$\mathrm{M} = \mathfrak{Z}\mathfrak{x} + \mathfrak{Z}'\mathfrak{x}' - \mathfrak{X}\mathfrak{z} - \mathfrak{X}'\mathfrak{z}' = \mathfrak{Z}\mathfrak{x},$$
$$\mathrm{N} = \mathfrak{X}\mathfrak{y} + \mathfrak{X}'\mathfrak{y}' - \mathfrak{Y}\mathfrak{x} - \mathfrak{Y}'\mathfrak{x}' = \mathfrak{X}'\mathfrak{y}' - \mathfrak{Y}\mathfrak{x}.$$

Hieraus findet man alsdann nach §. 51 das kleinste Kräftepaar

$$\mathfrak{S} = \frac{X\mathrm{L} + Y\mathrm{M} + Z\mathrm{N}}{R} = \frac{\mathfrak{y}'(Z\mathfrak{X}' - X\mathfrak{Z}') + \mathfrak{x}(Y\mathfrak{Z} - Z\mathfrak{Y})}{R}.$$

Es ist jetzt identisch

$$(Z\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Z}'Y)\mathfrak{X}' + (X\mathfrak{Z}' - \mathfrak{X}'Z)\mathfrak{Y}' + (Y\mathfrak{X}' - \mathfrak{Y}'X)\mathfrak{Z}' = 0,$$
$$(Z\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Z}'Y)X + (X\mathfrak{Z}' - \mathfrak{X}'Z)Y + (Y\mathfrak{X}' - \mathfrak{Y}'X)Z = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den folgenden

$$\mathfrak{X}\mathfrak{X}' + \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}' + \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}' = 0, \quad \mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z = 0,$$

so erhält man

$$Z\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Z}'Y = \mathrm{m}\mathfrak{X}, \quad X\mathfrak{Z}' - \mathfrak{X}'Z = \mathrm{m}\mathfrak{Y}, \quad Y\mathfrak{X}' - \mathfrak{Y}'X = \mathrm{m}\mathfrak{Z},$$

wo m eine noch unbekannte Grösse ist. Werden die letzten Gleichungen quadrirt und addirt, so erhält man

$$\mathrm{m}^2(\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2) = (Z\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Z}'Y)^2 + (X\mathfrak{Z}' - \mathfrak{X}'Z)^2 + (Y\mathfrak{X}' - \mathfrak{Y}'X)^2,$$

oder, durch eine leichte Reduction,

$$\mathrm{m}^2\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R}'^2R^2 - (X\mathfrak{X}' + Y\mathfrak{Y}' + Z\mathfrak{Z}')^2 = \mathfrak{R}'^2R^2,$$

weil

$$X\mathfrak{X}' + Y\mathfrak{Y}' + Z\mathfrak{Z}' = 0.$$

Hieraus findet man alsdann

$$\mathrm{m}^2 = \frac{\mathfrak{R}'^2R^2}{\mathfrak{R}^2}, \quad \mathrm{m} = \frac{\mathfrak{R}'R}{\mathfrak{R}},$$

$$Z\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Z}'Y = \frac{\mathfrak{R}'R}{\mathfrak{R}}\mathfrak{X}, \quad X\mathfrak{Z}' - \mathfrak{X}'Z = \frac{\mathfrak{R}'R}{\mathfrak{R}}\mathfrak{Y}, \quad Y\mathfrak{X}' - \mathfrak{Y}'X = \frac{\mathfrak{R}'R}{\mathfrak{R}}\mathfrak{Z}.$$

Ebenso findet man

$$\mathfrak{Z}Y - Z\mathfrak{Y} = \frac{\mathfrak{R}R}{\mathfrak{R}'}\mathfrak{X}', \quad \mathfrak{X}Z - X\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{R}R}{\mathfrak{R}'}\mathfrak{Y}', \quad \mathfrak{Y}X - Y\mathfrak{X} = \frac{\mathfrak{R}R}{\mathfrak{R}'}\mathfrak{Z}'.$$

Der vorher entwickelte Werth von $\mathfrak{S}$ kann daher auf die Form gebracht werden

$$\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{y}'(Z\mathfrak{X}' - X\mathfrak{Z}') + \mathfrak{x}(Y\mathfrak{Z} - Z\mathfrak{Y})}{R} = \mathfrak{x}\mathfrak{X}'\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} - \mathfrak{y}'\mathfrak{Y}\frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}}.$$

Bezeichnet man durch x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Centralaxe, so ist nach §. 51

$$Yz - Zy = \mathrm{L} - \frac{X\mathfrak{S}}{R}, \quad Zx - Xz = \mathrm{M} - \frac{Y\mathfrak{S}}{R}, \quad Xy - Yx = \mathrm{N} - \frac{Z\mathfrak{S}}{R}.$$

Soll jetzt das kleinste Paar $\mathfrak{S}$ Null sein, so wird die Lage der ersetzenden Kraft durch die folgenden Gleichungen bestimmt

$Yz - Zy = L = -\mathfrak{Z}'\mathfrak{y}'$, $Zx - Xz = M = \mathfrak{Z}\mathfrak{x}$, $Xy - Yx = N = \mathfrak{X}'\mathfrak{y}' - \mathfrak{Y}\mathfrak{x}$,

von denen, vermöge der erfüllten Bedingung $\mathfrak{S} = o$, die eine von den beiden andern abhängig ist. Diesen Gleichungen kann folgender Weise, unabhängig von der Richtung der Kräfte, Genüge geleistet werden. Man setze erst $x = o$, und erhält alsdann

$$Xz = -\mathfrak{Z}\mathfrak{x},\quad Xy = \mathfrak{X}'\mathfrak{y}' - \mathfrak{Y}\mathfrak{x}.$$

Quadrirt man diese beide Gleichungen, dividirt die erste mit $\mathfrak{x}^2\mathfrak{R}^2 - \mathfrak{y}'^2\mathfrak{R}'^2$ und die zweite mit $\mathfrak{x}^2\mathfrak{R}^2$, addirt hierauf, so erhält man

$$X^2\left(\frac{y^2}{\mathfrak{x}^2\mathfrak{R}^2 - \mathfrak{y}'^2\mathfrak{R}'^2} + \frac{z^2}{\mathfrak{x}^2\mathfrak{R}^2}\right) = \frac{\mathfrak{x}^2(\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2) - 2\mathfrak{x}\mathfrak{y}'\mathfrak{X}'\mathfrak{Y} + \mathfrak{y}'^2\left(\frac{\mathfrak{x}'^2}{\mathfrak{R}'^2} - \frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{R}^2}\right)\mathfrak{R}'^2}{\mathfrak{x}^2\mathfrak{R}^2 - \mathfrak{y}'^2\mathfrak{R}'^2}.$$

Es ist aber, weil die drei Kräfte R, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ immer auf einander senkrecht stehen, die Summe der Quadraten der Cosinus, welche die x Axe mit diesen drei Kräften bildet, gleich 1, d. h.

$$\left(\frac{X}{R}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{R}}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{X}'}{\mathfrak{R}'}\right)^2 = 1,\ \text{und auch}\ \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{R}^2} = 1,$$

daher

$$\mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = \mathfrak{R}^2\left[\left(\frac{X}{R}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{X}'}{\mathfrak{R}'}\right)^2\right],\quad \frac{\mathfrak{X}'^2}{\mathfrak{R}'^2} - \frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{R}^2} = \left(\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{R}}\right)^2 - \left(\frac{X}{R}\right)^2.$$

Ferner ist

$$\mathfrak{S}^2 = \mathfrak{x}^2\mathfrak{R}^2\left(\frac{\mathfrak{X}'}{\mathfrak{R}'}\right)^2 - 2\mathfrak{x}\mathfrak{y}'\mathfrak{X}'\mathfrak{Y} + \mathfrak{y}'^2\mathfrak{R}'^2\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{R}}\right)^2 = o.$$

Diese Werthe substituirt, geben alsdann leicht

$$\frac{y^2}{\mathfrak{x}^2\mathfrak{R}^2 - \mathfrak{y}'^2\mathfrak{R}'^2} + \frac{z^2}{\mathfrak{x}^2\mathfrak{R}^2} = \frac{1}{R^2},\ \text{während zugleich}\ x = o.$$

Wird in die obigen Gleichungen die ersetzende Kraft $y = o$ gesetzt, so erhält man ebenso

$$\frac{x^2}{\mathfrak{y}'^2\mathfrak{R}'^2 - \mathfrak{x}^2\mathfrak{R}^2} + \frac{z^2}{\mathfrak{y}'^2\mathfrak{R}'^2} = \frac{1}{R^2},\ \text{während zugleich}\ y = o.$$

Diese Gleichungen stellen im Allgemeinen zwei in den Mittelebenen befindliche Kegelschnitte dar, von denen einer eine Ellipse, der andere ein Hyperbel ist, weil von den Differenzen $\mathfrak{y}'^2\mathfrak{R}'^2 - \mathfrak{x}^2\mathfrak{R}^2$ und $\mathfrak{x}^2\mathfrak{R}^2 - \mathfrak{y}'^2\mathfrak{R}'^2$ die eine nothwendig positiv, die andere negativ

ist. Die grosse Axe der Ellipse und die reelle der Hyperbel fallen in die z Axe, ihr Mittelpunkt in den Anfang der Coordinaten. Die Brennpunkte der einen fallen ferner mit den Scheiteln der andern zusammen. Wenn z. B. $\mathfrak{y}'\mathfrak{R}' > \mathfrak{r}\mathfrak{R}$, so wird die Ellipse in der xz-Ebene, die Hyperbel in der yz Ebene liegen. Für die Scheitel der Ellipse wird $x = o$, $z = \pm \mathfrak{y}' \cdot \frac{\mathfrak{R}'}{R}$, für die Brennpunkte $x = o$, $z = \pm \mathfrak{r} \cdot \frac{\mathfrak{R}}{R}$; für die Scheitel der Hyperbel $y = o$, $z = \pm \mathfrak{r} \cdot \frac{\mathfrak{R}}{R}$, und für ihre Brennpunkte $y = o$, $z = \pm \mathfrak{y}' \cdot \frac{\mathfrak{R}'}{R}$.

Die Ebenen der Hyperbel und der Ellipse, oder die durch die beiden Mittellinien senkrecht auf die Centralebene gelegten Ebenen, werden die Mittelebenen des Systems genannt.

Der hier entwickelte Satz, welcher zuerst vom Prof. F. Minding aufgestellt ist, lässt sich folgender Weise aussprechen:

Wenn die Kräfte eines beliebigen Systems, vorausgesetzt, dass ihre Mittelkraft nicht Null ist, bei jeder Stellung des Körpers immer mit unveränderlichen Intensitäten und in unveränderlichen Richtungen an ihren Angriffspunkten haften, und der Körper, was immer auf unzählige Arten geschehen kann, in solche Stellungen gebracht wird, in welchen die Kräfte sich durch eine einzige ersetzen lassen, so trifft die Richtung der ersetzenden Kraft immer im Körper eine Ellipse und eine Hyperbel, welche den Mittelpunkt der Centralebene zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, von denen die eine in der einen, die andere in der anderen der auf einander und auf der Centralebene senkrechten Mittelebenen liegt, und welche so mit einander verbunden sind, dass die Scheitel der einen mit den Brennpunkten der anderen zusammenfallen.

§. 64.

Wir werden jetzt die Bedingungen des Gleichgewichts und der Reduction der Kräfte suchen, wenn diese, wie vorher, mit unveränderlichen Intensitäten und in unveränderlichen Richtungen an ihren Angriffspunkten haften, der Körper aber nur um eine gegebene

Axe beliebig gedreht wird. Es sei diese die z Axe, so findet man ähnlicher Weise wie im §. 55 die folgenden Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts

$$\Sigma X = o,\ \Sigma Y = o,\ \Sigma Z = o,\ \Sigma X\mathrm{x} + \Sigma Y\mathrm{y} = o,\ \Sigma X\mathrm{y} - \Sigma Y\mathrm{x} = o,$$
$$\Sigma X\mathrm{z} = o,\ \Sigma Y\mathrm{z} = o,\ \Sigma Z\mathrm{x} = o,\ \Sigma Z\mathrm{y} = o.$$

Finden diese Bedingungsgleichungen statt, so wird der Körper bei jeder beliebigen Lage, um die z Axe gedreht, im Gleichgewicht sein.

§. 65.

Finden dagegen nicht alle jene Gleichungen statt, so können doch immer die Kräfte durch eine oder mehrere neue ersetzt werden. Suchen wir zuerst die Bedingungen, unter welchen die gegebenen Kräfte auf eine Kraft reducirt werden können. Es seien X, Y, Z die Componenten dieser Kraft, x, y, z die Coordinaten ihres Wirkepunktes, so wird

$$\Sigma X = X,\ \Sigma Y = Y,\ \Sigma Z = Z,$$
$$\Sigma X\mathrm{x} + \Sigma Y\mathrm{y} = Xx + Yy,\ \Sigma X\mathrm{y} - \Sigma Y\mathrm{x} = Xy - Yx,\ \Sigma X\mathrm{z} = Xz,$$
$$\Sigma Z\mathrm{x} = Zx,\ \Sigma Y\mathrm{z} = Yz,\ \Sigma Z\mathrm{y} = Zy.$$

Durch Elimination der Grössen X, Y, Z, x, y, z erhält man, wenn die Mittelkraft nicht Null ist, die folgenden Bedingungsgleichungen

$$\Sigma Y \Sigma X\mathrm{z} - \Sigma X \Sigma Y\mathrm{z} = o,$$
$$(\Sigma Z \Sigma X\mathrm{x} - \Sigma X \Sigma Z\mathrm{x}) + (\Sigma Z \Sigma Y\mathrm{y} - \Sigma Y \Sigma Z\mathrm{y}) = o,$$
$$(\Sigma Z \Sigma X\mathrm{y} - \Sigma X \Sigma Z\mathrm{y}) + (\Sigma Z \Sigma Y\mathrm{x} - \Sigma Y \Sigma Z\mathrm{x}) = o.$$

Wenn die Mittelkraft parallel mit der z Axe ist, wird man noch dazu die Bedingungsgleichungen

$\Sigma X\mathrm{z} = o,\ \Sigma Y\mathrm{z} = o$ haben.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, hat man

$$x = \frac{\Sigma Z\mathrm{x}}{\Sigma Z} = \frac{\Sigma X(\Sigma X\mathrm{x} + \Sigma Y\mathrm{y}) - \Sigma Y(\Sigma X\mathrm{y} - \Sigma Y\mathrm{x})}{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2},$$
$$y = \frac{\Sigma Z\mathrm{y}}{\Sigma Z} = \frac{\Sigma Y(\Sigma X\mathrm{x} + \Sigma Y\mathrm{y}) + \Sigma X(\Sigma X\mathrm{y} - \Sigma Y\mathrm{x})}{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2},$$
$$z = \frac{\Sigma X\mathrm{z}}{\Sigma X} = \frac{\Sigma Y\mathrm{z}}{\Sigma Y}.$$

Die gegebenen Kräfte haben nun immer eine Resultantkraft, welche bei jeder Stellung des Körpers durch den Punkt (x, y, z)

geht. Dieser Punkt (x, y, z) wird dann der Centralpunkt der gegebenen Kräfte in Bezug auf die z Axe genannt.

Wenn die gegebenen Kräfte alle in der xy Ebene liegen, finden jene Bedingungsgleichungen immer statt. Denn es ist alsdann

$$Z = o, \quad z = o.$$

Der Centralpunkt kann in diesem besonderen Falle durch Construction folgender Weise gefunden werden. Es sei (Fig. 25) P in A wirkend die eine, Q in B wirkend die zweite Kraft. Man suche ihren Durchschnitt C, und lege durch die drei Punkte A, B, C einen Kreis. Es sei ferner AD die Richtung der Resultante R, so ist D der Centralpunkt der beiden Kräfte. Um dieses zu zeigen, kann man, anstatt das System der Punkte A, B, D zu drehen, die drei Kräfte P, Q, R um ihre respectiven Angriffspunkte drehen, so aber dass sie fortwährend dieselben Winkel unter einander bilden. Es sei alsdann EP′ die neue Richtung der gegebenen Kraft P, so muss EQ′ diejenige der Kraft Q und ER′ diejenige der Kraft R sein. Denn es ist $\angle ACD = \angle AED$, $\angle DCB = \angle DEB$, $\angle ACB = \angle AEB$. D ist folglich der Centralpunkt der zwei Kräfte P und Q. Auf dieselbe Weise kann man ferner den Centralpunkt der Resultante R und einer dritten Kraft u. s. f. construiren.

Man kann auch alle Kräfte parallel mit zwei auf einander senkrechten Axen zerlegen, die mit jeder Axe parallelen Kräfte auf eine Kraft im Mittelpunkte dieser parallelen Kräfte wirkend reduciren, und alsdann durch die obige Construction den Centralpunkt der beiden gefundenen Resultantkräfte suchen.

§. 66.

Untersuchen wir jetzt, wann die gegebenen Kräfte durch zwei neue Kräfte, oder, was dasselbe ist, durch eine Kraft und ein Kräftepaar ersetzt werden können. Es seien X, Y, Z die Componenten und x, y, z die Coordinaten des Wirkepunktes der ersetzenden Kraft, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Componenten der Kraft, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Projectionen des Arms des ersetzenden Paares, so wird

$$\Sigma X = X, \quad \Sigma Y = Y, \quad \Sigma Z = Z, \quad \Sigma X x + \Sigma Y y = Xx + Yy + \mathfrak{X}\mathfrak{x} + \mathfrak{Y}\mathfrak{y},$$

$$\Sigma X\mathrm{y} - \Sigma Y\mathrm{x} = Xy - Yx + \mathfrak{X}\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}\mathfrak{x},\quad \Sigma X\mathrm{z} = Xz + \mathfrak{X}\mathfrak{z},$$
$$\Sigma Y\mathrm{z} = Yz + \mathfrak{Y}\mathfrak{z},\quad \Sigma Z\mathrm{x} = Zx + \mathfrak{Z}\mathfrak{x},\quad \Sigma Z\mathrm{y} = Zy + \mathfrak{Z}\mathfrak{y}.$$

Eliminirt man die sechs Grössen $X, Y, Z, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, so erhält man

(1)

$$\mathfrak{x}(z\Sigma X - \Sigma X\mathrm{z}) + \mathfrak{y}(z\Sigma Y - \Sigma Y\mathrm{z}) + \mathfrak{z}(\Sigma X\mathrm{x} + \Sigma Y\mathrm{y} - x\Sigma X - y\Sigma Y) = o,$$
$$\mathfrak{x}(\Sigma Y\mathrm{z} - z\Sigma Y) + \mathfrak{y}(z\Sigma X - \Sigma X\mathrm{z}) + \mathfrak{z}(\Sigma X\mathrm{y} - \Sigma Y\mathrm{x} - y\Sigma X + x\Sigma Y) = o,$$
$$\mathfrak{x}(y\Sigma Z - \Sigma Z\mathrm{y}) + \mathfrak{y}(\Sigma Z\mathrm{x} - x\Sigma Z) = o.$$

Wenn jetzt die Mittelkraft nicht Null ist, so werden diese Gleichungen immer erfüllt werden können, und man wird zwei der Coordinaten des Punktes (x, y, z) und eine Projection des Armes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ willkürlich wählen können. Eliminirt man die Grössen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ und setzt der Kürze willen

$$\Sigma Z(\Sigma Y \Sigma X\mathrm{z} - \Sigma X \Sigma Y\mathrm{z}) = \mathrm{A},$$
$$\Sigma Z[\Sigma X(\Sigma X\mathrm{x} + \Sigma Y\mathrm{y}) + \Sigma Y(\Sigma Y\mathrm{x} - \Sigma X\mathrm{y})]$$
$$- \Sigma Z\mathrm{x}[(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2] = \mathrm{B},$$
$$\Sigma Z[\Sigma X(\Sigma Y\mathrm{x} - \Sigma X\mathrm{y}) - \Sigma Y(\Sigma X\mathrm{x} + \Sigma Y\mathrm{y})]$$
$$+ \Sigma Z\mathrm{y}[(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2] = \mathrm{C},$$
$$\Sigma Z[\Sigma Y\mathrm{z}(\Sigma X\mathrm{x} + \Sigma Y\mathrm{y}) - \Sigma X\mathrm{z}(\Sigma Y\mathrm{x} - \Sigma X\mathrm{y})]$$
$$- \Sigma X\mathrm{z}(\Sigma Y \Sigma Z\mathrm{x} + \Sigma X \Sigma Z\mathrm{y}) + \Sigma Y\mathrm{z}(\Sigma X \Sigma Z\mathrm{x} - \Sigma Y \Sigma Z\mathrm{y}) = \mathrm{D},$$
$$\Sigma Z[\Sigma X\mathrm{z}(\Sigma X\mathrm{x} + \Sigma Y\mathrm{y}) - \Sigma Y\mathrm{z}(\Sigma Y\mathrm{x} - \Sigma X\mathrm{y})]$$
$$+ \Sigma X\mathrm{z}(\Sigma X \Sigma Z\mathrm{x} - \Sigma Y \Sigma Z\mathrm{y}) + \Sigma Y\mathrm{z}(\Sigma X \Sigma Z\mathrm{y} - \Sigma Y \Sigma Z\mathrm{x}) = \mathrm{E},$$
$$(\Sigma X\mathrm{x} + \Sigma Y\mathrm{y})(\Sigma X \Sigma Z\mathrm{y} - \Sigma Y \Sigma Z\mathrm{x})$$
$$+ (\Sigma Y\mathrm{x} - \Sigma X\mathrm{y})(\Sigma X \Sigma Z\mathrm{x} - \Sigma Y \Sigma Z\mathrm{y}) = \mathrm{F},$$
$$(\Sigma X\mathrm{x} + \Sigma Y\mathrm{y})(\Sigma X\mathrm{z} \Sigma Z\mathrm{y} - \Sigma Y\mathrm{z} \Sigma Z\mathrm{x})$$
$$- (\Sigma X\mathrm{y} - \Sigma Y\mathrm{x})(\Sigma Y\mathrm{z} \Sigma Z\mathrm{y} + \Sigma X\mathrm{z} \Sigma Z\mathrm{x}) = \mathrm{G},$$

so erhält man

$$(2)\quad \mathrm{A}(x^2 + y^2) + \mathrm{B}yz + \mathrm{C}xz + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y - \mathrm{F}z + \mathrm{G} = o.$$

Dieses ist die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, auf welcher der Wirkepunkt x, y, z willkürlich gewählt werden kann. Diese Fläche hat einen Mittelpunkt, dessen Coordinaten sind

$$\xi = \frac{2\mathrm{ACF} - \mathrm{DB}^2 + \mathrm{BCE}}{2\mathrm{A}(\mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2)},\quad \eta = \frac{2\mathrm{ABF} - \mathrm{C}^2\mathrm{E} + \mathrm{BCD}}{2\mathrm{A}(\mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2)},\quad \zeta = -\frac{2\mathrm{AF} + \mathrm{CD} + \mathrm{BE}}{\mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}.$$

Weil eine der Projectionen des Armes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ des Kräftepaares willkürlich angenommen werden kann, wird man diesen Arm einen beliebigen Anfangspunkt und eine beliebige Länge geben kön-

nen. Wählt man zu einem Endpunkte des Armes den Punkt (x, y, z), und bezeichnet durch (x', y', z') denjenigen des zweiten, so ist $\mathfrak{x} = x' - x$, $\mathfrak{y} = y' - y$, $\mathfrak{z} = z' - z$. Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (1), so findet man, dass diese drei Gleichungen ganz symmetrisch in Bezug auf x, y, z und x', y', z' sind. Der zweite Endpunkt des Armes (x', y', z') liegt also auch in der Fläche (2), und folglich, weil die Länge des Armes willkürlich ist, der ganze Arm $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ in dieser Fläche. Die Fläche (2) ist ein windschiefes Hyperboloid, oder Hyperboloid mit einem Mantel. Der Wirkepunkt der ersetzenden Kraft kann willkürlich im Hyperboloid, und der Arm des ersetzenden Kräftepaares von willkürlicher Länge, aber parallel mit einer der durch den Wirkepunkt der Kraft gehenden erzeugenden Geraden des Hyperboloids angenommen werden.

Die Kräfte werden bestimmt durch die Gleichungen

$$X = \Sigma X, \quad Y = \Sigma Y, \quad Z = \Sigma Z,$$

$$\mathfrak{X} = \frac{\Sigma X z - z \Sigma X}{\mathfrak{z}}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{\Sigma Y z - z \Sigma Y}{\mathfrak{y}}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{\Sigma Z x - x \Sigma Z}{\mathfrak{x}}.$$

Statt die Kräfte auf eine Kraft und auf ein Kräftepaar, kann man sie auch auf zwei Kräfte reduciren, deren Wirkepunkte willkürlich in irgend einer der Lagen der einen, das Hyperboloid erzeugenden Geraden angenommen werden kann.

Wenn $\Sigma X = o$ und $\Sigma Y = o$, d. h. die Mittelkraft der z Axe parallel ist, verschwinden die Grössen A, B, C, F und die Gleichung (2) stellt alsdann eine der xy Ebene parallele Ebene dar.

§. 67.

Wenn die Mittelkraft Null ist, so erhält man die folgenden Gleichungen

$$\Sigma X x + \Sigma Y y = \mathfrak{X}\mathfrak{x} + \mathfrak{Y}\mathfrak{y}, \quad \Sigma X y - \Sigma Y x = \mathfrak{X}\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}\mathfrak{x},$$
$$\Sigma X z = \mathfrak{X}\mathfrak{z}, \quad \Sigma Y z = \mathfrak{Y}\mathfrak{z}, \quad \Sigma Z x = \mathfrak{Z}\mathfrak{x}, \quad \Sigma Z y = \mathfrak{Z}\mathfrak{y},$$

und hieraus durch Elimination von $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Bedingungsgleichung

$$(\Sigma X x + \Sigma Y y)(\Sigma X z \Sigma Z y - \Sigma Y z \Sigma Z x)$$
$$- (\Sigma X y - \Sigma Y x)(\Sigma Y z \Sigma Z y + \Sigma X z \Sigma Z x) = G = o.$$

Wenn diese Gleichung erfüllt ist, findet man

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{z}\cdot\frac{\Sigma Xz(\Sigma Xx + \Sigma Yy) - \Sigma Yz(\Sigma Xy - \Sigma Yx)}{(\Sigma Xz)^2 + (\Sigma Yz)^2},$$

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{z}\cdot\frac{\Sigma Yz(\Sigma Xx + \Sigma Yy) + \Sigma Xz(\Sigma Xy - \Sigma Yx)}{(\Sigma Xz)^2 + (\Sigma Yz)^2},$$

$$\mathfrak{X} = \frac{\Sigma Xz}{\mathfrak{z}},\quad \mathfrak{Y} = \frac{\Sigma Yz}{\mathfrak{z}},\quad \mathfrak{Z} = \frac{\Sigma Zx}{\mathfrak{x}} = \frac{\Sigma Zy}{\mathfrak{y}}.$$

Die gegebenen Kräfte sind alsdann auf das Paar $[(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}), -(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})]$ reducirbar.

§. 68.

Wenn die Mittelkraft Null, die Bedingungsgleichung $G = o$ aber nicht erfüllt ist, so werden die Kräfte doch immer durch zwei Kräftepaare ersetzt werden können. Bezeichnet man durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Componenten der Kraft, durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Projectionen des Armes des ersten Paares, durch $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ die Componenten der Kraft, durch $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ die Projectionen des Armes des zweiten Paares, so erhält man die Gleichungen

$$\Sigma Xx + \Sigma Yy = \mathfrak{X}\mathfrak{x} + \mathfrak{Y}\mathfrak{y} + \mathfrak{X}'\mathfrak{x}' + \mathfrak{Y}'\mathfrak{y}',$$
$$\Sigma Xy - \Sigma Yx = \mathfrak{X}\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}\mathfrak{x} + \mathfrak{X}'\mathfrak{y}' - \mathfrak{Y}'\mathfrak{x}',$$
$$\Sigma Xz = \mathfrak{X}\mathfrak{z} + \mathfrak{X}'\mathfrak{z}',\quad \Sigma Yz = \mathfrak{Y}\mathfrak{z} + \mathfrak{Y}'\mathfrak{z}',$$
$$\Sigma Zx = \mathfrak{Z}\mathfrak{x} + \mathfrak{Z}'\mathfrak{x}',\quad \Sigma Zy = \mathfrak{Z}\mathfrak{y} + \mathfrak{Z}'\mathfrak{y}'.$$

Man kann daher alle die Grössen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$, d. h. die Grössen und Lagen der beiden Arme ganz willkürlich annehmen. Die Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ werden nun durch die vorige Gleichung leicht bestimmt.

§. 69.

Ein Körper wird astatisch genannt, wenn er so befestigt ist, dass er in jeder Stellung, die er annehmen kann, im Gleichgewicht ist. Die Bedingungen, unter welchen ein ganz freier Körper astatisch ist, wenn die Kräfte mit unveränderlichen Intensitäten in unveränderlichen Richtungen an ihren Angriffspunkten haften, sind schon am Ende des §. 55 angeführt. Wir werden jetzt die Bedingungen entwickeln, unter welchen der Körper astatisch wird, wenn er einen festen Punkt oder eine feste Axe hat.

Hat der Körper einen festen Punkt, um welchen er beliebig gedreht werden kann, so wird er nur astatisch sein können, wenn

das System von Kräften einen Centralpunkt hat, und dieser Punkt der befestigte Punkt ist. Hat der Körper eine feste Axe, um welche er beliebig gedreht werden kann, so wird er nur astatisch sein können, wenn der Centralpunkt der Projectionen der gegebenen Kräfte auf einer, die gegebene Axe rechtwinklig schneidenden Ebene in dieser Axe selbst liegt, oder wenn diese Projectionen selbst immer im Gleichgewicht sind (§. 64). Denn alle mit der Axe parallelen Componenten der Kräfte und alle bei dem Versetzen der auf der Axe senkrechten Componenten in eine Ebene entstandenen Kräftepaare werden von der festen Axe aufgehoben werden.

§. 70.

Wir werden jetzt die besonderen Stellungen des Körpers suchen, in welchen er um einen festen Punkt oder eine feste Axe im Gleichgewicht ist, wenn er nicht astatisch, d. h. in jeder Stellung im Gleichgewicht ist, und werden zuerst den Fall betrachten, wenn der Körper einen festen Punkt hat. Dem Körper muss alsdann eine solche Lage gegeben werden, dass die gegebenen Kräfte eine durch den festen Punkt gehende Resultantkraft haben.

Hat das System der gegebenen Kräfte einen Centralpunkt, so muss der Körper so lange um den festen Punkt gedreht werden, bis dieser Centralpunkt in der Richtung der durch den festen Punkt gezogenen Mittelkraft zu liegen kommt. Dieses giebt alsdann zwei einander genau entgegengesetzte Stellungen des Körpers.

Hat das System der gegebenen Kräfte eine Centrallinie, so kann man nach §. 57 die gegebenen Kräfte immer auf zwei in beliebigen Punkten dieser Linie wirkende Kräfte reduciren. Wenn jetzt die Mittelkraft nicht Null ist, so muss man, um Gleichgewicht hervorzubringen, erst den Körper so drehen, dass die Centrallinie in eine durch den festen Punkt gehende, mit den beiden Kräften parallele Ebene fällt. Alsdann fallen nämlich auch die beiden Kräfte in diese Ebene und können nun erst eine durch den festen Punkt gehende Resultante erhalten. Der Körper kann jetzt ferner um eine auf dieser Ebene senkrechte Axe gedreht werden. In Bezug auf diese Axe

haben dann die beiden in jener auf der Axe senkrechten Ebene liegenden Kräfte einen Centralpunkt (§. 65), durch welchen die Resultante der beiden gegebenen Kräfte immer gehen muss; der Körper muss folglich, damit Gleichgewicht stattfinde, so gedreht werden, dass dieser Centralpunkt in die durch den festen Punkt gezogene Richtung der Mittelkraft fällt, welche nothwendig in der Ebene der beiden Kräfte liegen muss. Dieses giebt dann wieder zwei einander entgegengesetzte Stellungen des Gleichgewichts des Körpers.

Ist die Mittelkraft Null und folglich alle gegebenen Kräfte durch ein Kräftepaar ersetzt, dessen Arm von beliebiger Länge und Lage der Centrallinie parallel angenommen werden kann (§. 58), so muss man, um Gleichgewicht hervorzubringen, den Körper um den festen Punkt so drehen, dass die Centrallinie mit den Kräften des Paares parallel wird; alsdann werden der Arm und die Kräfte des Paares in eine gerade Linie fallen und das Moment des Paares Null sein. Dies giebt wieder zwei entgegengesetzte Stellungen des Körpers. Der als fest gegebene Punkt braucht in diesem Falle gar nicht fest zu sein, weil er keinen Druck auszuhalten hat.

Wir werden endlich annehmen, der Körper habe nur eine Centralebene und die Mittelkraft wäre nicht Null. Wir haben alsdann (§. 63) gesehen, dass, so oft die gegebenen Kräfte durch eine Resultantkraft ersetzt werden können, diese immer durch zwei in den beiden Mittelebenen liegende Kegelschnitte, eine Ellipse und eine Hyperbel, gehen müssen. Man ziehe also durch den festen Punkt eine diese beiden Kegelschnitte schneidende Gerade und drehe dann den Körper, bis diese Gerade mit der Richtung der Mittelkraft zusammenfällt. Die gesuchte Gleichgewichtslage des Körpers muss nun durch fernere Drehung um diese gerade Linie gefunden werden können.

Die Gleichgewichtslage wird nämlich stattfinden, wenn das mit der Resultantenkraft verbundene kleinste Paar $\mathfrak{G}$ gleich Null ist. Es ist aber nach §. 63

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{x}\mathfrak{X}'\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} - \mathfrak{y}'\mathfrak{Y}\frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}},$$

wo $\mathfrak{x}$ die Länge des längs der einen Mittellinie liegenden Armes des einen Kräftepaares, $\mathfrak{y}'$ die Länge des längs der zweiten Mittellinie liegenden Armes des zweiten Paares, $\mathfrak{R}$ die Kraft des ersten, $\mathfrak{R}'$ diejenige des zweiten Paares, beide senkrecht auf einander und auf der Richtung der Mittelkraft, $\mathfrak{Y}$ die Projection der Kraft $\mathfrak{R}$, parallel mit dem Arme $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{X}'$ die der Kraft $\mathfrak{R}'$, parallel mit dem Arme $\mathfrak{x}$, ist. Legt man jetzt auf die durch den festen Punkt gehende Richtung der Mittelkraft, um welche als Umdrehungsaxe der Körper in die Gleichgewichtslage gedreht werden soll, eine senkrechte Ebene, so werden die beiden Kräfte $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ dieser Ebene parallel sein. Ziehen wir daher durch jene Umdrehungen in dieser Ebene zwei den beiden Kräften parallele Linien, welche wir mit A und B bezeichnen werden; bezeichnen wir ferner durch C die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Centralebene, durch φ den Winkel, welchen die Linien A und C mit einander bilden, durch $\varphi + \frac{\pi}{2}$ den Winkel, welchen B und C mit einander bilden, durch ϑ den Winkel, welchen der Arm $\mathfrak{x}$ des ersten Paares mit C bildet, durch $\vartheta + \frac{\pi}{2}$ den Winkel, welchen der Arm $\mathfrak{y}'$ des zweiten Paares mit C bildet, durch λ den Winkel, welchen die Centralebene mit der Ebene der Linien A und B bildet, durch ψ den Winkel, welchen der Arm $\mathfrak{x}$ mit der Linie B, durch μ den Winkel, welchen der Arm $\mathfrak{y}'$ mit der Linie A bildet, so ist

$$\cos\mu = \cos\varphi\cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\varphi\sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right)\cos\lambda$$
$$= -\cos\varphi\sin\vartheta - \sin\varphi\cos\vartheta\cos\lambda,$$
$$\cos\psi = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\cos\vartheta - \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\vartheta\cos\lambda$$
$$= -\sin\varphi\cos\vartheta - \cos\varphi\sin\vartheta\cos\lambda,$$
$$\mathfrak{X}' = \mathfrak{R}'\cos\psi = -\mathfrak{R}'[\sin\varphi\cos\vartheta + \cos\varphi\sin\vartheta\cos\lambda],$$
$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{R}\cos\mu = -\mathfrak{R}[\cos\varphi\sin\vartheta + \sin\varphi\cos\vartheta\cos\lambda],$$
$$\mathfrak{S} = \mathfrak{x}\mathfrak{X}'\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} - \mathfrak{y}\mathfrak{Y}'\frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}} = \sin\varphi[\mathfrak{y}\mathfrak{R}'\cos\vartheta\cos\lambda - \mathfrak{x}\mathfrak{R}\cos\vartheta]$$
$$+ \cos\varphi[\mathfrak{y}\mathfrak{R}'\sin\vartheta - \mathfrak{x}\mathfrak{R}\sin\vartheta\cos\lambda].$$

Während der Umdrehung um die durch den festen Punkt gehende

Richtung der Mittelkraft wird jetzt nur der Winkel φ verändert, und in der Gleichgewichtslage des Körpers wird $\mathfrak{S} = o$, oder

$$\tang \varphi = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{R} \sin \vartheta \cos \lambda - \mathfrak{y}\mathfrak{R}' \sin \vartheta}{\mathfrak{y}\mathfrak{R}' \cos \vartheta \cos \lambda - \mathfrak{x}\mathfrak{R} \cos \vartheta}.$$

Wenn dieser Werth für φ gegeben, wird $\mathfrak{S} = o$, und daher wird man alle die gegebenen Kräfte durch eine einzige durch den festen Punkt gehende Resultantkraft ersetzen können. Der Körper wird nun im Gleichgewicht sein.

Wenn die Mittelkraft Null ist und das System fortwährend eine Centralebene hat, so dass die gegebenen Kräfte nach §. 61 durch zwei Paare ersetzt werden können, deren Arme der Centralebene parallel sind, so muss man, um Gleichgewicht hervorzubringen, erst den Körper so drehen, dass diese Centralebene der Ebene der Kräfte der beiden Paare parallel wird. Alsdann liegen beide Paare in parallelen Ebenen, und können nach §. 67 bei fernerer Drehung um eine auf diesen Ebenen senkrechte Axe durch ein einziges Kräftepaar ersetzt werden. Der Körper wird jetzt um diese Axe gedreht, bis der Arm und die Kräfte dieses Paares in eine gerade Linie fallen.

Wenn endlich die Mittelkraft Null ist und das Sysem keine Centralebene hat (§. 62), so kann man in dem Punkt, um welchen der Körper gedreht wird, und welcher nicht fest zu sein braucht, zwei einander gleiche und entgegengesetzte Kräfte P und — P hinzufügen. Die Kraft P und die gegebenen Kräfte werden dann eine Centralebene haben, und der Körper kann um den gegebenen Punkt auf die vorher beschriebene Weise in eine solche Stellung gebracht werden, dass diese Kräfte sich auf eine durch den Punkt gehende Resultantkraft P reduciren lassen. Diese Kraft wird alsdann von — P aufgehoben und es findet folglich Gleichgewicht statt.

§. 71.

Wir werden jetzt den Fall betrachten, wenn der gegebene Körper eine feste Axe hat. Man lege eine Ebene senkrecht auf die Axe und zerlege jede der gegebenen Kräfte in zwei andere, die eine der Axe, die andere der Ebene parallel. Hierauf projicire man die sämmt-

lichen Angriffspunkte auf die Ebene und versetze die der Ebene parallelen Componenten jede an die Projection ihres Angriffspunktes (§. 49). Man erhält hierdurch ein System von der Axe parallelen Kräften, ein System von Kräftepaaren, welche durch die eben beschriebenen Versetzungen hervorgebracht und deren Arme alle der festen Axe parallel sind und daher in diese Axe versetzt werden können (§. 39), und endlich ein System von Kräften in der auf der Axe senkrechten Ebene. Alle die mit der Axe parallelen Kräfte und alle Kräftepaare werden jetzt von der festen Axe im Gleichgewicht gehalten, und es sind nur die in der auf der Axe senkrechten Ebene liegenden Kräfte zu betrachten. Alle diese Kräfte haben aber, wenn ihre Mittelkraft nicht Null ist, nach §. 65 einen Centralpnnkt in Bezug auf die feste Axe, und es ist, damit Gleichgewicht hervorgebracht werde, nur nöthig den Körper zu drehen, bis dieser Centralpunkt in die durch die feste Axe gezogene Richtung der Mittelkraft jener Kräfte fällt. Ist die Mittelkraft Null, so könnnn nach §. 67 diese Kräfte durch ein Kräftepaar ersetzt werden, und um Gleichgewicht hervorzubringen, muss der Körper um die feste Axe gedreht werden, bis der Arm und die Kraft dieses Paares in eine gerade Linie zusammenfallen.

§. 72.

Wir werden jetzt den allgemeinen Satz der virtuellen Geschwindigkeiten auf den Fall anwenden, wenn die Kräfte mit unveränderlichen Intensitäten und in unveränderlichen Richtungen an ihren Angriffspunkten haftend, auf ein System von mit einander durch irgend welche Verbindungsgleichungen verbundenen Punkten wirken, welchen Fall wir bisher nur bei festen Körpern betrachtet haben. Die allgemeine Gleichung des Gleichgewichts ist nach §. 18

$$d_t U = \Sigma(X d_t x + Y d_t y + Z d_t z) = o,$$

und diese Gleichung soll für alle möglichen Bewegungen des Systems stattfinden. Weil jetzt die Kräfte mit unveränderlicher Intensität und in unveränderlichen Richtungen während aller Bewegungen

wirken, so sind hier X, Y, Z als constant anzusehen, und es wird folglich, wenn Gleichgewicht stattfinden soll, die Grösse

$$U = \Sigma(Xx + Yy + Zz)$$

ein Maximum oder Minimum sein.

Sind die Kräfte alle parallel und die x Axe diesen parallel angenommen, und ist die Mittelkraft nicht Null, so werden $Y = o$, $Z = o$ und $U = \Sigma Xx$ im Zustande des Gleichgewichts ein Maximum oder Minimum sein. Es ist aber alsdann $x = \frac{\Sigma Xx}{\Sigma X}$ auch ein Maximum oder Minimum, d. h. *es liegt im Zustande des Gleichgewichts eines von parallelen Kräften angegriffenen Systems der Mittelpunkt der parallelen Kräfte so tief oder hoch wie möglich, von einer auf der Richtung der Kräfte senkrechten Ebene gerechnet.* Dieses ist z. B. der Fall bei der Kettenlinie.

Sind alle Kräfte einer Ebene, z. B. der xy Ebene, parallel, also alle $Z = o$ und fortwährend die Mittelkraft nicht Null, so wird $U = \Sigma(Xx + Yy)$ ein Maximum oder Minimum. Projicirt man aber alle Kräfte auf die Ebene xy, und bezeichnet die Coordinaten ihres Centralpunktes in dieser Ebene mit x und y, so ist nach §. 65

$$x = \frac{\Sigma X(\Sigma Xx + \Sigma Yy) - \Sigma Y(\Sigma Xy - \Sigma Yx)}{R^2},$$

$$y = \frac{\Sigma Y(\Sigma Xx + \Sigma Yy) - \Sigma X(\Sigma Xy - \Sigma Yx)}{R^2},$$

wo $R^2 = (\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2$. Wird jetzt das Coordinatensystem so gewählt, dass die x Axe der Richtung von R parallel ist, so wird $\Sigma Y = o$,

$$x = \frac{\Sigma(Xx + \Sigma Yy)}{\Sigma X} = \frac{U}{\Sigma X} = \text{einem Maximum oder Minimum.}$$

Im Zustande des Gleichgewichts mehrerer mit einer Ebene parallelen Kräfte ist folglich der Abstand des Mittelpunkts der auf dieser Ebene projicirten Kräfte von einer auf der Richtung der Mittelkraft senkrechten unveränderlichen Ebene ein Maximum oder Minimum.

Nehmen wir fortwährend die x Axe der Richtung der Mittelkraft R, welche von Null verschieden angenommen wird, parallel an,

und bezeichnen durch x und y die Coordinaten des Mittelpunktes der auf die xy Ebene projicirten Kräfte, so wird, weil $\Sigma Y = o$, $R = \Sigma X$,

$$x = \frac{\Sigma(Xx + Yy)}{R}, \quad y = \frac{\Sigma(Xy - Yx)}{R}.$$

Bezeichnet man durch x' und z' die Coordinaten des Mittelpunktes der auf die xz Ebene projicirten Kräfte, so wird ebenso

$$x' = \frac{\Sigma(Xx + Zz)}{R}, \quad z' = \frac{\Sigma(Xz - Zx)}{R}.$$

Bezeichnet man endlich durch x'', y'', z'' die Coordinaten des Mittelpunktes aller mit R parallelen Componenten der gegebenen Kräfte, so ist

$$x'' = \frac{\Sigma Xx}{R},$$

und es wird daher

$$U = \Sigma(Xx + Yy + Zz) = R(x + x' - x'') = Rx_1,$$

wo x_1 die Abscisse des Mittelpunkts von drei in den Punkten (x, y, o), (x', o, z'), (x'', y'', z'') angebrachten gleichen und parallelen Kräften ist, unter denen die zwei ersten in derselben, die dritte in entgegengesetzter Richtung wirken. *Der Abstand dieses Mittelpunktes von einer auf der Richtung der Mittelkraft senkrechten Ebene wird folglich im Zustande des Gleichgewichts ein Maximum oder Minimum sein.*

Weil $\Sigma T ds = d_t U = R d_t x_1 = o$, so wird, wenn die Mittelkraft R in jenem Mittelpunkte angebracht wird, die virtuelle Arbeit der Mittelkraft gleich der Summe der virtuellen Arbeiten der gegebenen Kraft und im Zustande des Gleichgewichts gleich Null.

Cap. VII.

Anwendung der Theorie des Mittelpunktes paralleler Kräfte auf schwere Körper.

§. 73.

Wenn die auf einen Körper wirkenden Kräfte diejenigen der Schwere sind, so sind diese unter einander parallel und jede derselben dem Massenelemente des Körpers, worauf sie wirken, pro-

portional. Bezeichnet man durch M die Masse des Körpers, durch dM diejenige eines Elementes, dessen Coordinaten x, y, z sind, und durch x, y, z die Coordinaten des Mittelpunktes, welcher hier den besonderen Namen **Schwerpunkt** erhält, so wird nach §. 56

$$x = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P} = \frac{\int x dM}{M}, \quad y = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P} = \frac{\int y dM}{M}, \quad z = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P} = \frac{\int z dM}{M}.$$

Kennt man den Schwerpunkt der einzelnen Theile eines Körpers, so kann hierdurch der Schwerpunkt des ganzen Körpers gefunden werden. Es seien die Masse der einzelnen Theile $m_1, m_2, \ldots$, die Coordinaten ihrer Schwerpunkte $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$, die Masse des ganzen Körpers $M = m_1 + m_2 + \ldots$, so wird nach §. 56

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}, \quad z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}.$$

Es folgt hieraus, dass, wenn die Schwerpunkte aller einzelnen Theile in einer geraden Linie oder in einer Ebene liegen, so wird auch der Schwerpunkt des ganzen Körpers in derselben Gerade oder in derselben Ebene liegen.

§. 74.

Wenn der Schwerpunkt einer Linie gesucht wird, dessen Dichtigkeit im Punkte (x, y, z) durch ϱ bezeichnet wird, so ist

$$dM = \varrho \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \varrho ds,$$

daher

$$x = \frac{\int \varrho x ds}{\int \varrho ds}, \quad y = \frac{\int \varrho y ds}{\int \varrho ds}, \quad z = \frac{\int \varrho z ds}{\int \varrho ds}.$$

Ist die Dichtigkeit ϱ überall gleich, so wird

$$x = \tfrac{1}{s}\int x ds, \quad y = \tfrac{1}{s}\int y ds, \quad z = \tfrac{1}{s}\int z ds.$$

Wenn die gegebene Linie durch Polarcoordinaten ausgedrückt ist, so wird

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta\cos\psi, \quad z = r\sin\vartheta\sin\psi,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\psi^2},$$

wo r den Radius vector bezeichnet, ϑ den Winkel, welchen dieser mit der x Axe bildet, ψ den Winkel, welchen die durch r und der x Axe gelegte Ebene mit der xy Ebene bildet. Es wird alsdann

$$x = \frac{\int \varrho r \cos\vartheta \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\psi^2}}{\int \varrho \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta \delta\psi^2}},$$

$$y = \frac{\int \varrho r \sin\vartheta \cos\psi \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\psi^2}}{\int \varrho \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\psi^2}},$$

$$z = \frac{\int \varrho r \sin\vartheta \sin\psi \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\psi^2}}{\int \varrho \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\psi^2}}.$$

Beispiele.

1) Schwerpunkt einer geraden Linie. Die Gleichung einer geraden Linie ist $y = ax + b$, $z = a'x + b'$. Es wird daher, wenn die Linie überall gleichartig ist, und (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) die Coordinaten der Endpunkte sind,

$$x = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2(x_1 - x_2)} = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},\quad z = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

d. h. der Schwerpunkt fällt in die Mitte der geraden Linie, was auch von selbst augenscheinlich stattfinden muss.

Sucht man den Schwerpunkt des Umfangs eines Polygons, und bezeichnet durch (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \ldots (x_n, y_n, z_n)$ die Coordinaten der Spitze, durch $l_1, l_2, \ldots l_n$ die Länge der Seiten, so dass l_p die Länge der zwischen (x_p, y_p, z_p) und $(x_{p+1}, y_{p+1}, z_{p+1})$ liegende Seite ist, so wird

$$x = \frac{l_1(x_1 + x_2) + l_2(x_2 + x_3) + \ldots l_n(x_n + x)}{2(l_1 + l_2 + \ldots l_n)},$$

$$y = \frac{l_1(y_1 + y_2) + l_2(y_2 + y_3) + \ldots l_n(y_n + y)}{2(l_1 + l_2 + \ldots l_n)},$$

$$z = \frac{l_1(z_1 + z_2) + l_2(z_2 + z_3) + \ldots l_n(z_n + z)}{2(l_1 + l_2 + \ldots l_n)},$$

Ist das gegebene Polygon ein Dreieck (Fig. 26), so kann der Schwerpunkt durch Construction folgender Weise gefunden werden. Es sei ABC das gegebene Dreieck, und die Seiten halbirt, so ist a der Schwerpunkt der Seite BC, b derjenige der Seite AC, c derjenige der Seite AB. Der Schwerpunkt des Umfanges des Dreiecks wird daher der Mittelpunkt der in a, b, c wirkenden parallelen Kräfte p,

p′, p″, deren jede gleich der zugehörigen Seite des Dreiecks ist. Um diesen Punkt zu finden, suche man zuerst den Mittelpunkt E der zwei Kräfte p und p′; es ist alsdann $p : p' = bE : aE$. Es ist aber auch $p : p' = BC : AC = bc : ac$, folglich $bE : aE = bc : ac$, und $\angle bcE = \angle acE$. Der Schwerpunkt des Umfanges muss also in der geraden Linie cE liegen, welche den Winkel acb halbirt. Ebenso findet man, dass er in der geraden Linie, welche den Winkel cab halbirt, liegt, folglich muss er im Punkte D liegen, welcher der Mittelpunkt des in abc eingeschriebenen Kreises ist.

3) Schwerpunkt eines Kreisbogens. Die Gleichungen mit Polarcoordinaten werden hier, weil $r =$ constant, $\psi = o$ (Fig. 27),

$$x = \frac{r^2}{\text{arc. BAC}} \int_{-u}^{v} \cos \vartheta d\vartheta, \quad y = \frac{r^2}{\text{arc. BAC}} \int_{-u}^{v} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Wenn $AC = AB$, $u = v$ genommen wird, so ist arc. $BAC = 2rv$, und

$$x = \frac{2r^2 \sin v}{2rv} = \frac{r \sin v}{v}, \quad y = o.$$

4) Schwerpunkt einer Parabel. Man erhält den Schwerpunkt eines Parabelbogens AB (Fig. 28), wenn A der Scheitel der Parabel ist. Die Gleichung der Parabel ist

$$y^2 = 2px, \text{ folglich } ds = dx\sqrt{\frac{p + 2x}{2x}} = \frac{dy}{p}\sqrt{p^2 + y^2}.$$

Es wird daher

$$x = \frac{\int_o^x dx \sqrt{\frac{x(p + 2x)}{2}}}{\int_o^x dx \sqrt{\frac{p + 2x}{2x}}}, \quad y = \frac{\int_o^y y dy \sqrt{p^2 + y^2}}{\int_o^y dy \sqrt{p^2 + y^2}},$$

oder, wenn die Integrationen ausgeführt werden,

$$x = \frac{\frac{1}{2}(x + \frac{1}{4}p)\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}px} - \frac{p}{16}\log \text{nat}\left(\frac{\sqrt{2x} + \sqrt{p + 2x}}{\sqrt{p}}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}px} + \frac{p}{2}\log \text{nat}\left(\frac{\sqrt{2x} + \sqrt{p + 2x}}{\sqrt{p}}\right)},$$

$$y = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{p}(p + 2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}p^2}{\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}px} + \frac{p}{2}\log \text{nat}\left(\frac{\sqrt{2x} + \sqrt{p + 2x}}{\sqrt{p}}\right)}.$$

5) Schwerpunkt einer Cycloide. Es sei ADB eine Cycloide, DG = x, GF = y, DF = s, CD = 2r, so ist

$$y = r \operatorname{arc.}\left(\cos = \frac{r-x}{r}\right) + \sqrt{2rx - x^2}.$$

Setzt man jetzt $\frac{r-x}{r} = \cos\psi$, so wird

$$x = r(1-\cos\psi) = 2r\sin^2\tfrac{1}{2}\psi, \quad y = r(\psi + \sin\psi),$$

$$ds = 2r\cos\tfrac{1}{2}\psi d\psi, \quad dy = r(1+\cos\psi)d\psi = 2r\cos^2\tfrac{1}{2}\psi d\psi.$$

Es wird also, weil mit $\psi = o$ auch $y = o$, $x = o$, $s = o$,

$$s = 4r\sin\tfrac{1}{2}\psi, \quad s^2 = 16r^2\sin^2\tfrac{1}{2}\psi = 8rx,$$

$$x = \frac{s^2}{8r}, \quad \cos^3\tfrac{1}{2}\psi = \frac{(16r^2-8rx)^{\frac{3}{2}}}{64r^3};$$

und ferner

$$\mathfrak{x} = \frac{\int x ds}{s} = \frac{\int s^2 ds}{8rs} = \frac{s^2}{24r} = \frac{x}{3},$$

$$\mathfrak{y} = \frac{\int y ds}{s} = \frac{ys - \int s dy}{s} = y - \frac{8r^2\int \sin\frac{1}{2}\psi\cos^2\frac{1}{2}\psi d\psi}{s}$$

$$= y - \frac{\frac{16}{3}r^2(1-\cos^3\frac{1}{2}\psi)}{s} = y - \frac{8r^2}{3\sqrt{2rx}} + \frac{(16r^2-8rx)^{\frac{3}{2}}}{24r\sqrt{2rx}}.$$

Wenn $\psi = \pi$, $x = 2r$, $y = \pi r$, $s = DA = 4r$, so wird

$$\mathfrak{x} = \tfrac{2}{3}r, \quad \mathfrak{y} = (\pi - \tfrac{4}{3})r.$$

Der Schwerpunkt der ganzen Cycloide ist im Punkte H, wo DH $= \frac{2}{3}r = \frac{1}{3}$DC.

6) Schwerpunkt der Kettenlinie. Die Gleichung der Kettenlinie ist nach §. 30

$$y = -\frac{X}{k} + \frac{1}{2}\frac{X}{k}\left(e^{\frac{kx}{X}} + e^{-\frac{kx}{X}}\right),$$

wenn der Anfangspunkt der Coordinaten im tiefsten Punkte der Kettenlinie angenommen wird. Wenn dieser Punkt auch als Anfangspunkt des gegebenen Bogen der Kettenlinie angenommen wird, ist

$$\mathfrak{x} = \frac{\int_o^x x\left(e^{\frac{kx}{X}} + e^{-\frac{kx}{X}}\right)dx}{\int_o^x\left(e^{\frac{kx}{X}} + e^{-\frac{kx}{X}}\right)dx}, \quad \mathfrak{y} = \frac{\int_o^x y\left(e^{\frac{kx}{X}} + e^{-\frac{kx}{X}}\right)dx}{\int_o^x\left(e^{\frac{kx}{X}} + e^{-\frac{kx}{X}}\right)dx}.$$

Es ist aber

$$\int_0^x x\left(e^{\frac{kx}{X}} + e^{-\frac{kx}{X}}\right)dx = \frac{Xx}{k}\left(e^{\frac{kx}{X}} - e^{-\frac{kx}{X}}\right) - \frac{X^2}{k^2}\left(e^{\frac{kx}{X}} - 2 + e^{-\frac{kx}{X}}\right)$$

$$= 2x\sqrt{y^2 + \frac{2Xy}{k}} + \frac{2Xy}{k},$$

$$\int_0^x y\left(e^{\frac{kx}{X}} + e^{-\frac{kx}{X}}\right)dx = -\frac{X}{k}\int_0^x\left(e^{\frac{kx}{X}} + e^{-\frac{kx}{X}}\right)dx + \frac{1}{2}\frac{X}{k}\int_0^x\left(e^{\frac{2kx}{X}} + 2 + e^{-\frac{2kx}{X}}\right)dx$$

$$= -\frac{2X}{k}\sqrt{y^2 + \frac{2Xy}{k}} + \frac{1}{4}\frac{X^2}{k^2}\left(e^{\frac{2kx}{X}} - e^{-\frac{2kx}{X}}\right) + \frac{Xx}{k}$$

$$= -\frac{2X}{k}\sqrt{y^2 + \frac{2Xy}{k}} + \left(y + \frac{X}{k}\right)\sqrt{y^2 + \frac{2Xy}{k}} + \frac{Xx}{k}$$

$$= \left(y - \frac{X}{k}\right)\sqrt{y^2 + \frac{2Xy}{k}} + \frac{Xx}{k},$$

$$\int_0^x\left(e^{\frac{kx}{X}} + e^{-\frac{kx}{X}}\right)dx = 2\sqrt{y^2 + \frac{2Xy}{k}} = s.$$

Es wird folglich

$$\mathfrak{x} = x - \frac{Xy}{\sqrt{ky(ky + 2X)}} = x - \frac{Xy}{ks},$$

$$\mathfrak{y} = \frac{1}{2}y - \frac{X}{2k} + \frac{Xx}{2\sqrt{ky(ky + 2X)}} = \frac{1}{2}y - \frac{X}{2k} + \frac{Xx}{2ks}.$$

§. 75.

Zwischen der Lage des Schwerpunktes einer ebenen krummen Linie und der Fläche, welche sie durch eine vollständige Umdrehung um eine beliebige gerade Linie in der Ebene der krummen Linie beschreibt, findet folgende Relation statt:

Der Flächenraum einer Umdrehungsfläche ist gleich dem Product der Länge der beschreibenden ebenen Linie mit dem Umkreise des vom Schwerpunkt der Linie beschriebenen Kreises.

Nimmt man die y Axe als Umdrehungsaxe an und bezeichnet wie früher durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Coordinaten des Schwerpunktes der beschreibenden Linie, so ist die Umdrehungsfläche $\Theta = 2\pi\int x ds = 2\pi\frac{\int x ds}{s}\cdot s = 2\pi\mathfrak{x}s$. Es wird folglich auch $\mathfrak{x} = \frac{\Theta}{2\pi s}$.

Beispiel.

Die Oberfläche eines Umdrehungsellipsoids, dessen grosse Axe gleich a, die kleine gleich b ist, wird, wenn die Drehung um die grosse Axe stattgefunden hat,

$$\Theta = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{arc.}\left(\text{tang} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right),$$

oder, wenn man die Excentricität $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ gleich e setzt,

$$\Theta = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{e} \text{arc.}\left(\text{tang} = \frac{ae}{b}\right).$$

Der Schwerpunkt der halben Ellipse auf der einen Seite der grossen Axe wird nun in der kleinen Axe liegen, in einem Abstand vom Mittelpunkte gleich

$$x = \frac{\Theta}{2\pi s},$$

wenn 2s die Länge der ganzen Ellipse bezeichnet. Es ist aber aus der analytischen Geometrie bekannt, dass

$$2s = 2a\pi\left[1 - (\tfrac{1}{2}e)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 - \cdots\right].$$

Es wird folglich

$$x = \frac{b^2 + \frac{ab}{e}\text{arc.}\left(\text{tang} = \frac{ae}{b}\right)}{\pi a\left[1 - (\frac{1}{2}e)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 - \cdots\right]}.$$

§. 76.

Wenn der Schwerpunkt einer Fläche gesucht wird, und die Dichtigkeit überall gleich ist, so wird

$$\frac{1}{\varrho}dM = dx\,dy\sqrt{1 + (d_x z)^2 + (d_y z)^2},$$

und folglich

$$x = \frac{\iint x\,dx\,dy\sqrt{1 + (d_x z)^2 + (d_y z)^2}}{\iint dx\,dy\sqrt{1 + (d_x z)^2 + (d_y z)^2}},\quad y = \frac{\iint y\,dx\,dy\sqrt{1 + (d_x z)^2 + (d_y z)^2}}{\iint dx\,dy\sqrt{1 + (d_x z)^2 + (d_y z)^2}},$$

$$z = \frac{\iint z\,dx\,dy\sqrt{1 + (d_x z)^2 + (d_y z)^2}}{\iint dx\,dy\sqrt{1 + (d_x z)^2 + (d_y z)^2}}.$$

Ist die Fläche eben, so wird

$$x = \frac{\iint \mathrm{x\,dx\,dy}}{\iint \mathrm{dx\,dy}}, \quad y = \frac{\iint \mathrm{y\,dx\,dy}}{\iint \mathrm{dx\,dy}}.$$

Diese Formeln gelten auch für schiefe Coordinaten. Denn es seien x', y', x', y' die schiefen Coordinaten, welche den rechtwinkligen Coordinaten x, y, x, y entsprechen, und φ der Winkel der schiefen Axen, so ist

$$\mathrm{dM} = \mathrm{dx'\,dy'} \sin\varphi,$$

und, wenn die x und x' Axe zusammenfallen,

$$\mathrm{y} = \mathrm{y'} \sin\varphi,$$

daher

$$y = \frac{\iint \mathrm{y'\,dx'\,dy'} \sin^2\varphi}{\iint \mathrm{dx'\,dy'} \sin\varphi} = \sin\varphi \frac{\iint \mathrm{y'\,dx'\,dy'}}{\iint \mathrm{dx'\,dy'}}.$$

Es ist aber auch $y = y' \sin\varphi$, folglich

$$y' = \frac{\iint \mathrm{y'\,dx'\,dy'}}{\iint \mathrm{dx'\,dy'}}, \text{ und ebenso } x' = \frac{\iint \mathrm{x'\,dx'\,dy'}}{\iint \mathrm{dx'\,dy'}}.$$

Beispiele.

1) Schwerpunkt eines Paralleltrapezes. Es sei ABCD das Trapez, F und E die Mitten der parallelen Seiten. Man nehme F als Anfangspunkt des Coordinatensystems, FB als x Axe, FE als y Axe an, und setze der Kürze wegen $\mathrm{AB} = \mathrm{a}$, $\mathrm{CD} = \mathrm{b}$, $\mathrm{EF} = \mathrm{c}$, $\angle \mathrm{EFA} = \varphi$, so ist, weil $\mathrm{IG} = \mathrm{GH} = \frac{\mathrm{a}}{2} - \mathrm{GF} \cdot \frac{\mathrm{a-b}}{2\mathrm{c}}$,

$$\mathrm{x} = \pm\left(\mathrm{a} - \mathrm{y} \cdot \frac{\mathrm{a-b}}{2\mathrm{c}}\right) \text{ und}$$

$$x = \frac{\int_0^c \left(\int_{-x}^{+x} \mathrm{x\,dx}\right) \mathrm{dy}}{\int_0^c \left(\int_{-x}^{+x} \mathrm{dx}\right) \mathrm{dy}}, \quad y = \frac{\int_0^c \left(\int_{-x}^{+x} \mathrm{dx}\right) \mathrm{y\,dy}}{\int_0^c \left(\int_{-x}^{+x} \mathrm{dx}\right) \mathrm{dy}}.$$

Es ist aber

$$\int_0^c \left(\int_{-x}^{+x} \mathrm{x\,dx}\right) \mathrm{dy} = 0,$$

$$\int_0^c \left(\int_{-x}^{+x} \mathrm{dx}\right) \mathrm{y\,dy} = \int_0^c \left(\mathrm{a} - \mathrm{y} \cdot \frac{\mathrm{a-b}}{\mathrm{c}}\right) \mathrm{y\,dy} = \frac{\mathrm{ac}^2}{2} - \frac{(\mathrm{a-b})\mathrm{c}^2}{3} = \frac{(\mathrm{a+2b})\mathrm{c}^2}{6},$$

$$\int_0^c\left(\int_{-x}^{+x}dx\right)dy = \int_0^c\left(a - y\cdot\frac{a-b}{c}\right)dy = ac - \frac{(a-b)c}{2} = \frac{(a+b)c}{2},$$

folglich
$$x = o,\quad y = \frac{(a+2b)c}{3(a+b)}.$$

Wenn O den Schwerpunkt bezeichnet, ist nun

$$FO = \frac{(a+2b)c}{3(a+b)},\quad EO = c - FO = \frac{(2a+b)c}{3(a+b)},$$

$$FO:EO = (a+2b):(2a+b) = \left(\frac{a}{2}+b\right):\left(a+\frac{b}{2}\right).$$

Macht man $CK = \frac{1}{2}a = FB$, $BL = \frac{1}{2}b = ED$ und zieht KL, so ist der Schwerpunkt des Trapezes der Durchschnitt der Linien KL und EF.

2) Schwerpunkt eines Dreiecks. Setzt man in dem vorherstehenden Beispiel $CD = b = o$, so hat man ein Dreieck. Es wird alsdann $y = \frac{1}{3}c$, oder (Fig. 31) $FO = \frac{1}{3}CF$. — Dies folgt auch daraus, dass der Schwerpunkt in beiden Linien CF und AG liegen muss, welche von einer Spitze des Dreiecks zur Mitte der entgegengesetzten Seite gezogen sind. Auch wird man bemerken, dass die Dreiecke AOB, AOC, COB alle gleich gross werden, so wie, dass der Schwerpunkt des Dreiecks auch derjenige dreier gleich grossen Massen ist, deren Schwerpunkte in die drei Spitzen des Dreiecks fallen.

3) Schwerpunkt eines Ellipsensegments. Es sei (Fig. 32) AEB das gegebene Segment, C der Mittelpunkt der Ellipse. DE ∦ AB und FE durch die Mitte von AB gezogen seien die Coordinatenaxen; sie sind alsdann conjugirte Durchmesser. Die Gleichung der Ellipse ist, wenn $CE = a$, $CD = b$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Setzt man $CG = c$, so ist

$$x = \frac{\int_c^a\left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\right)xdx}{\int_c^a\left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\right)dx},\quad y = \frac{\int_c^a\left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}ydy\right)dx}{\int_c^a\left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\right)dx}.$$

Es ist aber

$$\int_c^a\left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\right)xdx = \frac{2b}{a}\int_c^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{2b(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}{3a},$$

$$\int_c^a\left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} ydy\right)dx = o,$$

$$\int_c^a\left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\right)dx = \frac{2b}{a}\int_c^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= b\left[a.\text{arc.}\left(\cos = \frac{c}{a}\right) - \frac{c}{a}\sqrt{a^2-c^2}\right].$$

Setzt man jetzt

$\cos\mu = \frac{c}{a}$, $\sqrt{a^2-c^2} = a\sin\mu$, so wird $x = \frac{\frac{2}{3}a\sin^3\mu}{\mu - \frac{1}{2}\sin 2\mu}$, $y = o$.

Beim Kreise ist 2μ der Winkel des Segments.

Setzt man $c = o$, $\mu = \frac{\pi}{2}$, so findet man für die halbe Ellipse

$$x = \frac{4a}{3\pi}.$$

4) **Schwerpunkt eines Hyperbelsegments.** Es sei (Fig. 33) ABE ein Hyperbelsegment, C der Mittelpunkt; CY $\#$ AB die eine Coordinatenaxe, CX durch die Mitte D von AB gezogen die zweite, so sind CX und CY conjugirte Durchmesser der Hyperbel, und die Gleichung der Hyperbel ist

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Es wird alsdann, wenn CD $= c$,

$$x = \frac{\int_a^c\left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}} dy\right)xdx}{\int_a^c\left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}} dy\right)dx}, \quad y = \frac{\int_a^c\left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}} ydy\right)dx}{\int_a^c\left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}} dy\right)dx}.$$

Es ist aber

$$\int_a^c\left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}} dy\right)xdx = \frac{2b}{a}\int_a^c x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \tfrac{2}{3}\frac{b}{a}(c^2-a^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$\int_a^c\left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}} ydy\right)dx = 0,$$

$$\int_a^c\left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}} dy\right)dx = \frac{2b}{a}\int_a^c \sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

$$= \frac{b}{a}c\sqrt{c^2-a^2} - \tfrac{1}{4}ab\log\text{nat}\left(\frac{c+\sqrt{c^2-a^2}}{c-\sqrt{c^2-a^2}}\right).$$

Es wird also

$$x = \frac{2(c^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{3c\sqrt{c^2-a^2} - \frac{3}{4}a^2\log\text{nat}\left(\frac{c+\sqrt{c^2-a^2}}{c-\sqrt{c^2-a^2}}\right)},\quad y = 0,$$

oder, wenn man $DB = d$ also $d = \frac{b}{a}\sqrt{c^2-a^2}$ setzt,

$$x = \frac{2a^3d^3}{3b^2acd - \frac{3}{4}a^2b^3\log\text{nat}\left(\frac{\frac{c}{a}+\frac{d}{b}}{\frac{c}{a}-\frac{d}{b}}\right)}.$$

5) Schwerpunkt eines Parabelsegments. Es sei (Fig. 34) ACB das Segment, D die Mitte der Sehne AB, CDX parallel mit der Axe der Parabel die eine Coordinataxe, die Tangente CY ∓ AB die zweite, so ist die Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2px,\quad y = \pm\sqrt{2px}.$$

Es wird nun, wenn CD gleich c gesetzt wird,

$$x = \frac{\int_0^c\left(\int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} dy\right)xdx}{\int_0^c\left(\int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} dy\right)dx},\quad y = \frac{\int_0^c\left(\int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} ydy\right)dx}{\int_0^c\left(\int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} dy\right)dx}.$$

Es ist aber

$$\int_0^c\left(\int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} dy\right)xdx = 2\int_0^c \sqrt{2px}\, xdx = \frac{4c^2\sqrt{2pc}}{5},$$

$$\int_0^c\left(\int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} ydy\right)dx = o, \quad \int_0^c\left(\int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} dy\right)dx = \int_0^c \sqrt{2px}\, dx = \tfrac{2}{3}c\sqrt{2pc},$$

und folglich wird

$$x = \tfrac{6}{5}c, \quad y = o.$$

6) **Schwerpunkt eines Segments der Kettenlinie.** Es sei (Fig. 35) A der tiefste Punkt einer Kettenlinie, AB vertical, CD horizontal, AX und AY die beiden Coordinatenaxen, so ist die Gleichung der Kettenlinie (§. 30)

$$y = -\frac{X}{k} + \frac{1}{2}\frac{X}{k}\left(e^{\frac{kx}{X}} + e^{-\frac{kx}{X}}\right).$$

Es wird nun, wenn CD ∥ AX, AB = c, CB = DB = d,

$$x = \frac{\int_0^c\left(\int_{-x}^{+x} xdx\right)dy}{\int_{-d}^{+d}\left(\int_0^y dy\right)dx}, \quad y = \frac{\int_{-d}^{+d}\left(\int_0^y ydy\right)dx}{\int_{-d}^{+d}\left(\int_0^y dy\right)dx}.$$

Es ist aber

$$\int_0^c\left(\int_{-x}^{+x} xdx\right)dy = o,$$

$$\int_{-d}^{+d}\left(\int_0^y ydy\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-d}^{+d}\left[\frac{X^2}{k^2} - \frac{X^2}{k^2}\left(e^{\frac{kx}{X}} + e^{-\frac{kx}{X}}\right) + \frac{1}{4}\frac{X^2}{k^2}\left(e^{\frac{2kx}{X}} + 2 + e^{-\frac{2kx}{X}}\right)\right]dx$$

$$= \frac{3}{2}\frac{X^2 d}{k^2} + \frac{X}{2k}\left(c - \frac{3X}{k}\right)\sqrt{c^2 + \frac{2Xc}{k}},$$

$$\int_{-d}^{+d}\left(\int_0^y dy\right)dx = \int_{-d}^{+d}\left[-\frac{X}{k} + \frac{1}{2}\frac{X}{k}\left(e^{\frac{kx}{X}} + e^{-\frac{kx}{X}}\right)\right]dx$$

$$= -\frac{2Xd}{k} + \frac{2X}{k}\sqrt{c^2 + \frac{2Xc}{k}},$$

und folglich

$$x = 0,\quad y = \frac{\frac{3}{2}\frac{X}{k}d + \frac{1}{2}\left(c - \frac{3X}{k}\right)\sqrt{c^2 + \frac{2Xc}{k}}}{-2d + 2\sqrt{c^2 + \frac{2Xc}{k}}}.$$

7) Schwerpunkt einer cycloidischen Fläche. Fig. 29. Es sei DG = x, GF = y. Man sucht den Schwerpunkt von DGF. Die Gleichung der Cycloide ist

$$y = r\,\text{arc.}\left(\cos = \frac{r-x}{r}\right) + \sqrt{2rx - x^2}.$$

Setzt man hier $\cos\psi = \frac{r-x}{r}$, so wird

$$y = r(\psi + \sin\psi),\quad x = r(1 - \cos\psi),$$

$$x = \frac{\int_0^x \left(\int_0^y dy\right) x\,dx}{\int_0^x \left(\int_0^y dy\right) dx},\quad y = \frac{\int_0^x \left(\int_0^y y\,dy\right) dx}{\int_0^x \left(\int_0^y dy\right) dx}.$$

Es ist jetzt

$$\int_0^x \left(\int_0^y dy\right) x\,dx = \int_0^x xy\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 y - \tfrac{1}{2}\int_0^y x^2\,dy$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 y - \tfrac{1}{2}r^3 \int_0^\psi (1 - \cos\psi)\sin^2\psi\,d\psi$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 y - \tfrac{1}{2}r^3\left(\tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{4}\sin 2\psi - \tfrac{1}{3}\sin^3\psi\right),$$

$$\int_0^x \left(\int_0^y y\,dy\right) dx = \tfrac{1}{2}\int_0^x y^2\,dx = \tfrac{1}{2}y^2 x - \int_0^y yx\,dy$$

$$= \tfrac{1}{2}y^2 x - r^3 \int_0^\psi (\psi + \sin\psi)\sin^2\psi\,d\psi$$

$$= \tfrac{1}{2}y^2 x - r^3\left[\tfrac{1}{4}\psi(\psi - \sin 2\psi) + \tfrac{19}{24} - \tfrac{3}{4}\cos\psi - \tfrac{1}{8}\cos 2\psi + \tfrac{1}{12}\cos 3\psi\right].$$

$$\int_0^x \left(\int_0^y dy\right) dx = \int_0^x y\,dx = xy - \int_0^y x\,dy = xy - r^2\int_0^\psi \sin^2\psi\,d\psi$$

$$= xy - \tfrac{1}{2}r^2\left(\psi - \tfrac{1}{2}\sin 2\psi\right),$$

und folglich wird

$$x = \frac{\frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{2}r^3\left(\frac{1}{2}\psi - \frac{1}{4}\sin 2\psi - \frac{1}{3}\sin^3\psi\right)}{xy - \frac{1}{2}r^2\left(\psi - \frac{1}{2}\sin 2\psi\right)},$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}y^2 x - r^3[\frac{1}{4}\psi(\psi - \sin 2\psi) + \frac{19}{24} - \frac{3}{4}\cos\psi - \frac{1}{8}\cos 2\psi + \frac{1}{12}\cos 3\psi]}{xy - \frac{1}{2}r^2(\psi - \frac{1}{2}\sin 2\psi)}.$$

Für den Schwerpunkt der halben Cycloidenfläche hat man $x = 2r$, $y = \pi r$, $\psi = \pi$, daher

$$x = \tfrac{7}{6}r, \quad y = \left(1 - \frac{16}{9\pi^2}\right)\frac{\pi r}{2},$$

und für die ganze Cycloidenfläche

$$x = \frac{7r}{6}, \quad y = o.$$

§. 77.

Schwerpunkt einer Umdrehungsfläche. Nimmt man als Umdrehungsaxe die x Axe an, bezeichnet durch α den Rotationswinkel von der y Axe gerechnet, und durch r den Abstand eines Punktes der Umdrehungsfläche von der x Axe, so ist

$$z = r\sin\alpha, \quad y = r\cos\alpha, \quad \text{und } r = f(x),$$

die Gleichung der beschreibenden Curve. Es wird also

$$\frac{dM}{\varrho} = r\sqrt{1 + (d_r x)^2}\,dr\,d\alpha,$$

$$x = \frac{\iint rx\sqrt{1 + (d_r x)^2}\,dr d\alpha}{\iint r\sqrt{1 + (d_r x)^2}\,dr d\alpha}, \quad y = \frac{\iint r^2\cos\alpha\sqrt{1 + (d_r x)^2}\,dr d\alpha}{\iint r\sqrt{1 + (d_r x)^2}\,dr d\alpha},$$

$$z = \frac{\iint r^2\sin\alpha\sqrt{1 + (d_r x)^2}\,dr d\alpha}{\iint r\sqrt{1 + (d_r x)^2}\,dr d\alpha}.$$

Ist die Umdrehungsfläche durch zwei auf der x Axe senkrechte Ebenen $x = x_0$ und $x = x$ begrenzt, denen die Werthe $r = r_0$, $r = r$ entsprechen, und durch zwei durch die x Axe gelegte Ebenen, welche den Winkel α mit einander bilden und wovon die eine als mit der xy Ebene zusammenfallend angenommen werden kann, so sind α und r von einander unabhängig und man hat

$$x = \frac{\int_{r_0}^{r} rx\,dr\sqrt{1 + (d_r x)^2}}{\int_{r_0}^{r} r\,dr\sqrt{1 + (d_r x)^2}} = \frac{\int_{x_0}^{x} rx\,dx\sqrt{1 + (d_x r)^2}}{\int_{x_0}^{x} r\,dx\sqrt{1 + (d_x r)^2}},$$

$$y = \frac{\sin\alpha\int_{r_0}^{r} r^2\sqrt{1+(d_r x)^2}\,dr}{\alpha\int_{r_0}^{r} r\,dr\sqrt{1+(d_r x)^2}} = \frac{\sin\alpha\int_{x_0}^{x} r^2\,dx\sqrt{1+(d_x r)^2}}{\alpha\int_{x_0}^{x} r^2\,dx\sqrt{1+(d_x r)^2}},$$

$$z = \frac{(1-\cos\alpha)\int_{r_0}^{r} r^2\,dr\sqrt{1+(d_r x)^2}}{\alpha\int_{r_0}^{r} r\,dr\sqrt{1+(d_r x)^2}} = \frac{(1-\cos\alpha)\int_{x_0}^{x} r^2\,dx\sqrt{1+(d_x r)^2}}{\alpha\int_{x_0}^{x} r\,dx\sqrt{1+(d_x r)^2}}.$$

Ist $\alpha = 2\pi$, so wird $y = 0$ und $z = 0$.

Beispiele.

1) **Schwerpunkt der Oberfläche eines keilförmigen Kugelsectors.** Es ist, wenn der Mittelpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten angenommen wird und R den Kugelhalbmesser bezeichnet,

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad d_x r = -\frac{x}{r}, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{\int_{-R}^{+R} r\,dx\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2}}}{\int_{-R}^{+R} r\,dx\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2}}} = \frac{R\int_{-R}^{+R} x\,dx}{R\int_{-R}^{+R} dx} = 0,$$

$$y = \frac{\sin\alpha\int_{-R}^{+R} r^2\,dx\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2}}}{\alpha\int_{-R}^{+R} r\,dx\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2}}} = \frac{\sin\alpha\int_{-R}^{+R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx}{\alpha\int_{-R}^{+R} dx} = \frac{\pi R\sin\alpha}{4\alpha},$$

$$z = \frac{(1-\cos\alpha)\int_{-R}^{+R} r^2\,dx\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2}}}{\alpha\int_{-R}^{+R} r\,dx\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2}}} = \frac{\pi R(1-\cos\alpha)}{4\alpha}.$$

2) Schwerpunkt einer Zone, deren Höhe gleich h und deren Radius gleich R. Es ist alsdann

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad d_x r = -\frac{x}{r}, \quad \alpha = 2\pi, \text{ folglich}$$

$$\mathfrak{x} = \frac{\int_x^{x+h} r x dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2}}}{\int_x^{x+h} r dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2}}} = \frac{\int_x^{x+h} x dx}{\int_x^{x+h} dx} = x + \tfrac{1}{2}h, \quad \mathfrak{y} = o, \quad \mathfrak{z} = o,$$

d. h. der Schwerpunkt einer Zone liegt in der Mitte ihrer Höhe.

3) Schwerpunkt eines sphärischen Dreiecks. Es sei (Fig. 36) ABC ein sphärisches Dreieck; der Mittelpunkt D werde als Anfangspunkt des Coordinatensystems, DA als x Axe, der Bogen AEY sei senkrecht auf die Seite BC gelegt und seine Ebene als die xy Ebene des Coordinatensystems angenommen. Die Formel für die Ordinate des Schwerpunkts parallel mit der x Axe ist alsdann

$$\mathfrak{x} = \frac{\iint r x \sqrt{1 + (d_r x)^2}\, dr d\alpha}{\iint r \sqrt{1 + (d_r x)^2}\, dr d\alpha},$$

und es ist hier

$$x = \sqrt{R^2 - r^2}, \quad d_r x = -\frac{r}{x},$$

$$\sqrt{1 + (d_r x)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}, \quad x\sqrt{1 + (d_r x)^2} = R.$$

Die Integration in Bezug auf r muss von $r = o$ bis $r = R . \sin AF$ genommen werden. Setzt man der Kürze wegen $EF = \varphi$, $EB = \varphi_0$, $EC = \varphi_1$, $\angle AFE = \psi$, $\angle ABE = \psi_0$, $\angle ACE = \psi_1$, $\angle FAE = \alpha$, $\angle BAE = \alpha_0$, $\angle CAE = \alpha_1$, und bemerkt, dass

$$\tang \alpha = \tang FAE = \frac{\tang \varphi}{\sin AE}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{\sin^2 AE}{\sin^2 AE + \tang^2 \varphi},$$

$$\cos AF = \frac{\cos AE \cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 AE \sin^2 \alpha}}, \quad \cos AE \sin \alpha = \cos \psi,$$

$$\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sin AE}, \quad d\alpha = \frac{d\varphi \sin AE}{1 - \cos^2 AE \cos^2 \varphi} = \frac{d\varphi \sin AE}{\sin^2 AF},$$

$$d\psi = -\cos AF\, d\alpha,$$

so wird

$$x = \frac{\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left(\int_0^{R \sin AF} rdr\right)\frac{d\varphi \sin AE}{\sin^2 AF}}{\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(\int_0^{R \sin AF}\frac{rdr}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right)d\alpha} = \frac{\frac{1}{2}R \sin AE \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi}{\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}(1 - \cos AF)d\alpha}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}R \sin AE(\varphi_1 - \varphi_0)}{\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha + \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi} = \frac{\frac{1}{2}R \sin AE(\varphi_1 - \varphi_0)}{\alpha_1 - \alpha_0 + \psi_1 - \psi_0}.$$

Es ist aber $\varphi_1 - \varphi_0 = BC$, $\alpha_1 - \alpha_0 = \angle A$, $\psi_1 = \angle C$, $\psi_0 = \pi - B$, wenn A, B, C die Winkel des gegebenen Dreiecks bezeichnen. Es wird folglich

$$x = \frac{\frac{1}{2}R \,.\, \sin AE \,.\, BC}{A + B + C - \pi} = \frac{\frac{1}{2}R \,.\, \sin AC \,.\, \sin C \,.\, BC}{A + B + C - \pi},$$

wo x der Abstand der Projection des Schwerpunktes auf der Linie DA vom Mittelpunkte ist. Bezeichnet man durch y' und z' die Abstände der Projectionen des Schwerpunktes auf den Linien DB und DC vom Mittelpunkte, so wird

$$y' = \frac{\frac{1}{2}R \,.\, \sin BA \,.\, \sin A \,.\, AC}{A + B + C - \pi}, \quad z' = \frac{\frac{1}{2}R \,.\, \sin BC \,.\, \sin B \,.\, AB}{A + B + C - \pi}.$$

Wenn man durch die auf diese Weise bestimmten Projectionen des Schwerpunkts auf die Halbmesser DA, DB, DC senkrechte Ebenen legt, so wird ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt der Schwerpunkt des gegebenen Dreiecks sein.

Bezeichnet man durch ϱ den Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkte und durch λ, μ, ν die Winkel, welche ϱ mit den drei Halbmessern DA, DB, DC bildet (Fig. 37), und setzt man der Kürze willen im sphärischen Dreieck AB = c, BC = a, AB = b, so wird

$$\varrho \cos \lambda = \frac{\frac{1}{2}R\, a \sin b \sin C}{A + B + C - \pi}, \quad \varrho \cos \mu = \frac{\frac{1}{2}R\, b \sin c \sin A}{A + B + C - \pi},$$

$$\varrho \cos \nu = \frac{\frac{1}{2}R\, c \sin a \sin B}{A + B + C - \pi}.$$

Es ist jetzt aus der analytischen Geometrie bekannt, dass

$$\cos^2\lambda \sin^2 a + \cos^2\mu \sin^2 b + \cos^2\nu \sin^2 c - 2\cos\mu\cos\nu \sin b \sin c \cos A$$
$$- 2\cos\lambda\cos\nu \sin a \sin c \cos B - 2\cos\lambda\cos\mu \sin a \sin b \cos C$$
$$= 1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + 2\cos a \cos b \cos c.$$

Substituirt man hier die vorigen Werthe von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, und bemerkt, dass $\sin a \sin B = \sin b \sin A$ u. s. w., so findet man

$$\varrho^2 = \frac{\frac{1}{4}R^2 \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A[a^2 + b^2 + c^2 - 2(bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C)]}{(A+B+C-\pi)^2[1-(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + 2\cos a\cos b\cos c]}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$L^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2(bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C)}{1-(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + 2\cos a\cos b\cos c},$$

so wird

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2}LR \sin b \sin c \sin A}{A+B+C-\pi},$$

$$\cos\lambda = \frac{a}{L\sin a}, \quad \cos\mu = \frac{b}{L\sin b}, \quad \cos\nu = \frac{c}{L\sin c}.$$

§. 78.

Zwischen der Lage des Schwerpunktes einer Ebene und dem Inhalt des Umdrehungskörpers, welchen sie durch eine vollständige Umdrehung um eine in der Ebene liegende Axe beschreibt, findet folgende Relation statt: *Der Umdrehungskörper ist gleich dem Product des Inhalts der beschreibenden Ebene mit dem Umkreise des vom Schwerpunkte der Ebene beschriebenen Kreises.*

Nimmt man nämlich die y Axe als Umdrehungsaxe an, bezeichnet durch x und y die Coordinaten des Schwerpunktes der Ebene und durch E die Ebene, so ist der Umdrehungskörper gleich

$$2\pi\iint x\,dx\,dy = 2\pi\frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}\iint dx\,dy = 2\pi x E.$$

Beispiele.

1) Den Inhalt des von einem Kreise beschriebenen Ringes findet man hierdurch, wenn r der Halbmesser des beschreibenden Kreises, a der Abstand des Mittelpunktes von der Umdrehungsaxe ist, gleich $2\pi a \,.\, \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 a$.

2) Den Abstand des Schwerpunktes einer halben Ellipse, welche durch die kleine Axe abgeschnitten ist, findet man aus der Gleichung

$$\tfrac{4}{3}\pi a^2 b = 2\pi x \cdot \frac{\pi a b}{2}, \text{ folglich } x = \frac{4a}{3\pi},$$

ganz wie im dritten Beispiel des §. 75.

§. 79.

Bei einem Körper ist

$$\frac{dM}{\varrho} = dx\,dy\,dz,$$

und daher werden die Coordinaten des Schwerpunktes eines gleichartigen Körpers

$$x = \frac{\iiint x\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz},\quad y = \frac{\iiint y\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz},\quad z = \frac{\iiint z\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz}.$$

Diese Formeln gelten auch für schiefe Coordinaten; denn bezeichnet man durch x', y', z' die schiefen, durch x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten und nimmt an, die x und x' Axe fallen zusammen und die y' Axe falle in die xy Ebene, und bezeichnet durch (xx') und (zz') die Winkel, welche die x und x' und die z und z' Axen mit einander bilden, so wird

$$z = z' \cos(zz'),\quad \frac{dM}{\varrho} = dx'\,dy'\,dz' \sin(xx') \cos(zz'),$$

daher

$$z = \frac{\iiint z'\,dx'\,dy'\,dz' \sin(xx') \cos^2(zz')}{\iiint dx'\,dy'\,dz' \sin(xx') \cos(zz')} = \cos(zz') \frac{\iiint z'\,dx'\,dy'\,dz'}{\iiint dx'\,dy'\,dz'},$$

und folglich

$$z' = \frac{\iiint z'\,dx'\,dy'\,dz'}{\iiint dx'\,dy'\,dz'},$$

und ebenso für die beiden andern Coordinaten x' und y'.

Beispiele.

1) Schwerpunkt einer dreiseitigen parallel abgestumpften Pyramide. Es sei (Fig. 38) ABCNOP die gegebene abgestumpfte Pyramide, E die Mitte der Seite AB, der Scheitel D der Anfangspunkt des schiefen Coordinatensystems, DCZ die z Axe, DX ∦ CE die x Axe, DY ∦ AB die y Axe. Bemerkt man jetzt, dass $KL = LM = \frac{EB}{EC} x$, $HF = \frac{EC}{DC} z$, so wird

$$x = \frac{\int_{DP}^{DC}\left[\int_{o}^{\frac{EC}{DC}z} x\left(\int_{-\frac{EB}{EC}x}^{+\frac{EB}{EC}x} dy\right)dx\right]dz}{\int_{DP}^{DC}\left[\int_{o}^{\frac{EC}{DC}z}\left(\int_{-\frac{EB}{EC}x}^{+\frac{EB}{EC}x} dy\right)dx\right]dz} = \frac{\frac{1}{6}EB\,.\,EC^2\cdot\frac{DC^4 - DP^4}{DC^3}}{\frac{1}{3}EB\,.\,EC\cdot\frac{DC^3 - DP^3}{DC^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{EC}{DC}\cdot\frac{DC^4 - DP^4}{DC^3 - DP^3},$$

$$y = \frac{\int_{DP}^{DC}\left[\int_{o}^{\frac{EC}{DC}z}\left(\int_{-\frac{EB}{EC}x}^{+\frac{EB}{EC}x} y\,dy\right)dx\right]dz}{\int_{DP}^{DC}\left[\int_{o}^{\frac{EC}{DC}z}\left(\int_{-\frac{EB}{EC}x}^{+\frac{EB}{EC}x} dy\right)dx\right]dz} = o,$$

$$z = \frac{\int_{DP}^{DC} z\left[\int_{o}^{\frac{EC}{DC}z}\left(\int_{-\frac{EB}{EC}x}^{+\frac{EB}{EC}x} dy\right)dx\right]dz}{\int_{DP}^{DC}\left[\int_{o}^{\frac{EC}{DC}z}\left(\int_{-\frac{EB}{EC}x}^{+\frac{EB}{EC}x} dy\right)dx\right]dz} = \frac{\frac{1}{4}EB\,.\,EC\cdot\frac{DC^4 - DP^4}{DC^2}}{\frac{1}{3}EB\,.\,EC\cdot\frac{DC^3 - DP^3}{DC^2}}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{DC^4 - DP^4}{DC^3 - DP^3}.$$

Es ist folglich

$$x : z = \tfrac{2}{3}EC : DC,$$

d. h. der Schwerpunkt der abgestumpften Pyramide liegt in der durch die Schwerpunkte beider Grundflächen gezogenen Linie DRQ. Es wird

$$\frac{DC - z}{z - DP} = \frac{DC^4 - 4DC.DP^3 + 3DP^2}{3DC^4 - 4DC^3.DP + DP^4} = \frac{DC^2 + 2DC.DP + 3DP^2}{3DC^2 + 2DC.DP + DP^2},$$

oder, wenn man die beiden Grundflächen mit G und g bezeichnet,

$$\frac{DC - z}{z - DP} = \frac{G + 2\sqrt{Gg} + 3g}{3G + 2\sqrt{Gg} + g}.$$

2) Schwerpunkt einer ganzen dreieckigen Pyramide (Fig. 39). Wenn DP = o oder die Pyramide nicht abgestumpft ist, so wird $x = \frac{1}{2}EC$, $z = \frac{3}{4}DC$. Zieht man eine Linie von D zum Schwerpunkt F der Fläche ABC und theilt diese in vier gleiche Theile, so liegt der Schwerpunkt der Pyramide in dem der Grundfläche nächsten Theilungspunkte. Er liegt also, wo die geraden Linien von einem Scheitel der Pyramide zum Schwerpunkte der entgegengesetzten Seitenfläche der Pyramide einander schneiden; er liegt auch, wo die geraden Linien vom Halbirungspunkte einer Seite zu demjenigen der entgegengesetzten Seite einander schneiden. Er fällt auch mit dem Schwerpunkte von vier gleich grossen Massen, deren Schwerpunkte respective die vier Spitzen der Pyramide sind, zusammen. Es ist auch zu bemerken, dass die vier Pyramiden, deren Grundflächen die vier Seitenflächen der gegebenen Pyramide sind, und deren gemeinschaftlicher Scheitel der Schwerpunkt O der ganzen Pyramide ist, gleich gross werden.

3) Schwerpunkt eines Ellipsoidensegments. Die Gleichung des Ellipsoides nach schiefen conjugirten Axen ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Man sucht den Schwerpunkt eines von zwei mit der xy Ebene parallelen Schnitten, $z = z_0$ und $z = z_1$, begrenzten Abschnitts des Ellipsoides. Es ist alsdann

$$x = \frac{\int_{z_0}^{z_1}\left[\int_{-\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}}^{+\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}}\left(\int_{-\frac{a}{bc}\sqrt{b^2c^2-b^2z^2-c^2y^2}}^{+\frac{a}{bc}\sqrt{b^2c^2-b^2z^2-c^2y^2}} x\,dx\right)dy\right]dz}{\int_{z_0}^{z_1}\left[\int_{-\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}}^{+\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}}\left(\int_{-\frac{a}{bc}\sqrt{b^2c^2-b^2z^2-c^2y^2}}^{+\frac{a}{bc}\sqrt{b^2c^2-b^2z^2-c^2y^2}} dx\right)dy\right]dz} = o,$$

$$y = \frac{\int_{z_0}^{z_1}\left[\int_{-\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}}^{+\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}}\left(\int_{-\frac{a}{bc}\sqrt{b^2c^2-b^2z^2-c^2y^2}}^{+\frac{a}{bc}\sqrt{b^2c^2-b^2z^2-c^2y^2}} dx\right) y\,dy\right] dz}{\int_{z_0}^{z_1}\left[\int_{-\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}}^{+\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}}\left(\int_{-\frac{a}{bc}\sqrt{b^2c^2-b^2z^2-c^2y^2}}^{+\frac{a}{bc}\sqrt{b^2c^2-b^2z^2-c^2y^2}} dx\right) dy\right] dz} = o,$$

$$z = \frac{\int_{z_0}^{z_1}\left[\int_{-\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}}^{+\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}}\left(\int_{-\frac{a}{bc}\sqrt{b^2c^2-b^2z^2-c^2y^2}}^{+\frac{a}{bc}\sqrt{b^2c^2-b^2z^2-c^2y^2}} dx\right) dy\right] z\,dz}{\int_{z_0}^{z_1}\left[\int_{-\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}}^{+\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}}\left(\int_{-\frac{a}{bc}\sqrt{b^2c^2-b^2z^2-c^2y^2}}^{+\frac{a}{bc}\sqrt{b^2c^2-b^2z^2-c^2y^2}} dx\right) dy\right] dz}$$

$$= \frac{\frac{\pi ab}{4c^2}\left[(c^2-z_0^2)^2-(c^2-z_1^2)^2\right]}{\frac{\pi ab}{c^2}\left[(c^2-\frac{1}{3}z_1^2)z_1-(c^2-\frac{1}{3}z_0^2)z_0\right]} = \frac{1}{2}\,\frac{c^2(z_1^2-z_0^2)-\frac{1}{2}(z_1^4-z_0^4)}{c^2(z_1-z_0)-\frac{1}{3}(z_1^3-z_0^3)}.$$

Für das halbe Ellipsoid ist

$$z = \tfrac{3}{8}c.$$

Dieselbe Formel gilt auch für einen Kugelabschnitt, dessen Halbmesser gleich c ist.

§. 80.

Schwerpunkt eines Umdrehungskörpers. Nimmt man bei einem Umdrehungskörper die Umdrehungsaxe als x Axe an, bezeichnet durch α den Rotationswinkel von der y zur z Axe gerechnet, und durch r den Abstand eines Punktes von der Umdrehungsaxe, so ist

$$\frac{dM}{\varrho} = r\,dr\,dx\,d\alpha, \quad y = r\cos\alpha, \quad z = r\sin\alpha, \text{ und folglich}$$

$$x = \frac{\iiint rx\,dr\,dx\,d\alpha}{\iiint r\,dr\,dx\,d\alpha}, \quad y = \frac{\iiint r^2\cos\alpha\,dr\,dx\,d\alpha}{\iiint r\,dr\,dx\,d\alpha}, \quad z = \frac{\iiint r^2\sin\alpha\,dr\,dx\,d\alpha}{\iiint r\,dr\,dx\,d\alpha}.$$

Ist der Umdrehungskörper durch zwei auf der x Axe senkrechte Ebenen, $x = x_0$ und $x = x_1$, und durch zwei durch die

x Axe gelegte Ebenen, welche den Winkel α mit einander bilden und deren eine mit der xy Ebene zusammenfällt, begrenzt, so sind α, r und x unabhängig, und folglich wird

$$x = \frac{\int_{x_0}^{x_1}\left(\int rdr\right)xdx}{\int_{x}^{x_1}\left(\int rdr\right)dx}, \quad y = \frac{\sin\alpha\int_{x_0}^{x_1}\left(\int r^2 dr\right)dx}{\alpha\int_{x_0}^{x_1}\left(\int rdr\right)dx},$$

$$z = \frac{(1-\cos\alpha)\int_{x_0}^{x_1}\left(\int r^2 dr\right)dx}{\alpha\int_{x_0}^{x}\left(\int rdr\right)dx};$$

wenn $\alpha = 2\pi$, werden $y = o$ und $z = o$.

Beispiel.

Schwerpunkt eines keilförmigen Kugelsegments. Es ist die Integration in Bezug auf r von $r = o$ bis $r = \sqrt{R^2 - x^2}$, in Bezug auf x von $x = -R$ bis $x = +R$ auszuführen. Es wird alsdann

$$x = \frac{\frac{1}{2}\int_{-R}^{+R}(R^2 - x^2)xdx}{\frac{1}{2}\int_{-R}^{+R}(R^2 - x^2)dx} = o,$$

$$y = \frac{\frac{1}{3}\sin\alpha\int_{-R}^{+R}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}dx}{\frac{1}{2}\alpha\int_{-R}^{+R}(R^2 - x^2)dx} = \tfrac{3}{16}\pi R\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

$$z = \frac{\frac{1}{3}(1-\cos\alpha)\int_{-R}^{+R}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}dx}{\frac{1}{2}\alpha\int_{-R}^{+R}(R^2 - x^2)dx} = \tfrac{3}{16}\pi R\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}.$$

Bezeichnet man durch $\mathfrak{r}$ den Abstand vom Anfangspunkte des Coordinatensystems, folglich $\mathfrak{r}^2 = r^2 + x^2$, so kann man auch setzen

$$\frac{dM}{\varrho} = \frac{\mathfrak{r}}{x}dr \,.\, rd\alpha \,.\, d\mathfrak{r} = \frac{r\mathfrak{r}\,dr\,d\alpha\,d\mathfrak{r}}{\sqrt{\mathfrak{r}^2 - r^2}}$$

und man hat alsdann

$$x = \frac{\iiint r\mathfrak{r}\,dr\,d\alpha\,d\mathfrak{r}}{\iiint \frac{r\mathfrak{r}\,dr\,d\alpha\,d\mathfrak{r}}{\sqrt{\mathfrak{r}^2 - r^2}}}.$$

Beispiel.

Schwerpunkt einer dreieckigen sphärischen Pyramide. Benutzt man hier wieder die Fig. 36 und die im dritten Beispiel des §. 77 gegebenen Bezeichnungen, so wird

$$x = \frac{\int_0^R \left[\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left(\int_0^{\mathfrak{r}\sin AF} rdr\right)\frac{d\varphi \sin AE}{\sin^2 AF}\right]d\mathfrak{r}}{\int_0^R \left[\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(\int_0^{\mathfrak{r}\sin AF} \frac{rdr}{\sqrt{\mathfrak{r}^2 - r^2}}\right)d\alpha\right]d\mathfrak{r}} = \frac{\frac{1}{2}\sin AC \sin C \,.\, BC\int_0^R \mathfrak{r}^3 d\mathfrak{r}}{(A + B + C - \pi)\int_0^R \mathfrak{r}^2 d\mathfrak{r}}$$

$$= \frac{\frac{3}{8}R \,.\, \sin b \,.\, \sin C \,.\, a}{A + B + C - \pi}.$$

Bezeichnet man durch ϱ den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte und durch λ, μ, ν die Winkel, welche ϱ mit den drei Seiten der Pyramide DA, DB, DC bildet, und setzt wie vorher

$$L^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2(bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C)}{1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + 2\cos a\cos b\cos c},$$

so wird

$$\varrho = \frac{\frac{3}{8}L \,.\, R \,.\, \sin b \,.\, \sin c \,.\, \sin A}{A + B + C - \pi},$$

$$\cos\lambda = \frac{a}{L \,.\, \sin a},\quad \cos\mu = \frac{b}{L \,.\, \sin b},\quad \cos\nu = \frac{c}{L \,.\, \sin c}.$$

§. 81.

Was die Bedingungen des Gleichgewichts schwerer Körper betrifft, so muss, wenn sie in einem Punkte befestigt sind, dieser Punkt und der Schwerpunkt in derselben verticalen Linie liegen; wenn die Körper eine feste Axe haben, muss der Schwerpunkt in die durch diese

Axe gelegte verticale Ebene fallen; wenn der Körper sich auf eine feste Ebene stützt, muss diese horizontal sein und die durch den Schwerpunkt gezogene verticale Linie in das durch die Berührungspunkte bestimmte grösstmögliche Polygon fallen; wenn der Körper sich auf zwei Ebenen stützt, muss die Durchschnittslinie der beiden Ebenen horizontal sein, und wenn der Körper jede Ebene nur in einem Punkte berührt, muss der Durchschnitt der in diesen beiden Berührungspunkten auf den Ebenen senkrecht gezogenen Geraden in einer durch den Schwerpunkt gezogenen verticalen Linie fallen. Alle diese Sätze gehen unmittelbar aus den §§. 24, 25 und 26 hervor, wenn man bemerkt, dass ein schwerer Körper immer nur als von einer im Schwerpuukte wirkenden Kraft angegriffen gedacht werden kann, und bei §. 26, wenn der Körper sich auf eine oder mehrere Ebenen stützt, bemerkt, dass diese im Schwerpunkt angebrachte Schwere des Körpers das Resultat aller in den Berührungspunkten gegen die festen Ebenen wirkenden Drucke sein soll. Es sei (Fig. 40) MN die feste Ebene, A, B, C, D, E, F die Berührungspunkte, G die Projection des Schwerpunktes, so muss, weil der Druck in jedem Berührungspunkte gegen die Ebene wirkt, G auf dieselbe Seite der Geraden AB fallen, wie die übrigen Berührungspunkte; ebenso in Bezug auf die Linien BC, CE, EF, AF, also in dem Polygon ABCEF. Sind (Fig. 41) BC und BD zwei feste Ebenen, E und F die Berührungspunkte, so übt der Körper einen Druck in der Richtung der auf BC senkrechten Linie GE und einen in der Richtung der auf BD senkrechten Linie FG aus. Diese beiden Linien müssen dann einander schneiden und ihr Durchschnitt vertical über dem Schwerpunkte H fallen, weil sie sonst keine durch H gehende verticale Resultante haben können. Die durch die Linien GE, GH, GF gelegte verticale Ebene wird auf die beiden Ebenen BC und BD senkrecht stehen, also auch auf ihren Durchschnitt AB, und diese Linie wird daher horizontal sein müssen.

Cap. VIII.

Anwendung der Theorie der Centrallinie auf schwere magnetische Körper.

§. 82.

Der Magnetismus bringt an jedem Elemente eines für diese Kraft empfindsamen Körpers ein Kräftepaar hervor. Die Lage der Arme jedes dieser Kräftepaare ist von der Vertheilung des Magnetismus im Körper abhängig; die Kräfte der Paare dagegen sind alle parallel und ihre Richtung wird die Richtung der magnetischen Kraft genannt. Sie wird durch den Winkel bestimmt, welchen sie mit einer horizontalen Ebene, und durch den Winkel, welchen eine durch die Richtung der Kraft gelegte verticale Ebene, der magnetische Meridian, mit dem astronomischen Meridian bildet. Der erstere Winkel wird die Inclination, der letztere die Declination genannt. Beide sind auf derselben Stelle der Erde veränderlich, zum Theil regelmässig nach verschiedenen Perioden, zum Theil unregelmässig. Wir werden sie hier ohne Rücksicht auf diese Variationen als unveränderlich betrachten.

An einem schweren magnetischen Körper wirken zwei Systeme paralleler Kräfte; diese sind immer einer Ebene, derjenigen des magnetischen Meridians, parallel und haben nach §. 57 immer eine Centrallinie. Nimmt man den Schwerpunkt des Körpers als Anfangspunkt des Coordinatensystems an und bezeichnet durch Σ die Summationen, welche sich auf die Kräfte der Schwere beziehen, durch Σ' die, welche sich auf die magnetischen Kräfte beziehen, durch P die Kraft eines an einem Elemente wirkenden magnetischen Paares, durch α, β, γ die Winkel, welche dieses mit den drei Coordinatenaxen bildet, so wird

$$\Sigma Xx = 0, \quad \Sigma Xy = 0, \quad \Sigma Xz = 0,$$
$$\Sigma Yx = 0, \quad \Sigma Yy = 0, \quad \Sigma Yz = 0,$$
$$\Sigma Zx = 0, \quad \Sigma Zy = 0, \quad \Sigma Zz = 0,$$

weil die Coordinaten des Schwerpunkts gleich Null sind, und

$$\Sigma' Yx \Sigma' Xy - \Sigma' Xx \Sigma' Yy$$
$$= \cos\beta\, \Sigma' Px \,.\, \cos\alpha\, \Sigma' Py - \cos\alpha\, \Sigma' Px \,.\, \cos\beta\, \Sigma' Py = o,$$
$$\Sigma' Yx \Sigma' Xz - \Sigma' Xx \Sigma' Yz$$
$$= \cos\beta\, \Sigma' Px \,.\, \cos\alpha\, \Sigma' Pz - \cos\alpha\, \Sigma' Px \,.\, \cos\beta\, \Sigma' Pz = o.$$

Diese Werthe in die Gleichungen des §. 57 substituirt geben als die Gleichung der Centrallinie

$$y = \frac{\Sigma Y \Sigma' Xy - \Sigma X \Sigma' Yy}{\Sigma Y \Sigma' Xx - \Sigma X \Sigma' Yx} \cdot x = \frac{\Sigma' Py}{\Sigma' Px} \cdot x,$$
$$z = \frac{\Sigma Y \Sigma' Xz - \Sigma X \Sigma' Yz}{\Sigma Y \Sigma' Xx - \Sigma X \Sigma' Yx} \cdot x = \frac{\Sigma' Pz}{\Sigma' Px} \cdot x.$$

Die Centrallinie geht also durch den Schwerpunkt des Körpers. Ihre Richtung, welche von der Lage des Schwerpunkts unabhängig ist, und daher durch Zufügen von unmagnetischen Theilen unverändert bleibt, kann durch Beobachtung gefunden werden, wenn der Schwerpunkt des Körpers und die Richtung der magnetischen Kraft gegeben sind. Wird nämlich der Körper in seinem Schwerpunkte frei drehbar befestigt und im Gleichgewicht gebracht, so muss das magnetische Resultantenpaar Null werden, d. h. die Centrallinie fällt in dieser Stellung mit der durch den Schwerpunkt gezogenen Richtung der magnetischen Kraft zusammen.

§. 83.

Wird der Körper so gedreht, dass die Centrallinie in der durch die Richtung der magnetischen Kraft und die Richtung der Schwere gelegte Ebene, d. h. in den magnetischen Meridian fällt, so haben die Kräfte, wenn der Körper nur um eine auf dieser Ebene senkrechte Axe gedreht wird, einen Centralpunkt in Bezug auf diese Axe. In der That sind nun, wenn man fortwährend den Schwerpunkt zum Anfangspunkt des Coordinatensystems wählt und die z Axe der Umdrehungsaxe parallel annimmt, weil die z Axe alsdann auf die Richtung der Schwere und auf die Richtung der magnetischen Kraft senkrecht ist, alle $Z = o$, und weil sie auf der Centrallinie senkrecht ist, $\Sigma' Pz = o$, wie aus der Gleichung der Centrallinie (§. 82) hervorgeht. Hierdurch werden die Bedingungen des §. 65

erfüllt. Die Coordinaten des Mittelpunkts werden nach demselben Paragraphen, weil $\Sigma X = o$ und $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$,

$$x = \frac{\cos\alpha\, \Sigma' Px + \sin\alpha\, \Sigma' Py}{\Sigma X}, \quad y = \frac{\cos\alpha\, \Sigma' Py - \sin\alpha\, \Sigma' Px}{\Sigma X},$$

$$z = o,$$

wo ΣX die Schwere des Körpers bezeichnet und die Grösse

$$\cos\alpha\, \Sigma' Py - \sin\alpha\, \Sigma' Px = \Sigma' Xy - \Sigma' Yx$$

das Moment des magnetischen Resultantenpaares in der jetzigen Stellung ist.

Bezeichnet man durch I die Inclination der magnetischen Kraft, durch M das Moment des magnetischen Resultantenpaares, wenn der Körper in eine solche Stellung gebracht ist, dass die Centrallinie auf der Richtung der magnetischen Kraft senkrecht steht und das Paar also das grösstmögliche Moment hat, durch I' den Winkel, welchen die Centrallinie jetzt mit der horizontalen y Axe bildet oder die Inclination der Mittellinie, und durch S die Schwere des Körpers, so ist

$$\Sigma' Py = M \cos I', \quad \Sigma' Px = M \sin I', \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - I, \quad S = \Sigma X,$$

und es werden daher die Coordinaten des Centralpunktes

$$x = \frac{M \cos(I - I')}{S}, \quad y = \frac{M \sin(I - I')}{S},$$

folglich

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}(I - I').$$

$I - I'$ ist aber der Winkel, welchen die Richtung der Centrallinie oder der Arm des magnetischen Resultantenpaares mit der Richtung der magnetischen Kraft bildet, und dieser ist gleich dem Winkel, welchen die Linie vom Schwerpunkt zum Centralpunkt aller Kräfte mit der x Axe oder mit der Richtung der Schwere bildet.

§. 84.

Wenn ein magnetischer und schwerer Körper in einem Punkt befestigt ist, so muss, damit Gleichgewicht stattfinde, der Körper eine solche Stellung haben, dass der Schwerpunkt in die durch den festen Punkt gehende Verticale liegt und die Centrallinie parallel mit der Richtung der magnetischen Kraft ist.

Hat der magnetische Körper eine feste Axe und steht diese auf der Centrallinie und auf der Richtung der Schwere senkrecht, so wird die Lage des Gleichgewichts auf folgende Weise gefunden. Man nehme als Anfangspunkt der Coordinaten den Punkt O (Fig. 42), wo die durch die Centrallinie gelegte verticale Ebene die feste Axe schneidet, diese letzte Axe als z Axe, die x Axe vertical, die y Axe horizontal in der durch die Centrallinie gehende verticale Ebene an; man bezeichne ferner durch μ den Winkel, welchen die xy Ebene mit dem magnetischen Meridian bildet, durch r den Abstand OB des Schwerpunkts vom Anfangspunkte O des Coordinatensystems, durch ψ den Winkel ABO, welchen die Linie mit der Centrallinie bildet, durch ξ und η die Ordinaten $\div$ BD, EB und $\div$ DB des Schwerpunktes B, parallel mit der x und y Axe. Nach §. 71 soll man jetzt, um die Lage des Gleichgewichts zu finden, alle Kräfte auf die xy-Ebene projiciren, wodurch die Kraft S in B unverändert bleibt, von den magnetischen Kräften aber nur die der x und y Axe parallelen Componenten auf die xy Ebene projicirt behalten werden. Der Centralpunkt dieser in der xy Ebene liegenden Kräfte soll dann in der Lage des Gleichgewichts in die x Axe fallen, oder, wenn y ihre der y Axe parallele Ordinate bezeichnet, so muss $y = o$ sein. Es ist aber nach §. 65, wenn man bemerkt, dass

$$\Sigma Y = o,\quad \Sigma' Y = o,\quad \Sigma X = S,\quad \Sigma' X = o,$$

$$\Sigma Xy = S\eta,\quad \Sigma Yx = o,\quad \Sigma Xx = S\xi,\quad \Sigma Yy = o,$$

$$\Sigma' Xx = \cos\alpha\, \Sigma' Px = M\cos\alpha \sin I' = M \sin I \sin I',$$

$$\Sigma' Xy = \cos\alpha\, \Sigma' Py = M\cos\alpha \cos I' = M \sin I \cos I',$$

$$\Sigma' Yy = \cos\beta\, \Sigma' Py = M\cos\beta \cos I' = M\cos\mu \cos I \cos I',$$

$$\Sigma' Yx = \cos\beta\, \Sigma' Px = M\cos\beta \sin I' = M\cos\mu \cos I \sin I',$$

$$x = \frac{S\xi + M(\sin I \sin I' + \cos\mu \cos I \cos I')}{S},$$

$$y = \frac{S\eta + M(\sin I \cos I' - \cos\mu \cos I \sin I')}{S},$$

also wird die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts $y = o$, oder

$$S\eta + M(\sin I \cos I' - \cos\mu \cos I \sin I') = o;$$

es ist aber

$$\eta = -r\,.\cos(\psi - I'),$$

folglich wird

$$M(\sin I \cos I' - \cos \mu \cos I \sin I') - Sr \cos(\psi - I') = o,$$

und hieraus

$$\tang I' = \frac{M \sin I - Sr \cos \psi}{M \cos \mu \cos I + Sr \sin \psi},$$

$$M = \frac{Sr \cos(\psi - I')}{\sin I \cos I' - \cos \mu \cos I \sin I'}, \quad \eta = \frac{M(\cos \mu \cos I \sin I' - \sin I \cos I')}{S}.$$

Wenn $\mu = o$ ist, oder wenn die Drehungsebene des Körpers mit dem magnetischen Meridian zusammenfällt, wird

$$\tang I' = \frac{M \sin I - Sr \cos \psi}{M \cos I + Sr \sin \psi}, \quad M = \frac{Sr \cos(\psi - I')}{\sin(I - I')}, \quad \eta = \frac{M \sin(I - I')}{S}.$$

Geht die feste Axe durch den Centralpunkt oder ist auch $x = o$, so ist der Körper astatisch. Man hat alsdann ausser den vorigen Gleichungen, welche von $y = o$ hergeleitet wurden, noch

$$S\xi + M(\sin I \sin I' + \cos \mu \cos I \cos I') = o.$$

Es ist aber

$$\xi = r . \sin(\psi - I'),$$

daher

$$M(\sin I \sin I' + \cos \mu \cos I \cos I') + Sr \sin(\psi - I') = o.$$

Aus dieser und der vorhergehenden Gleichung

$$M(\sin I \cos I' - \cos \mu \cos I \sin I') - Sr \cos(\psi - I') = o$$

findet man nun

$$\tang(\psi - I') = -\frac{\sin I \sin I' + \cos \mu \cos I \cos I'}{\sin I \cos I' - \cos \mu \cos I \sin I'},$$

$$r^2 = \frac{M^2}{S^2}(\sin^2 I + \cos^2 \mu \cos^2 I),$$

durch welche Gleichungen die Lage des Schwerpunkts bestimmt ist. Verrückt man durch Zufügen von unmagnetischen Theilen den Schwerpunkt bis er in den eben bestimmten Punkt fällt, so wird der Körper um die gegebene Axe astatisch sein. Wenn $\mu = o$, werden die Bedingungsgleichungen

$$\tang(\psi - I') = \cotang(I' - I),$$

oder

$$\psi = \frac{\pi}{2} + I, \quad r = \frac{M}{S}.$$

Geht die feste Umdrehungsaxe durch den Schwerpunkt des Körpers, so wird $r = o$ und die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts

$$\operatorname{tang} I' = \frac{\operatorname{tang} I}{\cos \mu},$$

folglich von M unabhängig. Ist ausserdem $\mu = \frac{\pi}{2}$, so wird auch $I' = \frac{\pi}{2}$, oder die Centrallinie wird vertical stehen; ist $\mu = o$, so wird $I' = I$.

Bezeichnet man durch D die Declination der magnetischen Kraft und durch a das astronomische Azimuth der Centrallinie, so wird

$$\mu = a - D$$

und im Zustande des Gleichgewichts, wenn die feste Axe durch den Schwerpunkt geht,

$$\operatorname{tang} I' = \frac{\operatorname{tang} I}{\cos(a - D)}.$$

Hat man für einen andern Werth des Azimuths $= a'$ statt I' den Winkel I'', so ist auch

$$\operatorname{tang} I'' = \frac{\operatorname{tang} I}{\cos(a' - D)},$$

und hieraus findet man dann

$$\operatorname{tang} D = -\frac{\cos a' \operatorname{tang} I'' - \cos a \operatorname{tang} I'}{\sin a' \operatorname{tang} I'' - \sin a \operatorname{tang} I'},$$

$$\operatorname{tang} I = \operatorname{tang} I' \cos(a - D) = \operatorname{tang} I'' \cos(a' - D).$$

Cap. IX.

Dynamik. Gesetze der Bewegungen eines Systems von mit einander verbundenen Punkten, deren Verbindung durch von der Zeit unabhängige Gleichungen ausgedrückt werden können.

§. 84.

Wenn auf ein System von mit einander verbundenen Punkten, deren Verbindungen durch von der Zeit unabhängige Gleichungen ausgedrückt werden, mehrere Kräfte wirken, so werden in den verschiedenen Punkten dieses Systems gewisse Spannungen oder Drucke stattfinden. Die Kräfte, welche an jedem Punkte angebracht, wo eine solche Spannung oder Druck stattfindet, dieselbe Spannung oder

Druck hervorbringen würden, wurden in §. 11 die Kräfte der Verbindung genannt; man kann sich die Verbindungen der verschiedenen Punkte ganz aufgehoben denken und statt deren die Kräfte der Verbindung wirkend, so wird hierdurch die Bewegung oder das Gleichgewicht des Körpers in nichts geändert.

Die Kräfte, welche die Bewegung des oben beschriebenen Systems bestimmen, wurden im §. 11 gegebene Kräfte genannt.

Man nennt endlich totale Kräfte diejenigen, die, wenn sie allein wirkten und die Verbindung zwischen den Punkten aufgehoben wäre, dieselbe Bewegung hervorbringen würden, wie die gegebenen Kräfte während der stattfindenden Verbindung.

Setzt man jetzt statt der Verbindungen die Kräfte der Verbindungen, so kann man, wie oben bemerkt, die Verbindungen der Punkte ganz aufheben und es geht aus den obigen Definitionen unmittelbar folgender Satz hervor:

In jedem Punkte des Systems muss die totale Kraft die Resultante der gegebenen Kräfte und der Kräfte der Verbindungen sein.

Die Kräfte der Verbindungen können allein keine Bewegung hervorbringen und müssen daher im ganzen Systeme, wenn die stattfindende Verbindung fortdauert, einander im Gleichgewicht halten. Deswegen können *die gegebenen Kräfte durch die totalen Kräfte ersetzt werden*, oder: *die gegebenen Kräfte und die totalen Kräfte, wenn diese in entgegengesetzter Richtung der wirklichen Bewegung genommen werden, halten einander im Gleichgewicht.*

Dieser Satz wird das Princip d'Alemberts genannt.

Die gegebenen Kräfte werden bewegende Kräfte genannt, wenn sie mit der Richtung der Bewegung einen spitzen, widerstrebende, wenn sie mit derselben einen stumpfen Winkel bilden.

§. 85.

Um die totale Kraft durch die stattfindende Bewegung bestimmen zu können, muss man eine auf einen Punkt wirkende Kraft durch die Bewegung dieses Punktes und seiner Masse ausdrücken können. Dieses geschieht mit Hülfe des zweiten Grundgesetzes der

Wirkungsweise der Kräfte, §. 4. das Gesetz der Proportionalität der Kräfte und der Variationen der Geschwindigkeiten.

Bezeichnet man durch K eine unveränderliche Kraft, welche am Ende der ersten Secunde einem materiellen Punkte, dessen Gewicht gleich P ist, die Geschwindigkeit V mittheilt, und folglich auch, weil sie unveränderlich ist, in jeder folgenden Secunde die erhaltene Geschwindigkeit mit V vermehrt, so ist wegen des angeführten Gesetzes $K : P = V : g$,

also $$K = \frac{P}{g} \cdot V = M . V,$$

wo M die Masse des materiellen Punktes ist.

Zwei unveränderliche Kräfte verhalten sich zu einander wie die Produkte der Geschwindigkeiten, welche sie in demselben Zeitraume den Körpern mittheilen können, in die Massen oder Produkte dieser Körper.

Dieses Produkt MV wird die Quantität der Bewegung, oder auch das Bewegungsmoment des Körpers genannt, und ist der unveränderlichen Kraft gleich, welche die Bewegung hervorbringen konnte.

Wenn dagegen die Kraft K veränderlich ist, so kann sie doch während eines Zeitelementes dt als constant betrachtet werden. Bezeichnet man durch dV die Zunahme der Geschwindigkeit in diesem Zeitelemente und bemerkt, dass die Zunahme der Geschwindigkeit, welche die unveränderliche Kraft der Schwere dem Körper in diesem Zeitelemente mitgetheilt haben würde, diesem Zeitelemente proportional gleich gdt ist, so wird

$$K : P = dV : gdt,$$

folglich $$K = \frac{P}{g} \cdot d_t V = M d_t V.$$

Bezeichnet man durch e die von dem in der Richtung der Kraft K bewegten Körper beschriebene gerade Linie, so ist

$$V = d_t e,$$

also auch $$K = \frac{P}{g} \cdot d_t^2 e = M d_t^2 e.$$

§. 86.

Wenn man eine Kraft R, welche auf einen Punkt (x, y, z) wirkt, in drei Kräfte X, Y, Z parallel mit drei auf einander senkrechten Coordinatenaxen zerlegt, so wird, wenn man in der vorhergehenden Formel statt K successive X, Y, Z, und statt e successive x, y, z setzt,

$$X = \frac{P}{g} \cdot d_t^2 x, \quad Y = \frac{P}{g} \cdot d_t^2 y, \quad Z = \frac{P}{g} \cdot d_t^2 z.$$

Bezeichnet man durch s die von einem Punkte beschriebene krumme Linie, so wird die Tangente im Punkte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen Winkel bilden, deren Cosinus gleich $d_s x$, $d_s y$, $d_s z$ sind. Die Componente der Kraft R längs der Tangente, oder die Tangentialkraft des Punktes, wird (§. 10)

$$X d_s x + Y d_s y + Z d_s z,$$

oder, wenn man die Werthe von X, Y, Z substituirt und bemerkt, dass $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, und daher auch $ds\, d^2 s = dx\, d^2 x + dy\, d^2 y + dz\, d^2 z$, gleich

$$\frac{P}{g}(d_t^2 x\, d_s x + d_t^2 y\, d_s y + d_t^2 z\, d_s z) = \frac{P}{g} \cdot d_t^2 s.$$

Die Normale im Punkte (x, y, z) bildet mit den drei Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus gleich $r d_s^2 x$, $r d_s^2 y$, $r d_s^2 z$ sind, wo r den zum Punkte (x, y, z) gehörigen Krümmungshalbmesser der vom Punkte beschriebenen krummen Linie bezeichnet. Die Componente der Kraft R längs der Normale, welche die Centrifugalkraft genannt wird, weil sie den Punkt vom Krümmungsmittelpunkte zu entfernen sucht, wird also

$$\begin{aligned} X r d_s^2 x + Y r d_s^2 y + Z r d_s^2 z &= \frac{Pr}{g}(d_t^2 x\, d_s^2 x + d_t^2 y\, d_s^2 y + d_t^2 z\, d_s^2 z) \\ &= \frac{Pr}{g}(d_t s)^2 [(d_s^2 x)^2 + (d_s^2 y)^2 + (d_s^2 z)^2] \\ &= \frac{Pr}{g}(d_t s)^2 \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{P}{g} \cdot \frac{(d_t s)^2}{r} \\ &= \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{r}, \end{aligned}$$

wo v die Geschwindigkeit des Punktes bezeichnet.

Die zwei Kräfte, die Tangentialkraft, gleich $\frac{P}{g} \cdot d_t^2 s$, und die Centrifugalkraft, gleich $\frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$, stellen die Kraft R vollständig dar. Die Summe ihrer Componenten längs jeder der drei Coordinatenaxen ist nämlich der Componente von R längs derselben Axe gleich. Man hat in der That

$$\frac{P}{g} d_t^2 s \cdot d_s x + \frac{P}{g} \cdot \frac{(d_t s)^2}{r} \cdot r d_s^2 x = \frac{P}{g} [d_t^2 s \cdot d_s x + d_s^2 x \cdot (d_t s)^2]$$

$$= \frac{P}{g} d_t (d_s x \cdot d_t s) = \frac{P}{g} d_t (d_t x) = \frac{P}{g} d_t^2 x = X,$$

und ebenso längs jeder der beiden anderen Axen; R ist folglich die Resultante dieser zwei Kräfte.

Wenn die Bahn eine gerade Linie ist, wird $\frac{1}{r} = o$, und daher die Centrifugalkraft gleich Null.

§. 87.

Durch die in den §§. 14 und 15 entwickelten Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts können, wie wir in den Cap. III. und IV. gesehen haben, alle Probleme des Gleichgewichts gelöst werden. Wendet man diese Gleichungen auf das im §. 84 entwickelte d'Alembertsche Princip des Gleichgewichts der gegebenen und der in entgegengesetzter Richtung genommenen totalen Kräfte an, so können auch alle Probleme der Bewegung durch Gleichungen ausgedrückt werden.

Bezeichnet man durch $p_1, p_2, p_3, \ldots$ das Gewicht der Punkte des gegebenen Systems, durch $m_1, m_2, m_3, \ldots$ ihre Massen, so ist wegen §. 85 die auf dem Punkte (x_r, y_r, z_r) wirkende totale Kraft, längs der drei Coordinatenaxen zerlegt,

$$\frac{p_r}{g} d_t^2 x_r, \quad \frac{p_r}{g} d_t^2 y_r, \quad \frac{p_r}{g} d_t^2 z_r.$$

Die Kräfte X_r, Y_r, Z_r, welche auf diesem Punkte wirken, müssen nun nach dem d'Alembertschen Princip, wenn die Verbindungen

$$u_1 = o, \quad u_2 = o, \ldots . \; u_p = o$$

stattfinden, mit jenen totalen Kräften, wenn ihre Zeichen verändert

werden, im Gleichgewichte sein, d. h. die auf dem Punkte (x_1, y_1, z_1) wirkenden Kräfte

$$X_1 - \frac{p_1}{g} d_t^2 x_1, \quad Y_1 - \frac{p_1}{g} d_t^2 y_1, \quad Z_1 - \frac{p_1}{g} d_t^2 z_1,$$

die auf dem Punkte (x_2, y_2, z_2) wirkenden Kräfte

$$X_2 - \frac{p_2}{g} d_t^2 x_2, \quad Y_2 - \frac{p_2}{g} d_t^2 y_2, \quad Z_2 - \frac{p_2}{g} d_t^2 z_2 \text{ u. s. w.}$$

müssen im Gleichgewichte sein. Diese Kräfte werden auch deswegen die verlorenen Kräfte des Systems genannt. Die Gleichungen des Gleichgewichts des §. 14 werden aber nun

$$X_1 - \frac{p_1}{g} d_t^2 x_1 = a_1 d_{x_1} u_1 + a_2 d_{x_1} u_2 + \dots a_p d_{x_1} u_p,$$

$$Y_1 - \frac{p_1}{g} d_t^2 y_1 = a_1 d_{y_1} u_1 + a_2 d_{y_1} u_2 + \dots a_p d_{y_1} u_p,$$

$$Z_1 - \frac{p_1}{g} d_t^2 z_1 = a_1 d_{z_1} u_1 + a_2 d_{z_1} u_2 + \dots a_p d_{z_1} u_p,$$

$$X_2 - \frac{p_2}{g} d_t^2 x_2 = a_1 d_{x_2} u_1 + a_2 d_{x_2} u_2 + \dots a_p d_{x_2} u_p,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Z_n - \frac{p_n}{g} d_t z_n = a_1 d_{z_n} u_1 + a_2 d_{z_n} u_2 + \dots a_p d_{z_n} u_p.$$

Eliminirt man zwischen diesen 3n Gleichungen die p willkürlichen Coëfficienten $a_1, a_2, \dots a_p$, so erhält man $3n - p$ Gleichungen, welche eben die Bedingungsgleichungen der Bewegung sind.

Die Spannung oder der Druck in jedem Punkte des gegebenen Systems wird auf dieselbe Weise wie im §. 14 berechnet werden müssen, wenn man nur statt der gegebenen Kräfte $X_1, Y_1, Z_1, X_2, \dots$ die verlorenen Kräfte

$$X_1 - \frac{p_1}{g} d_t^2 x_1, \quad Y_1 - \frac{p_1}{g} d_t^2 y_1, \quad Z_1 - \frac{p_1}{g} d_t^2 z_1, \quad X_2 - \frac{p_2}{g} d_t^2 x_2, \dots$$

welche letzteren jetzt im Gleichgewichte sind, substituirt.

§. 88.

Die Tension der dem Punkte (x, y, z) gehörigen totalen Kraft, d. h. die längs der Tangente des beschriebenen Bogens wirkende Componente derselben, ist nach §. 86, wenn man durch e den vom Punkte beschriebenen Bogen bezeichnet, gleich $\frac{p}{g} d_t^2 e$, und die vir-

tuelle Arbeit dieser Kraft (§. 19) $\frac{p}{g} d_t^2 e \cdot d_t e$. Wendet man das d'Alembertsche Princip auf das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten an, so erhält man (§. 19)

$$\Sigma T d_t s - \Sigma T' d_t s' - \Sigma \frac{p}{g} d_t^2 e \cdot d_t e = o,$$

oder

$$\Sigma T d_t s - \Sigma T' d_t s' = \Sigma \frac{p}{g} d_t^2 e \cdot d_t e,$$

wo T und T' die Tensionen der bewegenden und widerstehenden Kräfte und s und s' die von ihren Angriffspunkten beschriebenen Bogen bezeichnen. Es sei nun v die Geschwindigkeit eines Punktes des Systems, so ist $d_t e = v$, $d_t^2 e \cdot d_t e = v d_t v$, und die obige Gleichung wird daher

$$\Sigma T d_t s - \Sigma T' d_t s' = \Sigma \frac{p}{g} v d_t v.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit dt, integrirt in Bezug auf t von o bis t, und bezeichnet durch v_0 den dem Zeitpunkte $t = o$ entsprechenden Werth der Geschwindigkeit v, so erhält man

$$\int_o^t \Sigma T d_t s \cdot dt - \int_o^t \Sigma T' d_t s' \cdot dt = \Sigma \frac{p v^2}{2g} - \Sigma \frac{p v_0^2}{2g} = \Sigma \frac{m v^2}{2} - \Sigma \frac{m v_0^2}{2}.$$

Der Ausdruck $\frac{m v^2}{2}$ oder die Hälfte der Masse eines Punktes mit dem Quadrate seiner Geschwindigkeit multiplicirt, wird die lebendige Kraft des Punktes genannt. Das Integral $\int_o^t T d_t s dt$ wird die dynamische Arbeit der Kraft, deren Tension T ist, während der Zeit t genannt. Die obige Gleichung kann auch folgender Weise ausgesprochen werden:

In einem bewegten System von Punkten ist die Differenz zwischen der Summe der dynamischen Arbeiten der bewegenden Kräfte und der Summe der dynamischen Arbeiten der widerstehenden Kräfte während eines gewissen Zeitraumes dem Zuwachs der lebendigen Kraft des Systems in diesem Zeitraume gleich.

Dies wird der Satz der lebendigen Kraft genannt, und die obige Gleichung die Gleichung der lebendigen Kraft.

Diese Gleichung kann statt einer der aus den Gleichungen des vorigen Paragraphen durch Elimination der Coëfficienten $a_1, a_2, \ldots a_p$ gebildeten $3n-p$ Gleichungen gesetzt werden, und wenn $3n-p = 1$, braucht man nur diese Gleichung, welche alsdann das ganze Gesetz der Bewegung ausdrückt, anzuwenden.

Bei der Anwendung der Gleichung der lebendigen Kraft muss berücksichtigt werden, dass die materiellen Theilchen, welche zu dem beim Anfange des Zeitraumes vorhanden gewesenen System gehören, auch zu dem beim Ende des Zeitraumes vorhanden gewesenen gerechnet werden. Ist z. B. ein Fluidum ein Theil des Systems, so muss man bei der Anwendung der Gleichung der lebendigen Kraft dieselben Theile des Fluidums am Anfange wie am Ende des Zeitraumes betrachten, nicht die, welche in diesen Augenblicken denselben Platz einnehmen.

Aus der Gleichung der lebendigen Kraft geht hervor, dass diese Kraft in einem gegebenen Zeitraume unverändert bleibt, wenn während dieses Zeitraumes auf das System keine weder bewegenden noch widerstehenden Kräfte wirken. Dies wird der Satz der Beibehaltung der lebendigen Kraft genannt. Es folgt hieraus, dass die lebendige Kraft durch keine Maschine vergrössert werden kann, und, wenn keine widerstehenden Kräfte, wie Friction, Adhäsion u. s. w. stattfänden, auch nicht vermindert werden könnte.

§. 89.

Kennt man die lebendige Kraft eines Systems von materiellen Punkten, wenn man nur ihre Bewegung relativ zum Schwerpunkte des Systems betrachtet, und man auch die Bewegung dieses Schwerpunktes kennt, so kann man hieraus die absolute lebendige Kraft des Systems leicht finden. Ziehen wir nämlich durch den Schwerpunkt drei Coordinataxen, welche immer parallel mit einem gegebenen festen System von Coordinaten bleiben, und nennt man x', y', z' die Coordinaten eines Punktes relativ zu diesem beweglichen Axensysteme, x, y, z die Coordinaten desselben Punktes relativ zum festen Axensysteme, und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Coordinaten des Schwerpunkts, so ist

$$x = \mathfrak{x} + x', \quad y = \mathfrak{y} + y', \quad z = \mathfrak{z} + z',$$

und daher

$$d_t x = d_t \mathfrak{x} + d_t x', \quad d_t y = d_t \mathfrak{y} + d_t y', \quad d_t z = d_t \mathfrak{z} + d_t z'.$$

Die lebendige Kraft eines Punktes wird nun

$$\frac{pv^2}{2g} = \frac{p}{2g}(d_t s)^2 = \frac{p}{2g}[(d_t x)^2 + (d_t y)^2 + (d_t z)^2]$$
$$= \frac{p}{2g}[(d_t \mathfrak{x} + d_t x')^2 + (d_t \mathfrak{y} + d_t y')^2 + (d_t \mathfrak{z} + d_t z')^2]$$
$$= \frac{p}{2g}[(d_t \mathfrak{x})^2 + (d_t \mathfrak{y})^2 + (d_t \mathfrak{z})^2]$$
$$+ \frac{p}{g}[d_t \mathfrak{x} d_t x' + d_t \mathfrak{y} d_t y' + d_t \mathfrak{z} d_t z']$$
$$+ \frac{p}{2g}[(d_t x')^2 + (d_t y')^2 + (d_t z')^2].$$

Die lebendige Kraft des ganzen Systems wird also

$$[(d_t \mathfrak{x})^2 + (d_t \mathfrak{y})^2 + (d_t \mathfrak{z})^2]\Sigma\frac{p}{2g} + \frac{d_t \mathfrak{x}}{g}\Sigma p d_t x' + \frac{d_t \mathfrak{y}}{g}\Sigma p d_t y' + \frac{d_t \mathfrak{z}}{g}\Sigma p d_t z'$$
$$+ \Sigma\frac{p}{2g}[(d_t x')^2 + (d_t y')^2 + (d_t z')^2].$$

Weil aber der Schwerpunkt der Anfangspunkt des beweglichen Coordinatensystems ist, folglich alle seine Coordinaten relativ zu diesem Systeme Null, so wird $\Sigma p d_t x' = 0$, $\Sigma p d_t y' = 0$, $\Sigma p d_t z' = 0$. Substituirt man diese Werthe und bezeichnet durch $P = \Sigma p$ das Gewicht des ganzen Systems, so wird die lebendige Kraft

$$\frac{P}{2g}[(d_t \mathfrak{x})^2 + (d_t \mathfrak{y})^2 + (d_t \mathfrak{z})^2] + \Sigma\frac{p}{2g}[(d_t x')^2 + (d_t y')^2 + (d_t z')^2].$$

Die lebendige Kraft des Systems ist gleich der Summe der lebendigen Kraft des Schwerpunkts, wenn das ganze System da concentrirt wäre, und der lebendigen Kraft des Systems, wenn nur die Bewegung relativ zum Schwerpunkte berücksichtigt wird. Hat das System keine relative Bewegung zu dem Coordinatensystem des Schwerpunkts, so wird das letzte Glied Null und die lebendige Kraft gleich derjenigen des Schwerpunktes sein.

§. 90.

Ist das gegebene System von Punkten ganz frei, so werden die Verbindungsgleichungen $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, ... nur Functionen

der gegenseitigen Entfernungen der Punkte sein. Es seien diese durch r, r', r'' ... bezeichnet, und daher

$$u_p = f_p(r, r', r'' \ldots),$$

wo

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$
$$r'^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2,$$
$$r''^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2, \text{ u. s. w.}$$

Es wird alsdann

$$d_{x_1} r + d_{x_2} r = o, \quad d_{x_1} r' + d_{x_3} r' = o, \quad d_{x_2} r'' + d_{x_3} r'' = o,$$
$$d_{x_3} r = o, \quad d_{x_2} r' = o, \quad d_{x_1} r'' = o, \text{ u. s. w.};$$

ferner

$$d_{x_1} u_1 = d_r u_1 . d_{x_1} r + d_{r'} u_1 . d_{x_1} r' + d_{r''} u_1 . d_{x_1} r'' + \ldots$$
$$d_{x_2} u_1 = d_r u_1 . d_{x_2} r + d_{r'} u_1 . d_{x_2} r' + d_{r''} u_1 . d_{x_2} r'' + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und alsdann durch Addition

$$\Sigma d_x u_1 = o, \text{ und ebenso } \Sigma d_x u_2 = o, \ \Sigma d_x u_3 = o, \ldots$$
$$\Sigma d_y u_1 = o, \ \Sigma d_y u_2 = o, \ldots \ \Sigma d_z u_1 = o, \ \Sigma d_z u_2 = o, \ldots$$

Die Bewegungsgleichungen des §. 87 geben nun durch Addition

$$\Sigma X = \Sigma \frac{p}{g} d_t^2 x, \quad \Sigma Y = \Sigma \frac{p}{g} d_t^2 y, \quad \Sigma Z = \Sigma \frac{p}{g} d_t^2 z.$$

Bezeichnet man jetzt durch x, y, z die Coordinaten des Schwerpunktes, so wird

$$\Sigma \frac{p}{g} d_t^2 x = \frac{P}{g} d_t^2 x, \quad \Sigma \frac{p}{g} d_t^2 y = \frac{P}{g} d_t^2 y, \quad \Sigma \frac{p}{g} d_t^2 z = \frac{P}{g} d_t^2 z.$$

Es wird folglich

$$\frac{P}{g} d_t^2 x = \Sigma X, \quad \frac{P}{g} d_t^2 y = \Sigma Y, \quad \frac{P}{g} d_t^2 z = \Sigma Z,$$

d. h. *Bei einem ganz freien System von Punkten bewegt sich der Schwerpunkt wie wenn alle Massen in ihm vereinigt und alle Kräfte an ihm angebracht wären.*

Man erhält ferner

$$y_1 d_{x_1} u_1 - x_1 d_{y_1} u_1 = d_r u_1 (y_1 d_{x_1} r - x_1 d_{y_1} r)$$
$$+ d_{r'} u_1 (y_1 d_{x_1} r' - x_1 d_{y_1} r') + \ldots$$
$$y_2 d_{x_2} u_1 - x_2 d_{y_2} u_1 = d_r u_1 (y_2 d_{x_2} r - x_2 d_{y_2} r)$$
$$+ d_{r'} u_1 (y_2 d_{x_2} r' - x_2 d_{y_2} r') + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Es ist aber

$$y_1 d_{x_1} r - x_1 d_{y_1} r + y_2 d_{x_2} r - x_2 d_{y_2} r = (y_1 - y_2) d_{x_1} r - (x_1 - x_2) d_{y_1} r$$

$$= \frac{(y_1 - y_2)(x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{r_1} = o,$$

$$y_3 d_{x_3} r - x_3 d_{y_3} r = o, \quad d_{x_3} r = o, \quad d_{y_3} r = o, \text{ u. s. w.}$$

Ebenso findet man

$$y_1 d_{x_1} r' - x_1 d_{y_1} r' + y_3 d_{x_3} r' - x_3 d_{y_3} r' = o, \quad y_2 d_{x_2} r' - x_2 d_{y_2} r' = o, \ldots$$

Folglich erhält man durch Addition der vorstehenden Gleichungen

$$\Sigma(y d_x u_1 - x d_y u_1) = o, \text{ und ebenso } \Sigma(y d_x u_2 - x d_y u_2) = o, \ldots$$

$$\Sigma(z d_y u_1 - y d_z u_1) = o, \quad \Sigma(z d_y u_2 - y d_z u_2) = o, \ldots$$

$$\Sigma(x d_z u_1 - z d_x u_1) = o, \quad \Sigma(x d_z u_2 - z d_x u_2) = o, \ldots$$

Die Bewegungsgleichungen des §. 87 geben nun

$$\Sigma(Xy - Yx) = \Sigma \frac{p}{g}(y d_t^2 x - x d_t^2 y), \quad \Sigma(Yz - Zy) = \Sigma \frac{p}{g}(z d_t^2 y - y d_t^2 z),$$

$$\Sigma(Zx - Xz) = \Sigma \frac{p}{g}(x d_t^2 z - z d_t^2 x),$$

oder

$$\Sigma(Xy - Yx) = d_t \Sigma \frac{p}{g}(y d_t x - x d_t y),$$

$$\Sigma(Yz - Zy) = d_t \Sigma \frac{p}{g}(z d_t y - y d_t z),$$

$$\Sigma(Zx - Xz) = d_t \Sigma \frac{p}{g}(x d_t z - z d_t x).$$

Die Ausdrücke $\Sigma(Xy - Yx)$, $\Sigma(Yz - Zy)$, $\Sigma(Zx - Xz)$ sind die Summen der Momente der gegebenen Kräfte in Bezug auf die drei Coordinatenaxen; $\frac{p}{g} d_t x$, $\frac{p}{g} d_t y$, $\frac{p}{g} d_t z$ sind die Componenten der Bewegungsmomente des Punktes (x, y, z), und die Ausdrücke $\frac{p}{g}(y d_t x - x d_t y)$, $\frac{p}{g}(z d_t y - y d_t z)$, $\frac{p}{g}(x d_t z - z d_t x)$ werden daher die Componenten des Paares dieses Bewegungsmomentes genannt. Die obigen Gleichungen enthalten folglich, dass die Aenderungen des zusammengesetzten Paares der Bewegungsmomente in Bezug auf den Anfangspunkt der Coordinaten nur durch die Momente der gegebenen Kräfte bedingt sind.

Es seien die Momente der gegebenen Kräfte gleich Null, oder sie heben einander gegenseitig auf, d. h. es sei $\Sigma(Xy - Yx) = o$, $\Sigma(Yz - Zy) = o$, $\Sigma(Zx - Xz) = o$, was z. B. stattfindet, wenn alle Kräfte gegen den Anfangspunkt der Coordinaten gerichtet sind, oder wenn alle die gegebenen Kräfte in gegenseitigen Anziehungen und Abstossungen zwischen den gegebenen Punkten bestehen, so erhält man durch Integration

$$\Sigma\frac{p}{g}(yd_t x - xd_t y) = c,\ \Sigma\frac{p}{g}(zd_t y - yd_t z) = c',\ \Sigma\frac{p}{g}(xd_t z - zd_t x) = c'',$$

d. h. das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente bleibt nach Richtung und Grösse unveränderlich. Die Constanten c, c', c'' drücken die Componente derselben nach den Coordinatenebenen aus.

Dieser Satz kann auch anders ausgedrückt werden. Es ist nämlich $yd_t x - xd_t y$ das Doppelte des Flächenraumes, welches die Projection auf der xy Ebene des vom Anfangspunkte der Coordinaten zum Punkte (x, y, z) gehenden Leitstrahls in einer Zeiteinheit beschreibt, und ähnliche Bedeutung haben die Ausdrücke $zd_t y - yd_t z$, $xd_t z - zd_t x$. *Es sind daher die Summen der Flächenräume, welche die Projectionen auf eine unveränderliche Ebene der vom Anfangspunkte des Coordinatensystems nach den Punkten des Systems gehenden Leitstrahlen in einem Zeitelemente überstreichen, jeder mit der Masse des entsprechenden Punktes multiplicirt, einander gleich, und die in einem endlichen Zeitraume überstrichenen Flächenräume, jeder mit der Masse des entsprechenden Punktes multiplicirt, sind folglich der Zeit proportional.*

Dies wird der Satz von der Erhaltung der Flächen genannt.

Die Werthe der übergestrichenen, mit der Masse der entsprechenden Punkte multiplicirten Flächenräume sind für die Zeiteinheit und in Bezug auf die xy, yz, xz Coordinatenebenen $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}c'$, $\frac{1}{2}c''$. Setzt man auf die z, x, y Axe dieser Grössen proportionale Linien ab, zieht die Diagonale des von diesen Linien gebildeten Parallelepipedons, so wird die Summe der von den Projectionen der Leit-

strahlen in der Zeiteinheit überstrichenen Flächen, jede mit der Masse des entsprechenden Punktes multiplicirt, am grössten, wenn die Projectionsebene auf diese Diagonale senkrecht steht; ihr Werth wird nämlich $\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}$, dagegen auf jede andere Ebene, welche mit dieser einen Winkel ϑ bildet, $\frac{1}{2}\cos\vartheta\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}$.

§. 91.

Bezeichnet man wie vorher durch U die im §. 18 definirte Kräftefunction, d. h. eine Function von $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n$, deren partielle Differentialen

$$d_{x_1}U = X_1,\quad d_{y_1}U = Y_1,\quad d_{z_1}U = Z_1,$$
$$d_{x_2}U = X_2,\quad d_{y_2}U = Y_2,\quad d_{z_2}U = Z_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so können die Gleichungen des §. 87 auch so geschrieben werden:

$$\frac{p_1}{g}d_t^2x_1 = d_{x_1}U - a_1 d_{x_1}u - a_2 d_{x_1}u_2 - \ldots - a_p d_{x_1}u_p,$$
$$\frac{p_1}{g}d_t^2y_1 = d_{y_1}U - a_1 d_{y_1}u - a_2 d_{y_1}u_2 - \ldots - a_p d_{y_1}u_p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Multiplicirt man jede dieser Gleichungen der Reihe nach mit d_tx_1, d_ty_1, $d_tz_1, \ldots$ und addirt, so erhält man

$$\begin{aligned}\Sigma\frac{p}{g}(d_t^2x.d_tx + d_t^2y.d_ty + d_t^2z.d_tz) &= \Sigma(d_xU.d_tx + d_yU.d_ty + d_zU.d_tz)\\ &- a_1\Sigma(d_xu_1.d_tx + d_yu_1.d_ty + d_zu_1.d_tz)\\ &- a_2\Sigma(d_xu_2.d_tx + d_yu_2.d_ty + d_zu_2.d_tz)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &- a_p\Sigma(d_xu_p.d_tx + d_yu_p.d_ty + d_zu_p.d_tz) = d_tU,\end{aligned}$$

weil $u_1, u_2, \ldots$ von der Zeit t unabhängig sind und folglich ihre Differentialen in Bezug auf t gleich Null. Integrirt man und bezeichnet durch U_0 den der Zeit $t = o$ entsprechenden Werth von U, so wird

$$U - U_0 = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{p}{g}[(d_tx)^2 + (d_ty)^2 + (d_tz)^2] = \Sigma\frac{mv^2}{2} - \Sigma\frac{mv_0^2}{2},$$

d. h. der Zuwachs der Kräftefunction ist dem Zuwachs der lebendigen Kraft gleich.

Weil $d_t U = \Sigma(X d_t x + Y d_t y + Z d_t z)$, so wird, wenn keine Kräftefunction stattfindet, d. h. wenn $\Sigma(X d_t x + Y d_t y + Z d_t z)$ kein genaues Differential ist, doch immer

$$\Sigma(X d_t x + Y d_t y + Z d_t z) = \Sigma m v d_t v.$$

Cap. X.

Gesetze der Bewegung eines festen Körpers.

a) Bewegung des Schwerpunkts eines freien festen Körpers oder eines materiellen Punktes.

§. 92.

Um die Gesetze der Bewegung eines festen Körpers kennen zu lernen, muss man erstens die Bewegung irgend eines Punktes O und zweitens die relative Bewegung aller übrigen Punkte in Beziehung auf O, d. h. die Drehung des Körpers um O, kennen lernen. Wenn ein Punkt des Körpers fest ist, so fällt, indem man diesen für O nimmt, der erste Theil der Aufgabe weg; ist aber der Körper frei, so ist es am vortheilhaftesten für O den Schwerpunkt des Körpers zu nehmen, weil alsdann nach §. 90 die Bewegung des Körpers eben so erfolgt, als ob die ganze Masse des Körpers in ihm vereinigt wäre und alle Kräfte unmittelbar auf ihn wirkten. Wir werden daher erst die Bewegung eines solchen materiellen Punktes betrachten.

Es sei p das Gewicht des Punktes, $\frac{p}{g} = m$ seine Masse, x, y, z seine Coordinaten und X, Y, Z die Componenten längs drei im Raume festen Coordinatenaxen der auf dem gegebenen Punkte wirkenden Kräfte. Die verlorenen Kräfte $X - m d_t^2 x$, $Y - m d_t^2 y$, $Z - m d_t^2 z$ sollen dann nach §. 87 im Gleichgewicht sein, und die Gleichungen des Gleichgewichts dieser auf einen Punkt wirkenden Kräfte werden

$$X - m d_t^2 x = o, \quad Y - m d_t^2 y = o, \quad Z - m d_t^2 z = o,$$

daher

$$X = m d_t^2 x, \quad Y = m d_t^2 y, \quad Z = m d_t^2 z.$$

Wenn nun hier X, Y, Z als Functionen der Coordinaten x, y, z und etwa noch der Zeit t gegeben sind, so kann man durch Integration dieser drei Differentialgleichungen drei Gleichungen zwischen x, y, z, t erlangen, und folglich die Coordinaten des Punktes als Functionen der Zeit t bestimmen. Um die durch diese Integration erhaltenen 6 Constanten zu finden, muss man die Coordinaten und die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes für einen gegebenen Augenblick kennen.

§. 93.

Wir werden als erstes Beispiel die Bewegung eines geworfenen materiellen Punktes im leeren Raume betrachten, wenn die Schwere sowohl der Grösse als der Richtung nach unveränderlich betrachtet wird. Es sei die z Axe vertical und positiv nach oben. Man hat alsdann

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = \div p = \div mg,$$

und die Bewegungsgleichungen des Punktes werden nun

$$d_t^2 x = o, \quad d_t^2 y = o, \quad d_t^2 z = -g.$$

Es sei die Anfangsgeschwindigkeit u, ihre Neigung gegen den Horizont α, und sie finde in der Ebene xz statt; der Punkt befinde sich ferner ursprünglich im Anfangspunkte der Coordinaten. Es ist dann für $t = o$,

$$x = o, \; y = o, \; z = o, \; d_t x = u \cos\alpha, \; d_t y = o, \; d_t z = u \sin\alpha.$$

Es wird alsdann durch Integration der obigen Differentialgleichungen

$$d_t x = u\cos\alpha, \quad d_t y = o, \quad d_t z = u \sin\alpha - gt,$$

$$x = u \cos\alpha\, t, \quad y = o, \quad z = u \sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Die Bewegung findet folglich fortwährend in der xz Ebene statt. Durch Elimination von t erhält man

$$2u^2 \cos^2\alpha\, z = 2u^2 \sin\alpha \cos\alpha\, x - gx^2,$$

oder

$$\left(x - \frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 = \frac{2u^2 \cos^2\alpha}{g}\left(\frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g} - z\right),$$

was die Gleichung einer Parabel ist, deren Scheitel durch die Coordinaten

$$x' = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}, \quad z' = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

bestimmt ist, deren Axe, die z Axe, vertical und deren Parameter $\frac{u^2 \cos^2 \alpha}{g}$ ist.

Der Abstand vom Anfangspunkt des Wurfes bis die Bahn wieder die horizontale x Axe schneidet, wird die Werfweite genannt. Setzt man in der obigen Gleichung der Bahn $z = o$, so findet man ausser $x = o$, noch $x = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$, was die Werfweite im leeren Raume ist. Diese Werfweite wird ein Maximum, wenn $\alpha = 45°$, gleich $\frac{u^2}{g}$. Die grösste erreichte Höhe wird in diesem Falle $z' = \frac{u^2}{4g}$ und folglich die Werfweite dem Vierfachen der erreichten grössten Höhe gleich. Der Brennpunkt der Parabel wird in diesem Falle in der x Axe in der Mitte der Werfweite fallen.

§. 94.

Es sei die ursprüngliche Geschwindigkeit $u = o$, so wird

$$x = o, \quad z = \div \tfrac{1}{2}gt^2, \quad d_t x = o, \quad d_t z = \div gt,$$

d. h. der Punkt fällt vertical herunter mit einer der Zeit proportionalen Geschwindigkeit $v = gt$, und durchfällt im Zeitraume t eine Höhe $h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v^2}{2g}$. Die Höhe $h = \frac{v^2}{2g}$ wird die zur Geschwindigkeit v gehörige Fallhöhe genannt.

§. 95.

Ist die ursprüngliche Geschwindigkeit u nicht gleich Null, findet aber in der verticalen Richtung der Schwere statt, so ist $\alpha = \div 90°$, folglich

$$x = o, \quad z = ut + \tfrac{1}{2}gt^2, \quad d_t x = o, \quad d_t z = u + gt,$$

d. h. der Punkt fällt vertical herunter mit einer Geschwindigkeit $v = u + gt$, und durchläuft in der Zeit t die Höhe $h = ut + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v^2}{2g} + \frac{u^2}{2g}$.

Wird der Körper aufwärts mit einer Geschwindigkeit u' hinaufgeworfen, so ist $u = -u'$, also $v = gt - u$, $h = \frac{v^2}{2g} - \frac{u^2}{2g}$.

Wenn $v = o$, d. h. wenn der Körper seinen höchsten Punkt erreicht hat, wird er die Höhe $-h = \frac{u^2}{2g}$ erreicht haben, d. h. die zur ursprünglichen Geschwindigkeit gehörige Fallhöhe. Im Anfangspunkte heruntergefallen, wird er folglich wieder die ursprüngliche Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung erlangt haben.

§. 96.

Bewegt sich ein schwerer Körper in einem widerstehenden Medium, so wird ausser der Schwere noch die widerstehende Kraft des Mediums zu berücksichtigen sein. Diese wird in der Richtung der Bewegung dieser gerade entgegengesetzt wirken. Wir betrachten hier nur die Bewegung des Schwerpunkts des Körpers und werden daher annehmen, der Widerstand des Mediums sei von der relativen Bewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt unabhängig. Dies wird der Fall sein, wenn entweder keine solche relative Bewegung stattfindet, oder wenn der Körper ein Umdrehungskörper ist und jene relative Bewegung fände immer nur um diese Umdrehungsaxe statt, welche wieder als mit der jedesmaligen Richtung der Bewegung zusammenfallend angenommen wird. Wir werden ferner die widerstehende Kraft dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional annehmen, was, wenigstens annäherungsweise, mit dem Widerstand der Luft der Fall ist. Wir setzen diesen Widerstand gleich $nv^2 m = n(d_t s)^2 m$, und seine Componenten längs der x und z Axe gleich

$$-n(d_t s)^2 d_s x . m = -n d_t s . d_t x . m, \quad -n(d_t s)^2 d_s z . m = -n d_t s . d_t z . m,$$

wo fortwährend m die Masse des Körpers bezeichnet und die ursprüngliche Bewegung in der xz Ebene angenommen wird. Man hat alsdann

$$X = -n d_t s . d_t x . m, \quad Z = -gm - n d_t s . d_t z . m,$$

und die Bewegungsgleichungen des §. 92 geben

$$(1) \qquad d_t^2 x = -n d_t s . d_t x, \quad d_t^2 z = -g - n d_t s . d_t z.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen findet man durch Integration

$$\log(d_t x) = -ns + a, \quad \text{oder} \quad d_t x = Ce^{-ns},$$

wo a und C Constanten bezeichnen. Wird wie vorher durch α die Neigung der ursprünglichen Geschwindigkeit gegen den Horizont, die x Axe, bezeichnet, so wird

$$u \,.\, \cos\alpha = C,$$

$$(2) \qquad d_t x = u \,.\, \cos\alpha \,.\, e^{-ns}.$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (1) mit $d_x z$, so findet man

$$d_t^2 x \,.\, d_x z = -n d_t s \,.\, d_t x \,.\, d_x z = -n d_t s \,.\, d_t z.$$

Dieser Ausdruck in die zweite Differentialgleichung (1) substituirt, giebt alsdann

$$d_t^2 z = -g + d_t^2 x \,.\, d_x z.$$

Es ist aber $d_t z = d_x z \,.\, d_t x$, folglich

$$d_t^2 z = d_t(d_x z) d_t x + d_x z \,.\, d_t^2 x,$$

und es wird nun

$$(3) \qquad d_t(d_x z) \,.\, d_t x = -g.$$

Dividirt man diese Gleichung mit dem Quadrate der Gleichung (2), so erhält man

$$\frac{d_t(d_x z)}{d_t x} = -\frac{g e^{2ns}}{u^2 \cos^2\alpha}.$$

Es ist aber

$$d_t(d_x z) = d_x(d_x z) \,.\, d_t x,$$

$$(4) \qquad \frac{d_t(d_x z)}{d_t x} = d_x(d_x z) = d_s(d_x z) d_x s = d_s(d_x z)\sqrt{1 + (d_x z)^2},$$

und es wird also

$$d_s(d_x z)\sqrt{1 + (d_x z)^2} = \div \frac{g e^{2ns}}{u^2 \cos^2\alpha}.$$

Setzt man der Kürze willen

$$d_x z = \vartheta,$$

wo ϑ die Tangente des Winkels ist, welchen die Bahn im Punkte (x, z) mit der horizontalen x Axe bildet, so wird die obige Gleichung

$$\sqrt{1 + \vartheta^2} \,.\, d_s\vartheta = -\frac{g e^{2ns}}{u^2 \cos^2\alpha},$$

$$\int_{\tan\alpha}^{\vartheta} \sqrt{1 + \vartheta^2} \,.\, d\vartheta = -\int_0^s \frac{g e^{2ns}}{u^2 \cos^2\alpha},$$

oder, wenn die Integration ausgeführt wird,

$$\tfrac{1}{2}\vartheta\sqrt{1+\vartheta^2}+\tfrac{1}{2}\log\text{nat}(\vartheta+\sqrt{1+\vartheta^2})-\tfrac{1}{2}\text{tang}\,\alpha\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}$$
$$-\tfrac{1}{2}\log\text{nat}(\text{tang}\,\alpha+\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha})=-\frac{ge^{2ns}}{2nu^2\cos^2\alpha}+\frac{g}{2nu^2\cos^2\alpha}.$$

Setzt man der Kürze willen

$$\frac{g}{nu^2\cos^2\alpha}+\text{tang}\,\alpha\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}+\log\text{nat}(\text{tang}\,\alpha+\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha})$$
$$=\frac{g}{nu^2\cos^2\alpha}+\frac{\text{tang}\,\alpha}{\cos\alpha}+\log\text{nat tang}\left(\frac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}\alpha\right)=A,$$
$$\vartheta\sqrt{1+\vartheta^2}+\log\text{nat}(\vartheta+\sqrt{1+\vartheta^2})=\Theta,$$

so wird

(5) $$A-\vartheta=\frac{ge^{2ns}}{nu^2\cos^2\alpha}.$$

Es ist jetzt nach der Gleichung (4), wenn man die Verkürzung $d_x z=\vartheta$ berücksichtigt,

$$d_x\vartheta=\sqrt{1+\vartheta^2}\,.\,d_s\vartheta=-\frac{ge^{2ns}}{u^2\cos^2\alpha},$$

und wegen der Gleichung (5)

$$d_x\vartheta=n(\Theta-A).$$

Hieraus erhält man alsdann

(6) $$x=\int_{\text{tang}\,\alpha}^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{n(\Theta-A)},$$

(7) $$z=\int_{\text{tang}\,\alpha}^{\vartheta}\frac{\vartheta d\vartheta}{n(\Theta-A)}.$$

Die Gleichung (3) giebt ferner

$$d_t\vartheta\,.\,d_t x=-g,$$

oder $$(d_t\vartheta)^2\,.\,d_\vartheta x=-g,\qquad d_t\vartheta=\div\sqrt{-\frac{g}{d_\vartheta x}},$$

wo $d_t\vartheta$ negativ wird, weil ϑ abnimmt, wenn t zunimmt; folglich

$$t=\div\int_{\text{tang}\,\alpha}^{\vartheta}\sqrt{\div\frac{d_\vartheta x}{g}}\,d\vartheta,$$

oder

(8) $$t=\div\int_{\text{tang}\,\alpha}^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\sqrt{ng(A-\Theta)}}.$$

Es ist endlich

$$v = d_t s = d_t x \sqrt{1 + (d_x z)^2} = -\frac{g\sqrt{1+\vartheta^2}}{d_t \vartheta} = -g\sqrt{1+\vartheta^2}\, d_\vartheta t,$$

oder durch Substitution

$$(9) \qquad v = \sqrt{\frac{g(1+\vartheta^2)}{n(A-\Theta)}}.$$

Die vier Gleichungen (6), (7), (8) und (9) enthalten die vollkommene Lösung des gegebenen Problems. Könnte man in den Gleichungen (6) und (7) die Integration ausführen und die Grösse ϑ eliminiren, würde man eine Gleichung zwischen x und z, welche diejenige der beschriebenen Bahn wäre, erhalten. Jene Integrale können indessen nur annäherungsweise ausgedrückt werden.

§. 97.

Bei der Bewegung eines herausgeworfenen Körpers im luftleeren Raume war die Bahn eine Parabel, also der heraufsteigende Theil der Bahn dem heruntersteigenden gleich. Dies ist nicht der Fall bei der Bewegung in einem widerstehenden Medium. Es hat hier jeder der beiden Zweige eine Asymptote. Diejenige des heruntersteigenden Zweigs (Fig. 42) ist vertical und wird folgendermaassen gefunden. Nähert sich ϑ einer unendlich grossen Grösse, so wird der Ausdruck

$$\Theta = \vartheta\sqrt{1+\vartheta^2} + \log\text{nat}(\vartheta + \sqrt{1+\vartheta^2}),$$

sich dem ϑ^2 nähern, und weil A endlich ist, auch $\Theta - A$ sich ϑ^2 nähern. Die Gleichungen (6) und (7) geben alsdann

$$x = \int_{\tan\alpha}^{\infty} \frac{d\vartheta}{n(\Theta - A)}, \quad z = \int_{\tan\alpha}^{\infty} \frac{\vartheta d\vartheta}{n(\Theta - A)} = \infty;$$

wo x einen endlichen Werth erhält, weil für $\vartheta = \infty$,

$$\int \frac{d\vartheta}{n(\Theta - A)} = \int \frac{d\vartheta}{n\vartheta^2} = \text{Const} - \frac{1}{n\vartheta} = \text{Const},$$

z dagegen unendlich gross, weil für $\vartheta = \infty$,

$$\int \frac{\vartheta d\vartheta}{n(\Theta - A)} = \int \frac{d\vartheta}{n\vartheta} = \text{Const} + \frac{1}{n}\log\text{nat}\,\vartheta = \infty.$$

Der heruntersteigende Zweig hat also im Abstand OD $= \int\limits_{\mathrm{tang}\,\alpha}^{\infty} \frac{d\vartheta}{n(\Theta - A)}$ eine verticale Asymptote NDF.

Der heraufsteigende Zweig hat auch eine Asymptote, wenn er rückwärts von O bis H verlängert gedacht wird. Es kann nämlich ϑ ein solcher Werth gegeben werden, dass $\Theta - A = o$, oder

$$\vartheta\sqrt{1+\vartheta^2} + \log\mathrm{nat}(\vartheta + \sqrt{1+\vartheta^2}) = \frac{\mathrm{tang}\,\alpha}{\cos\alpha} + \log\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\alpha\right) + \frac{g}{nu^2\cos^2\alpha},$$

und es wird dann

$$d\vartheta = -n\Theta dx = o$$

werden, oder die Bahn nähert sich einer geraden Linie, welche mit der x Axe einen Winkel α' bildet, wo $\vartheta = \mathrm{tang}\,\alpha'$ durch die obige Gleichung bestimmt wird.

Um den Punkt E zu finden, wo diese Asymptote die x Axe schneidet, setze man $OP = -x$, $P = y$, und ziehe die Linie MP′ so, dass der Winkel $PP'M = \alpha'$. Es wird alsdann

$$OP' = -x + z\,.\,\mathrm{cotang}\,\alpha'.$$

Wenn jetzt der Punkt M unendlich fern fortgerückt wird, so nähert sich OP′ der OE, wo EL die gesuchte Asymptote, parallel mit MP′, ist; es wird dann

$$x = \int\limits_{\mathrm{tang}\,\alpha}^{\mathrm{tang}\,\alpha'} \frac{d\vartheta}{n(\Theta - A)}, \quad z = \int\limits_{\mathrm{tang}\,\alpha}^{\mathrm{tang}\,\alpha'} \frac{\vartheta d\vartheta}{n(\Theta - A)}.$$

Es wird folglich

$$OE = \int\limits_{\mathrm{tang}\,\alpha}^{\mathrm{tang}\,\alpha'} \frac{(\vartheta\,\mathrm{cotang}\,\alpha' - 1)\,d\vartheta}{n(\Theta - A)},$$

welches Integral einen endlichen Werth hat.

§. 98.

Nach der Formel (9) des §. 96 ist die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{g(1+\vartheta^2)}{n(A-\Theta)}}, \quad \text{oder} \quad v^2 = \frac{g(1+\vartheta^2)}{n(A-\Theta)}.$$

Sucht man den Punkt der Bahn, wo die Geschwindigkeit ein Minimum ist, so wird für diesen Punkt

$$2 v d_\vartheta v = \frac{2g\vartheta(A-\Theta) + g d_\vartheta \Theta (1+\vartheta^2)}{n^2(A-\Theta)} = o,$$

daher

$$2\vartheta(A-\Theta) + (1+\vartheta^2) d_\vartheta \Theta = o,$$

oder, wenn der Werth von $d_\vartheta \Theta$ substituirt wird,

$$\vartheta(A-\Theta) + (1+\vartheta^2)\sqrt{1+\vartheta^2} = o,$$

oder $$\frac{\tang \alpha}{\cos \alpha} - \log\text{nat}\,\tang\left(\frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\alpha\right) + \frac{g}{nu^2 \cos^2 \alpha}$$
$$= \log\text{nat}(\vartheta + \sqrt{1+\vartheta^2}) - \frac{\sqrt{1+\vartheta^2}}{\vartheta},$$

aus welcher Gleichung ϑ durch Approximation gefunden werden kann.

Wenn der Körper sich immer weiter in den heruntersteigenden Zweig der Bahn bewegt, so wird ϑ sich $-\infty$ nähern, und der hierzu gehörige Grenzwerth von v wird

$$v = \sqrt{\frac{g}{u}}.$$

§. 99.

Es sei $\alpha = -90°$, d. h. der Körper vertical heruntergeworfen. Es wird alsdann

$$x = o, \quad d_t x = o,$$

d. h. der Körper fällt vertical herunter; folglich ferner

$$s = \div z, \quad d_t s = \div d_t z, \quad d_t^2 z = \div g + n(d_t z)^2,$$

oder, wenn $d_t z = -v$ gesetzt wird,

$$d_t v = +g - nv^2,$$

und alsdann

$$(1) \quad t = \int_u^v \frac{dv}{g-nv^2} = \frac{1}{2\sqrt{gn}} \log\text{nat}\left[\frac{1+\sqrt{\frac{n}{g}}v}{1-\sqrt{\frac{n}{g}}v} \cdot \frac{1-\sqrt{\frac{n}{g}}u}{1+\sqrt{\frac{n}{g}}u}\right].$$

Setzt man u = o, so wird

$$t = \frac{1}{2\sqrt{gn}} \log\text{nat}\left[\frac{1+\sqrt{\frac{n}{g}}v}{1-\sqrt{\frac{n}{g}}v}\right]$$

die Zeit angeben, während welcher der Körper fallen muss, um die

Geschwindigkeit v zu erhalten. Bezeichnet man jetzt durch t' den der Geschwindigkeit u entsprechenden Werth von t, also

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{gn}} \log \text{nat} \left[\frac{1+\sqrt{\frac{n}{g}}u}{1-\sqrt{\frac{n}{g}}u}\right],$$

so wird die Gleichung (1)

$$t + t' = \frac{1}{2\sqrt{gn}} \cdot \log \left[\frac{1+\sqrt{\frac{n}{g}}v}{1-\sqrt{\frac{n}{g}}v}\right],$$

und hieraus

$$(2) \qquad v = \sqrt{\frac{g}{n}} \cdot \frac{e^{\sqrt{gn}(t+t')} - e^{-\sqrt{gn}(t+t')}}{e^{\sqrt{gn}(t+t')} + e^{-\sqrt{gn}(t+t')}}.$$

Die durchfallene Höhe $-z = h$ wird gefunden

$$(3) \qquad h = \int_0^t v dt = \int_u^v \frac{v dv}{g - nv^2} = \frac{1}{2n} \log \text{nat} \left(\frac{g - nu^2}{g - nv^2}\right),$$

oder durch die Zeit t ausgedrückt

$$(4) \qquad h = \int_0^t v dt = \sqrt{\frac{g}{n}} \int_0^t \frac{e^{\sqrt{gn}(t+t')} - e^{-\sqrt{gn}(t+t')}}{e^{\sqrt{gn}(t+t')} + e^{-\sqrt{gn}(t+t')}} \cdot dt$$

$$= \frac{1}{u} \log \left(\frac{e^{\sqrt{gn}(t+t')} + e^{-\sqrt{gn}(t+t')}}{2}\right).$$

Hieraus findet man ferner

$$2e^{nh} = e^{\sqrt{gn}(t+t')} - e^{-\sqrt{gn}(t+t')}, \quad e^{\sqrt{gn}(t+t')} = e^{nh} + \sqrt{e^{2nh} - 1},$$

$$(5) \qquad t = -t' + \frac{1}{\sqrt{gn}} \cdot \log \text{nat} \left(e^{nh} + \sqrt{e^{2nh} - 1}\right),$$

$$(6) \qquad v = \sqrt{\frac{g}{n}} - \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{ne^{nh}(e^{nh} + \sqrt{e^{2nh} - 1})}}.$$

Der Grenzwerth von v wird also $v = \sqrt{\frac{g}{n}}$.

§. 100.

Es sei $\alpha = 90°$, d. h. der Körper vertical aufwärts geworfen. Es wird alsdann

$$v = d_t s = d_t z,\quad d_t^2 = -g - n(d_t s)^2,\ \text{oder}\ d_t v = -(g + nv^2),$$

und hieraus

$$(1)\qquad t = -\int_u^v \frac{dv}{g + nv^2} = \frac{1}{\sqrt{gn}}\,\text{arc.}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{n}{g}}\,u\right) - \frac{1}{\sqrt{gn}}\,\text{arc.}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{n}{g}}\,v\right),$$

$$(2)\qquad v = \sqrt{\frac{g}{n}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{n}{g}}\cdot u - \text{tang}\left(\sqrt{gn}\,t\right)}{1 + \sqrt{\frac{n}{g}}\cdot u\cdot\text{tang}\left(\sqrt{gn}\,t\right)}.$$

Ferner

$$(3)\qquad z = \int_0^t v dt = -\int_u^v \frac{v dv}{g + nv^2} = \frac{1}{2n}\log\text{nat}\left(\frac{g + nu^2}{g + nv^2}\right),$$

oder

$$z = \int_0^t v dt = \sqrt{\frac{g}{n}}\int_0^t \frac{\sqrt{\frac{n}{g}}\cdot u - \text{tang}\left(\sqrt{gn}\,t\right)}{1 + \sqrt{\frac{n}{g}}\cdot u\cdot\text{tang}\left(\sqrt{gn}\,t\right)}\,.\,dt$$

$$= \sqrt{\frac{g}{n}}\int_0^t \frac{\sqrt{\frac{n}{g}}\cos\left(\sqrt{gn}\,t\right) - \sin\left(\sqrt{gn}\,t\right)}{\cos\left(\sqrt{gn}\,t\right) + \sqrt{\frac{n}{g}}\sin\left(\sqrt{gn}\,t\right)}\,.\,dt,$$

$$(4)\qquad z = \frac{1}{n}\log\text{nat}\left[\cos\left(\sqrt{gn}\,t\right) + \sqrt{\frac{n}{g}}\sin\left(\sqrt{gn}\,t\right)\right].$$

Bezeichnet man durch H die grösste Höhe wozu der Körper steigen kann, und die hierzu angewandte Zeit durch T, so ist $v = o$, also

$$(5)\qquad H = \frac{1}{2n}\log\text{nat}\left(1 + \frac{n}{g}u^2\right),$$

$$(6)\qquad T = \frac{1}{\sqrt{gn}}\,\text{arc.}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{n}{g}}\,u\right).$$

Nachdem der Körper den höchsten Punkt erreicht hat, fällt er wieder herunter und befolgt dann die im vorigen Paragraphen entwickelten Gesetze. Bezeichnet man durch T′ die Zeit, welche er braucht, um wieder zum Anfangspunkte zu gelangen, und durch u′ die alsdann erhaltene Geschwindigkeit, so findet man diese Grössen, wenn man in den Formeln (5) und (6) des vorigen Paragraphen

$$u = o,\quad h = H = \frac{1}{2n}\log\left(1 + \frac{n}{g}u^2\right),\quad v = u',\quad t = T'.$$

setzt. Man findet alsdann

$$(7)\qquad T' = \frac{1}{\sqrt{gn}}\log\text{nat}\left[u\sqrt{\frac{n}{g}} + \sqrt{1 + u^2\cdot\frac{n}{g}}\right],$$

$$(8)\qquad u' = \frac{u\sqrt{g}}{\sqrt{g + nu^2}}.$$

Es ist jetzt

$$\log\text{nat}(p + \sqrt{1+p^2}) = \log\text{nat}\left[\frac{1 + \frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p}}{1 - \frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p}}\right] > 2\cdot\frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p}$$

und

$$\text{arc.}\left(\text{tang} = p\right) = 2\cdot\text{arc.}\left(\text{tang} = \frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p}\right) < 2\cdot\frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p},$$

folglich ist

$$\log\text{nat}\left[u\sqrt{\frac{n}{g}} + \sqrt{1 + u^2\frac{n}{g}}\right] > \text{arc.}\left[\text{tang} = u^2\sqrt{\frac{n}{g}}\right],$$

oder

$$(9)\qquad T' > T.$$

Ferner ist, weil n immer positiv,

$$\sqrt{g} < \sqrt{g + nu^2},$$

daher

$$(10)\qquad u' < u.$$

Der wieder heruntergefallene Körper hat also zum Fall eine längere Zeit gebraucht wie zum Aufsteigen, und eine kleinere Geschwindigkeit wieder erlangt, als er im Anfang hatte. Im leeren Raum dagegen war T′ = T, u′ = u.

b) Trägheitsmomente und Hauptaxen der Körper.

§. 101.

Wenn ein fester Körper um eine feste Axe bewegt wird, so wird jeder Theil nothwendig eine Geschwindigkeit annehmen, welche dem Abstand von der Axe proportional ist. Ist dieser Abstand die Einheit, so wird die Geschwindigkeit die Winkelgeschwindigkeit des Körpers genannt.

Bezeichnen wir durch dM ein Element der Masse des Körpers, durch r dessen Abstand von der Rotationsaxe, durch ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, so wird die lebendige Kraft dieses Elementes $\frac{\omega^2 r^2 dM}{2}$ und die lebendige Kraft des ganzen Körpers

$$\Sigma\frac{mv^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\int r^2 dM,$$

oder gleich der lebendigen Kraft eines Körpers, dessen Masse gleich $\int r^2 dM$ und dessen Geschwindigkeit gleich der Winkelgeschwindigkeit ω wäre. Die Masse $\int r^2 dM$ wird das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die gegebene Axe genannt.

§. 102.

Kennt man das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe, so kann man hieraus leicht das Trägheitsmoment in Bezug auf eine zweite hiermit parallele Axe finden.

Nimmt man nämlich die durch den Schwerpunkt gehende Axe als z Axe an, und bezeichnet durch a und b die Coordinaten des Punktes, in dem die zweite mit der z Axe parallele Axe die xy Ebene schneidet, durch f den Abstand der beiden Axen, durch dM die Masse eines Elementes des Körpers, durch r seinen Abstand von der z Axe, durch r' seinen Abstand von der zweiten mit der z Axe parallelen Axe, durch $S = \int r^2 dM$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die z Axe, durch $S' = \int r'^2 dM$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die zweite Axe, so ist

$$r'^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2$$
$$= r^2 - 2ax - 2by + f^2,$$
$$\int r'^2 dM = \int r^2 dM - 2a\int x dM - 2b\int y dM + f^2\int dM.$$

Es ist aber der Schwerpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten, also seine Coordinaten Null oder $\int x dM = o$, $\int y dM = o$, und es wird

$$S' = S + f^2 M,$$

d. h. das Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige Axe ist gleich der Summe des Trägheitsmomentes in Bezug auf eine mit der ersten parallel durch den Schwerpunkt gehende Axe und dem Product der Masse im Quadrat des Abstandes beider Axen. Unter den Trägheitsmomenten in Bezug auf alle parallelen Axen ist daher das in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe das kleinste.

§. 103.

Weil das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine beliebige Axe immer eine endliche positive Grösse sein muss, so kann unter allen durch einen gegebenen Punkt O, welchen wir als Anfangspunkt des Coordinatensystems wählen wollen, gehende Axen eine so ausgewählt werden, dass das ihr zukommende Trägheitsmoment, welches wir mit A bezeichnen wollen, nicht kleiner ist als das irgend einer andern Axe zugehörige; wir werden diese als die x Axe annehmen. Unter den auf diesen senkrechten und durch O gehende Axen wähle man wieder eine, die y Axe, so, dass das ihr zugehörige Trägheitsmoment, welches wir mit B bezeichnen wollen, nicht kleiner sei als das für irgend einer auf der x Axe senkrechten Axe. Zu der dritten auf x und y senkrechten Axe gehöre das Trägheitsmoment C. Man hat alsdann

$$A = \int(y^2 + z^2)dM, \quad B = \int(x^2 + z^2)dM, \quad C = \int(x^2 + y^2)dM,$$
$$A = \text{oder} > B = \text{oder} > C.$$

Bezeichnet man durch D das Trägheitsmoment in Bezug auf eine vierte durch O gehende Axe, welche mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ bildet, und bezeichnet durch r den senkrechten Abstand des Elementes dM von dieser Axe, so ist, weil das Qua-

drat des Abstandes dieses Elementes von O gleich $x^2 + y^2 + z^2$ und die Projectionen dieses Abstandes auf jener vierten Axe gleich $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$ sind,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$$
$$= (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma$$
$$- 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2xy \cos \alpha \cos \beta.$$

Es wird folglich

$$D = \int r^2 dM = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma$$
$$- 2 \cos \beta \cos \gamma \int yzdM - 2 \cos \alpha \cos \gamma \int xzdM - 2 \cos \alpha \cos \beta \int xydM.$$

Es soll jetzt immer $D =$ oder $< A$ sein. Setzt man zuerst $\gamma = \frac{\pi}{2}$, also $\cos \gamma = 0$ und $\cos \beta = \sin \alpha$, so wird

$$D = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha \int xydM = \text{oder} < A,$$

daher

$$A \sin^2 \alpha = \text{oder} > B \sin^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha \int xydM$$

oder

$$A = \text{oder} > B - 2 \operatorname{cotang} \alpha \int xydM.$$

Diese Bedingung soll für jeden Werth von α bestehen, was offenbar nur der Fall sein kann, wenn $\int xydM = 0$. Setzt man jetzt $\beta = \frac{\pi}{2}$, so findet man ebenso $A =$ oder $> C - 2 \operatorname{cotang} \alpha \int xzdM$ für alle Werthe von α, folglich $\int xzdM = 0$. Setzt man endlich $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d. h. D in der yz Ebene an, so muss $D =$ oder $< B$ sein, und man erhält nun

$$B = \text{oder} > C - 2 \operatorname{cotang} \beta \int yzdM$$

für alle Werthe von β, und daher $\int yzdM = 0$. Wenn die x, y, z Axen die ihnen oben beigelegten Eigenschaften haben sollen, müssen nothwendig

$$\int xydM = 0, \quad \int xzdM = 0, \quad \int yzdM = 0,$$

und es wird alsdann

$$D = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

Weil $A =$ oder $> B =$ oder $> C$, so wird auch

$$D = \text{oder} > C \cos^2 \alpha + C \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma,$$

oder

$$D = \text{oder} > C,$$

d. h. das Trägheitsmoment in Bezug auf die z Axe ist nicht grösser als das für irgend eine andere Axe.

Sind die Trägheitsmomente A, B, C einander gleich, so wird auch $D = A$, folglich das Trägheitsmoment gleich sein in Bezug auf alle durch O gehende Axen. Sind zwei der Trägheitsmomente gleich, z. B. $A = B$, so wird $D = A \sin^2\gamma + C \cos^2\gamma$, und für $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $D = A$, d. h. die Trägheitsmomente für alle in der xy Ebene durch O gehende Axen sind alsdann einander gleich.

§. 104.

Eine durch den Anfangspunkt O gehende Coordinatenaxe, z. B. die x Axe, heisst **Hauptaxe**, wenn die Integralen $\int xydM$ und $\int xzdM$ beide zugleich Null sind. Zieht man in die yz Ebene durch O eine willkürliche gerade Linie, deren mit der y Axe gebildeter Winkel gleich α sei, und bezeichnet die Ordinate eines Punktes auf diese Axe gerechnet durch v, so ist $v = y \cos\alpha + z \sin\alpha$, folglich $\int xvdM = \cos\alpha \int xydM + \sin\alpha \int xzdM = o$. Es kommt also auf die Wahl der auf x senkrechten Richtungen der y und z Axen nicht an, man hat doch immer $\int xydM = o$ und $\int xzdM = o$.

Aus dem vorigen Paragraphen geht hervor, dass jedem Punkte O wenigstens drei Hauptaxen zukommen, welche gegen einander senkrecht sind. Die eine derselben ist die Axe der grössten, eine andere die des kleinsten Trägheitsmomentes. Wir werden diese drei Hauptaxen, wie vorher, durch x, y, z und die zugehörigen Trägheitsmomente durch A, B, C bezeichnen und immer $A >$ oder $= B >$ oder $= C$ annehmen.

Wir werden jetzt untersuchen, unter welchen Umständen mehr als diese drei Hauptaxen möglich sind. Es sei u eine durch den Anfangspunkt O gehende Axe, v und w zwei ebenfalls durch O gehende auf u und unter einander senkrechte Axen. Man bezeichne durch α, β, γ die Winkel, welche die u Axe mit den x, y, z Axen bildet, durch α', β', γ' die Winkel, welche die v Axe, und durch α'', β'', γ'' die Winkel, welche die w Axe mit diesen drei Haupt-

axen bildet. Die Bedingungen, dass die u Axe eine Hauptaxe wäre, sind $\int uvdM = o$, $\int uwdM = o$. Es sind jetzt

$$u = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$
$$v = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma',$$
$$w = x\cos\alpha'' + y\cos\beta'' + z\cos\gamma'',$$

folglich wird, weil $\int xydM = o$, $\int xzdM = o$, $\int yzdM = o$,

$$\int uvdM = \cos\alpha\cos\alpha'\int x^2 dM + \cos\beta\cos\beta'\int y^2 dM + \cos\gamma\cos\gamma'\int z^2 dM$$
$$\int uwdM = \cos\alpha\cos\alpha''\int x^2 dM + \cos\beta\cos\beta''\int y^2 dM + \cos\gamma\cos\gamma''\int z^2 dM.$$

Es ist aber

$$A = \int(y^2 + z^2)dM, \quad B = \int(x^2 + z^2)dM, \quad C = \int(x^2 + y^2)dM,$$

und daher wird

$$\int uvdM = \cos\alpha\cos\alpha'\left(\frac{B + C - A}{2}\right) + \cos\beta\cos\beta'\left(\frac{A + C - B}{2}\right) + \cos\gamma\cos\gamma'\left(\frac{A + B - C}{2}\right),$$

$$\int uwdM = \cos\alpha\cos\alpha''\left(\frac{B + C - A}{2}\right) + \cos\beta\cos\beta''\left(\frac{A + C - B}{2}\right) + \cos\gamma\cos\gamma''\left(\frac{A + B - C}{2}\right).$$

Weil die v und w Axe auf der u Axe senkrecht sind, ist ferner

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = o,$$
$$\cos\alpha\cos\alpha'' + \cos\beta\cos\beta'' + \cos\gamma\cos\gamma'' = o.$$

Durch Hülfe dieser Gleichungen findet man dann

$$(1)\quad \begin{aligned} \int uvdM &= \cos\alpha\cos\alpha'(C - A) + \cos\beta\cos\beta'(C - B) \\ &= \cos\alpha\cos\alpha'(B - A) + \cos\gamma\cos\gamma'(B - C) \\ &= \cos\beta\cos\beta'(A - B) + \cos\gamma\cos\gamma'(A - C), \\ \int uwdM &= \cos\alpha\cos\alpha''(C - A) + \cos\beta\cos\beta''(C - B) \\ &= \cos\alpha\cos\alpha''(B - A) + \cos\gamma\cos\gamma''(B - C) \\ &= \cos\beta\cos\beta''(A - B) + \cos\gamma\cos\gamma''(A - C). \end{aligned}$$

Soll jetzt die u Axe eine Hauptaxe sein, so muss $\int uvdM = o$ und $\int uwdM = o$. Es sind alsdann nur drei Fälle möglich:

1) Die Momente A, B, C sind alle einander gleich. Alsdann wird für jeden Werth von α, β, γ, d. h. für jede Richtung der u Axe, $\int uvdM = o$ und $\int uwdM = o$, und daher die u Axe eine Haupt-

axe sein. *Es ist folglich alsdann jede durch O gehende Axe eine Hauptaxe.*

2) Zwei der Momente A, B, C sind einander gleich. Es sei z. B. A = B, so wird damit $\int uvdM = o$, $\int uwdM = o$, $\cos\gamma \cos\gamma' = o$, $\cos\gamma\cos\gamma'' = o$, also, weil die u Axe von der z Axe verschieden ist und daher nicht zugleich $\gamma' = \frac{\pi}{2}$, $\gamma'' = \frac{\pi}{2}$, $\cos\gamma = o$ sein müssen oder $\gamma = \frac{\pi}{2}$, d.h. die u Axe muss in der xy Ebene liegen. Ebenso muss, wenn A = C, die u Axe in der xz Ebene, wenn B = C, in der yz Ebene liegen. *Sind die Trägheitsmomente in Bezug auf zwei der gegebenen Hauptaxen gleich, so ist jede in der Ebene dieser Axen durch O gehende Axe eine Hauptaxe, ausser dieser Ebene aber keine.*

3) Die Momente A, B, C sind alle ungleich. Man erhält dann aus den Gleichungen (1), wenn man $\int uvdM = o$, $\int uwdM = o$ setzt und z.B. C — B eliminirt,

$$\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha'\cos\beta'' - \cos\alpha''\cos\beta') = o.$$

Weil die u, v, w Axen auf einander senkrecht stehen, wird

$$\cos\gamma = \cos\alpha'\cos\beta'' - \cos\alpha''\cos\beta'$$

und die obige Gleichung wird nun

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = o.$$

Es müsste also, wenn u eine Hauptaxe sein sollte, entweder $\cos\alpha = o$, oder $\cos\beta = o$, oder $\cos\gamma = o$ sein. Wäre $\cos\alpha = o$, so erhält man, weil die Gleichungen (1) gleich Null sein sollen und C — B nicht gleich Null ist,

$$\cos\beta\cos\beta' = o,\quad \cos\gamma\cos\gamma' = o,\quad \cos\beta\cos\beta'' = o,\quad \cos\gamma\cos\gamma'' = o.$$

Es kann aber jetzt nicht zugleich $\cos\beta' = o$ und $\cos\beta'' = o$, oder $\cos\gamma' = o$ und $\cos\gamma'' = o$ sein, weil die u Axe alsdann mit der y Axe oder z Axe zusammenfallen würde, folglich muss

$$\cos\beta = o \text{ und } \cos\gamma = o.$$

Dies ist indessen unmöglich, weil $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, und daher nicht alle drei Cosinus gleich Null sein können. Ebenso findet man, dass $\cos\beta$ oder $\cos\gamma$ nicht gleich Null sein können. Die

Bedingungen $\int uvdM$ und $\int uwdM$ können, wenn A, B, C verschieden sind, nie stattfinden, oder *es giebt alsdann keine vierte durch O gehende Hauptaxe.*

Es giebt für jeden Punkt immer drei auf einander senkrechte Hauptaxen; wenn die Trägheitsmomente in Bezug auf diese Axen alle ungleich sind, giebt es keine Hauptaxen; wenn die Momente in Bezug auf zwei dieser Axen gleich sind, so kann das System der Hauptaxen beliebig um die dritte Axe gedreht werden, und die Momente werden auch hierdurch nicht geändert; wenn endlich alle drei Trägheitsmomente gleich sind, kann man dem System der Hauptaxen jede Lage geben und die Momente werden doch immer dieselbe Grösse behalten.

§. 105.

Wir werden jetzt die Lage der drei auf einander rechtwinkligen Hauptaxen bestimmen. Es seien x, y, z drei gegebene senkrechte Coordinatenaxen, u, v, w die drei gesuchten durch denselben Anfangspunkt gehenden und ebenfalls auf einander senkrechten Hauptaxen. Es sei ferner

$$\int x^2 dM = L, \quad \int y^2 dM = M, \quad \int z^2 dM = N,$$

$$\int yzdM = l, \quad \int xzdM = m, \quad \int xydM = n.$$

Diese Grössen sind von der Gestalt des Körpers und von der Vertheilung der Massen in ihm bestimmt. Bezeichnen wir durch α, β, γ die Winkel, welche die u Axe, durch α', β', γ' die, welche die v Axe, und durch α'', β'', γ'' die, welche die w Axe mit den drei Coordinatenaxen bilden. Es sei ferner

$$\int u^2 dM = U, \quad \int v^2 dM = V, \quad \int w^2 dM = W,$$

und man hat alsdann, weil u, v, w Hauptaxen sind,

$$\int vwdM = o, \quad \int uwdM = o, \quad \int uvdM = o.$$

Es ist jetzt

$$u = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma, \quad x = u\cos\alpha + v\cos\alpha' + w\cos\alpha''.$$

Es wird nun

$$ux = x(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = u(u\cos\alpha + v\cos\alpha' + w\cos\alpha''),$$

und, weil $\int uvdM = o$, $\int uwdM = o$,

$$\cos\alpha\int x^2 dM + \cos\beta\int xy dM + \cos\gamma\int xz dM = \cos\alpha\int u^2 dM,$$

oder

$$\begin{aligned}(1)\qquad &(L-U)\cos\alpha + n\cos\beta + m\cos\gamma = o, \text{ und ebenso}\\ &n\cos\alpha + (M-U)\cos\beta + l\cos\gamma = o,\\ &m\cos\alpha + l\cos\beta + (N-U)\cos\gamma = o.\end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, so erhält man

$$(2)\qquad \begin{aligned}(L-U)(M-U)(N-U) - l^2(L-U) - m^2(M-U)\\ - n^2(N-U) + 2lmn = o.\end{aligned}$$

Hätte man in diese Entwickelung v und w statt u eingeführt, so würde man zwei ganz ähnliche Gleichungen mit V und W statt U erhalten haben. Die Grössen U, V, W sind folglich die drei Wurzeln der Gleichung (2) in Bezug auf U aufgelöst. Da die drei Hauptaxen, wie vorher bewiesen, nothwendig stattfinden müssen, so müssen auch die drei Wurzeln jener Gleichung alle reelle bestimmte Werthe der Cosinus α, β, γ u. s. w sein, was übrigens auch leicht bewiesen werden kann. Setzt man nämlich der Kürze willen

$$\begin{aligned}L\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma &= E,\\ n\cos\alpha + M\cos\beta + l\cos\gamma &= F,\\ m\cos\alpha + l\cos\beta + N\cos\gamma &= G,\end{aligned}$$

und bezeichnet durch U, V, W die drei Wurzeln der Gleichung (2), und durch E_1, F_1, G_1, E_2, F_2, G_2, E_3, F_3, G_3 die entsprechenden aus den Gleichungen (1) hervorgehenden Werthe von E, F, G, so wird

$$(3)\qquad \begin{aligned}E_1 &= U\cos\alpha, & E_2 &= V\cos\alpha', & E_3 &= W\cos\alpha'',\\ F_1 &= U\cos\beta, & F_2 &= V\cos\beta', & F_3 &= W\cos\beta'',\\ G_1 &= U\cos\gamma, & G_2 &= V\cos\gamma', & G_3 &= W\cos\gamma''.\end{aligned}$$

Wäre nun eine der drei Wurzeln der Gleichung (2), z. B. U, imaginär, so müsste, weil alle Coëfficienten der Gleichung (2) reell sind, eine andere Wurzel, z. B. V, dem Werthe von U conjugirt sein. Dann müssen aber auch $\cos\alpha$ und $\cos\alpha'$, $\cos\beta$ und $\cos\beta'$, $\cos\gamma$ und $\cos\gamma'$ imaginäre conjugirte Ausdrücke sein. Es sei also

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= a + \mathfrak{a}\sqrt{-1}, & \cos\alpha' &= a - \mathfrak{a}\sqrt{-1},\\ \cos\beta &= b + \mathfrak{b}\sqrt{-1}, & \cos\beta' &= b - \mathfrak{b}\sqrt{-1},\\ \cos\gamma &= c + \mathfrak{c}\sqrt{-1}, & \cos\gamma' &= c - \mathfrak{c}\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

Nun erhält man aus den Gleichungen (3)

$$\frac{E_1 \cos\alpha' + F_1 \cos\beta' + G_1 \cos\gamma'}{U} = \frac{E_2 \cos\alpha + F_2 \cos\beta + G_2 \cos\gamma}{V}$$

$$= \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma'.$$

In diesen Brüchen sind nun die Nenner ungleich, die Zähler aber gleich, nämlich jeder gleich

$$L\cos\alpha\cos\alpha' + M\cos\beta\cos\beta' + N\cos\gamma\cos\gamma' + l(\cos\beta\cos\gamma' + \cos\beta'\cos\gamma)$$
$$+ m(\cos\alpha\cos\gamma' + \cos\alpha'\cos\gamma) + n(\cos\beta\cos\gamma' + \cos\beta'\cos\gamma).$$

Die Zähler müssen also gleich Null sein und folglich auch

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.$$

Dies ist aber unmöglich, wenn die Grössen imaginäre conjugirte Werthe hätten, indem man alsdann die unmögliche Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

erhalten würde. Die Gleichung (2) muss daher nothwendig drei reelle Wurzeln haben, und es können folglich auch immer reelle Werthe der Cosinus $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$, welche den Gleichungen (1) entsprechen, gefunden werden.

Aus den Gleichungen (1) erhält man ferner, wenn U, V, W der Gleichung (2) genügen,

$$\cos\alpha[mn - l(L-U)] = \cos\beta[ln - m(M-U)] = \cos\gamma[lm - n(N-U)],$$

und hieraus, weil $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{[mn - l(L-U)]^2} + \frac{1}{[ln - m(M-U)]^2} + \frac{1}{[lm - n(N-U)]^2} \text{ setzt,}$$

$$\cos\alpha = \frac{\lambda}{mn - l(L-U)}, \quad \cos\beta = \frac{\lambda}{ln - m(M-U)}, \quad \cos\gamma = \frac{\lambda}{lm - n(N-U)}.$$

Setzt man ferner

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{[mn - l(L-V)]^2} + \frac{1}{[ln - m(M-V)]^2} + \frac{1}{[lm - n(N-V)]^2},$$

so erhält man ebenso

$$\cos\alpha' = \frac{\mu}{mn - l(L-V)}, \quad \cos\beta' = \frac{\mu}{ln - m(M-V)}, \quad \cos\gamma' = \frac{\mu}{lm - n(N-V)}.$$

Setzt man endlich

$$\frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{[mn - l(L-W)]^2} + \frac{1}{[ln - m(M-W)]^2} + \frac{1}{[lm - n(N-W)]^2},$$

so erhält man

$$\cos\alpha'' = \frac{\nu}{mn - l(L-W)},\ \cos\beta'' = \frac{\nu}{ln - m(M-W)},\ \cos\gamma'' = \frac{\nu}{lm - n(N-W)}.$$

Die Trägheitsmomente in Bezug auf die drei Hauptaxen, welche wir mit A, B, C bezeichnet haben, findet man

$$A = \int(v^2 + w^2)dM = V + W,\ \ B = U + W,\ \ C = U + V.$$

§. 106.

Wenn im Körper ein Punkt (ξ, η, ζ) sich befindet, welcher die Eigenschaft hat, dass die Trägheitsmomente in Bezug auf alle durch diesen Punkt gehende Hauptaxen gleich sind, so kann dieser Punkt folgender Weise gefunden werden.

Es sei der Anfangspunkt des Coordinatensystems x, y, z im Schwerpunkte gewählt, so dass $\int x dM = o$, $\int y dM = o$, $\int z dM = o$, und es sei ferner als Coordinatenaxe die dem Schwerpunkte zugehörige Hauptaxe gewählt, so dass also auch $\int yz dM = o$, $\int xz dM = o$, $\int xy dM = o$. Denkt man sich jetzt durch den gesuchten Punkt drei mit den x, y, z Axen parallele Axen u, v, w gezogen, so wird

$$u = x - \xi,\ \ v = y - \eta,\ \ w = z - \zeta.$$

Damit jetzt u, v, w Hauptaxen seien, muss folglich

$$\int uv dM = \int(x-\xi)(y-\eta)dM = \xi\eta\int dM = o,$$
$$\int uw dM = \int(x-\xi)(z-\zeta)dM = \xi\zeta\int dM = o,$$
$$\int vw dM = \int(y-\eta)(z-\zeta)dM = \eta\zeta\int dM = o,$$

und daher auch

$$\xi\eta = o,\ \ \xi\zeta = o,\ \ \eta\zeta = o,$$

d. h. der Punkt (ξ, η, ζ) muss in einer der drei durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxen liegen. Die Trägheitsmomente P, Q, R in Bezug auf die u, v, w Axen werden, wenn man die in Bezug auf die x, y, z Axen mit A, B, C bezeichnet, nach §. 102

$$P = A + M(\eta^2 + \zeta^2),\ \ Q = B + M(\xi^2 + \zeta^2),\ \ R = C + M(\xi^2 + \eta^2).$$

Soll jetzt $P = Q = R$ sein, so muss

$$A - M\xi^2 = B - M\eta^2 = C - M\zeta^2$$

sein. Wenn jetzt $\xi = o$, $\eta = o$ wäre, oder wenn der gesuchte Punkt (ξ, η, ζ) in der z Axe liegen sollte, so müssen $A = B$ und $C > A$

sein. Es ist dann $\zeta = \pm\sqrt{\frac{C-A}{M}}$, und es würde also nun zwei in der z Axe liegende Punkte geben, welche die verlangte Eigenschaft hätten. Sollte der Punkt (ξ, η, ζ) in der y Axe liegen, so muss $A = C$ und $B > A$ sein; sollte er endlich in der x Axe liegen, so muss $B = C$ und $A > B$ sein. Damit im Körper ein Punkt sich befindet, welcher die Eigenschaft besitzt, dass alle durch diesen Punkt gehende Axen Hauptaxen in Bezug auf diesen Punkt sind, müssen die Momente in Bezug auf zwei der durch den Schwerpunkt gehende Hauptaxen gleich sein, und das Moment in Bezug auf die dritte Hauptaxe grösser als jene sein. Es giebt alsdann zwei in dieser dritten Axe in gleichen Entfernungen vom Schwerpunkte liegende Punkte, welche die gesuchte Eigenschaft haben. Sind die Momente in Bezug auf jede durch den Schwerpunkt gehende Axe gleich, so giebt es im Körper keinen andern Punkt, welcher diese Eigenschaft besitzt.

§. 107.

Jede durch den Schwerpunkt gehende Hauptaxe ist auch eine Hauptaxe in Bezug auf jeden anderen in ihr liegenden Punkt. Es seien x, y, z die durch den Schwerpunkt gehenden drei Hauptaxen und O ein Punkt in der x Axe, dessen Abstand vom Schwerpunkt gleich a sei. Man ziehe durch O zwei andere mit y und z parallele Axen und bezeichne diese drei durch O gehende Axen, wovon die erste mit der x Axe zusammenfällt, durch u, v, w. Es ist alsdann $u = x - a$, $v = y$, $w = z$, und folglich

$$\int uv dM = \int xy dM - a\int y dM, \quad \int uw dM = \int xz dM - a\int z dM.$$

Es ist aber $\int xy dM = o$ und $\int xz dM = o$, weil die x Axe eine Hauptaxe ist, und $\int y dM = o$, $\int z dM = o$, weil die x Axe durch den Schwerpunkt des Körpers geht. Es wird also $\int uv dM = o$, $\int uw dM = o$, oder die x Axe ist auch eine Hauptaxe in Bezug auf den Punkt O.

§. 108.

Bezeichnet man durch ϱ die Dichtigkeit des Körpers, so wird $dM = \varrho\, dx\, dy\, dz$, und folglich, wenn man die Trägheitsmomente in Bezug auf die drei Coordinatenaxen durch A, B, C bezeichnet

$$A = \iiint (y^2 + z^2)\varrho\, dx\, dy\, dz, \quad B = \iiint (x^2 + z^2)\varrho\, dx\, dy\, dz,$$
$$C = \iiint (x^2 + y^2)\varrho\, dx\, dy\, dz.$$

Hat der Körper überall dieselbe Dichtigkeit, so ist ϱ constant, und setzt man der Kürze wegen

$$\iiint x^2\, dx\, dy\, dz = L, \quad \int y^2\, dx\, dy\, dz = M, \quad \int z^2\, dx\, dy\, dz = N,$$

so wird $A = \varrho(M + N)$, $B = \varrho(L + N)$, $C = \varrho(L + M)$.

Beispiele.

1) Der Körper sei ein gerades Prisma oder Cylinder von beliebigen Querschnitten. Der Schwerpunkt sei der Anfangspunkt, die x Axe die Längenaxe des Prismas und die Länge des Prismas 2a, so wird, wenn die Integrationen in Bezug auf x von $-a$ bis $+a$ ausgeführt werden,

$$L = \tfrac{2}{3}a^3 \iint dy\, dz, \quad M = 2a\int y^2\, dy\, dz, \quad N = 2a\int z^2\, dy\, dz.$$

Die x Axe wird alsdann immer eine Hauptaxe, weil $\int_{-a}^{+a} x\, dx = o$, und folglich $\int xy\, dx\, dy\, dz$ und $\int xz\, dx\, dy\, dz$ beide gleich Null sind. Der Querschnitt des Prismas sei jetzt ein Rechteck, 2b und 2c die Seiten desselben und der y und z Axe parallel, so wird

$$\iint dy\, dz = 4bc, \quad \iint y^2\, dy\, dz = \tfrac{4}{3}b^3 c, \quad \iint z^2\, dy\, dz = \tfrac{4}{3}bc^3,$$

und daher $L = \tfrac{8}{3}a^3 bc$, $M = \tfrac{8}{3}ab^3 c$, $N = \tfrac{8}{3}abc^3$.

Das Volumen des Prismas ist 8abc, seine Masse also $8\varrho abc$. Wird diese mit m bezeichnet, so wird

$$A = \tfrac{1}{3}(b^2 + c^2)m, \quad B = \tfrac{1}{3}(a^2 + c^2)m, \quad C = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2)m.$$

Die y und z Axe wird hier, so wie die x Axe, Hauptaxe werden, weil $\int_{-b}^{+b} y\, dy = o$, $\int_{-c}^{+c} z\, dz = o$. Wenn $a > b > c$ ist, so wird auch $C > B > A$ sein, wenn $a = b$, wird auch $A = B$ sein.

Ist der Querschnitt des Cylinders elliptisch, die y und z Coordinatenaxe der Axe der Ellipse parallel und b und c die Hälfte der Länge dieser Axen, so wird $y = \pm b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$, und folglich

$$\iint dy\,dz = 2b\int_{-c}^{+c}\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\,dz = 2bc\cdot\frac{\pi}{2} = bc\pi,$$

$$\iint y^2\,dy\,dz = \frac{2b^3}{3}\int_{-c}^{+c}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dz = \tfrac{2}{3}b^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi = \tfrac{4}{3}b^3c\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi,$$

wenn $z = c\sin\varphi$ gesetzt wird. Es ist aber

$$\int\cos^4\varphi\,d\varphi = \int\left(\frac{\cos 4\varphi}{8} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{3}{8}\right)d\varphi = \frac{\sin 4\varphi}{32} + \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{3}{8}\varphi,$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$, folglich ist $\iint y^2 dy dz = \frac{1}{4}b^3c\pi$ und ebenso $\iint z^2\,dy\,dz = \frac{1}{4}bc^3\pi$. Hieraus findet man

$$L = \tfrac{2}{3}a^3bc\pi,\quad M = \tfrac{1}{2}ab^3c\pi,\quad N = \tfrac{1}{2}abc^3\pi.$$

Das Volumen des Prismas ist $2abc\pi$, die Masse $2\varrho abc\pi$. Bezeichnet man diese durch m, so findet man

$$A = \tfrac{1}{4}(b^2 + c^2)m,\quad B = (\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{3}a^2)m,\quad C = (\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2)m.$$

Die x, y, z Axen sind hier auch Hauptaxen.

2) Der Körper sei ein Ellipsoid, dessen aufeinander senkrechte Halbaxen a, b, c seien und mit den Coordinatenaxen zusammenfallen. Die Gleichung ihrer Oberfläche ist dann $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Es wird nun

$$L = \iiint x^2\,dx\,dy\,dz = 2c\int_{-a}^{+a} x^2\left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dy\right)dx.$$

Es ist aber, wenn man der Kürze wegen $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = r$ setzt,

$$\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dy = \frac{1}{b}\int_{-r}^{+r}\sqrt{r^2 - y^2}\,dy = \frac{\pi r^2}{2b} = \frac{\pi b(a^2 - x^2)}{2a^2},$$

und folglich $L = \frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{+a} x^2(a^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{15}\pi a^3 bc.$

Ebenso findet man

$$M = \tfrac{4}{15}\pi ab^3 c, \quad N = \tfrac{4}{15}\pi abc^3.$$

Setzt man jetzt die Masse des Ellipsoids $\frac{4}{3}abc = m$, so wird

$$A = \tfrac{1}{5}m(b^2 + c^2), \quad B = \tfrac{1}{5}m(a^2 + c^2), \quad C = \tfrac{1}{5}m(a^2 + b^2).$$

Die drei Axen sind hier Hauptaxen, und wenn $a > b > c$, so wird $C > B > A$. Wenn $a = b = c$, der Körper also eine Kugel ist, werden alle drei Momente gleich, und es ist das Trägheitsmoment einer Kugel in Bezug auf jede durch den Mittelpunkt gehende Axe $= \frac{2}{5}ma^2$, wo a den Halbmesser bezeichnet.

§. 109.

Das allgemeine dreifache Integral des Trägheitsmomentes eines Körpers kann in mehreren besonderen Fällen auf ein einfaches Integral reducirt werden. Dies ist der Fall, wenn der Körper von gleichförmiger Dichtigkeit ist, von einer Umdrehungsfläche begrenzt wird und man das Trägheitsmoment sucht in Bezug auf eine Axe, welche entweder mit der Axe der Umdrehungsfläche zusammenfällt oder darauf senkrecht steht.

Man denke sich den Körper durch Ebenen in Elemente getheilt, welche auf der Axe der Umdrehungsfläche senkrecht stehen, und suche das Trägheitsmoment jedes dieser Elemente. Im ersten Falle, wenn die Axe, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment gesucht wird, mit derjenigen der Umdrehungsfläche zusammenfällt, hat man

$$dM = 2\pi\varrho r dr dx,$$

und folglich das Trägheitsmoment des Körpers, wenn $y = f(x)$ die Gleichung der Generatrice der Umdrehungsfläche ist,

$$A = 2\pi\int\int_0^y \varrho r^3\,dr\,dx = \frac{\pi\varrho}{2}\int y^4\,dx.$$

Im zweiten Falle, wenn man das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe, die x Axe, welche senkrecht auf derjenigen der Umdrehungsfläche, der y Axe, ist, sucht, so ziehe man durch den Mit-

telpunkt des durch zwei auf der y Axe senkrechte Ebenen hervorgebrachten Elementarcylinders eine mit der x Axe parallele Axe, und suche erst das Trägheitsmoment des Elementarcylinders in Bezug auf diese Axe. Es sei (Fig. 43) ABCEA der Elementarcylinder, D sein Mittelpunkt, AF parallel der x Axe. Bezeichnet man durch φ den Winkel BDC, durch λ den Radius vector Dm, so ist die Masse eines Elementes dM des Cylinders ABCEA gleich $dM = \varrho\lambda d\lambda dy d\varphi$, sein Abstand r von AF ... $r = \lambda \sin\varphi$, und daher das Trägheitsmoment des Cylinders ABCEA in Bezug auf AF gleich

$$\varrho dy \int_0^{2\pi}\int_0^x \lambda^3 \sin^2\varphi \, d\lambda \, d\varphi = \pi\varrho dy \int_0^x \lambda^3 d\lambda = \tfrac{1}{4}\pi\varrho x^4 dy.$$

Die Masse des Cylinders ABCEA ist ferner gleich $\pi\varrho\lambda^2 dy$. Sein Moment in Bezug auf die x Axe wird nun

$$\pi\varrho x^2 y^2 dy + \tfrac{1}{4}\pi\varrho x^4 dy.$$

Wenn $x = f(y)$ die Gleichung der Generatrice ist, wird folglich

$$A = \pi\varrho\int(x^2 y^2 + \tfrac{1}{4}x^4)dy$$

das gesuchte Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die x Axe.

Beispiele.

1) Man suche das Trägheitsmoment eines geraden abgestumpften Kegels in Bezug auf seine Axe.

Es seien (Fig. 44) die beiden Halbmesser $OC = a$, $BA = b$, die Höhe $BE = h$, $\tang ODC = t$. Es ist alsdann

$$y = b + tx, \quad dx = \frac{dy}{t},$$

$$A = \frac{\pi\varrho}{2}\int_0^h y^4 dx = \frac{\pi\varrho}{2t}\int_b^a y^4 dy = \frac{\pi\varrho}{10t}(a^5 - b^5).$$

Es ist ferner die Masse M des Kegels

$$M = \pi\varrho\int_0^h y^2 dx = \frac{\pi\varrho}{t}\int_b^a y^2 dy = \frac{\pi\varrho}{3t}(a^3 - b^3),$$

folglich
$$A = \tfrac{3}{10} M\left(\frac{a^5 - b^5}{a^3 - b^3}\right).$$

2) Man suche das Trägheitsmoment eines abgestumpften geraden Kegels in Bezug auf eine auf seiner Axe senkrechte Linie.

Es sei (Fig. 45) Ox die Axe, in Bezug auf welche das Moment der Trägheit gesucht wird. Es sei, wie im vorigen Beispiele, OC $= a$, $BA = b$, $BO = h$, $\tan ODC = t$. Es ist alsdann

$$y = a - tx, \quad dy = -tdx, \quad x = \frac{a-y}{t},$$

$$A = \pi\varrho\int_0^4 (x^2 y^2 + \tfrac{1}{4}x^4)dy = -\pi\varrho t\int_a^b [x^2(a-tx)^2 + \tfrac{1}{4}x^4)dx$$

$$= \pi\varrho t\int_b^a [a^2x^2 - 2atx + (t^2 + \tfrac{1}{4})x^4]dx$$

$$= \pi\varrho t\left(\frac{4t^2+1}{20}(a^5 - b^5) - \tfrac{1}{2}at(a^4 - b^4) + \tfrac{1}{3}a^2(a^3 - b^3)\right).$$

Es ist ferner die Masse M des Kegels

$$M = \frac{\pi\varrho}{3t}(a^3 - b^3),$$

folglich

$$A = 3t^2 M\left[\frac{4t^2+1}{20}\left(\frac{a^5-b^5}{a^3-b^3}\right) + \tfrac{1}{2}at\left(\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}\right) + \tfrac{1}{3}a^2\right].$$

3) Man suche das Trägheitsmoment eines Kugelsegments in Bezug auf eine auf der abschneidenden Ebene senkrechte Axe.

Es sei (Fig. 46) ABCD das Kugelsegment, dessen Halbmesser $CD = r$. Die Höhe des Segments $DE = h$, und die x Axe parallel mit DC in einem Abstand $OE = 1$. Es ist alsdann

$$EP = x, \quad PM^2 = [2r - (h - x)](h - x),$$

und das Trägheitsmoment in Bezug auf die Linie DC

$$A' = \frac{\pi\varrho}{2}\int_0^h [2r - (h - x)]^2(h - x)^2 dx$$

$$= -\frac{\pi\varrho}{2}\int_0^h [4r^2(h-x)^2 - 4r(h-x)^3 + (h-x)^4]d(h-x)$$

$$= \pi\varrho(\tfrac{2}{3}r^2h^3 - \tfrac{1}{2}rh^4 + \tfrac{1}{10}h^5).$$

Die Masse M des Segments ist

$$M = \pi\varrho\int_0^h [2r - (h - x)](h - x)dx = \pi\varrho(rh^2 - \tfrac{1}{3}h^3),$$

und es wird nun

$$A' = Mh \cdot \frac{\frac{2}{3}r^2 - \frac{1}{2}rh + \frac{1}{10}h^2}{r - \frac{1}{3}h}.$$

In Bezug auf die x Axe wird das Trägheitsmoment

$$A = M\left(h \cdot \frac{\frac{2}{3}r^2 - \frac{1}{2}rh + \frac{1}{10}h^2}{r - \frac{1}{3}h} + l^2\right).$$

c) Gesetze der relativen Bewegung eines festen Körpers in Bezug auf seinen Schwerpunkt.

§. 110.

Wie im §. 92 schon bemerkt, ist die Bewegung eines festen Körpers durch die Bewegung eines festen Punktes O im Körper und durch die relative Bewegung aller übrigen Punkte des Körpers in Bezug auf diesen Punkt bestimmt. Wir werden jetzt die Gesetze dieser relativen Bewegung untersuchen.

Denken wir uns jetzt drei im Raume feste Axen. Ziehen wir ferner durch den Punkt O drei damit parallele Axen, die x, y, z Axen, deren Richtung fest ist, und drei im Körper feste Axen, die u, v, w Axen, und bezeichnet durch (ux), (uy), (uz), (vx), (vy) die Winkel, welche die Axen mit einander bilden, durch x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes P des Körpers relativ zum ersten, durch u, v, w relativ zum zweiten Coordinatensystem, so wird

$$(1)\qquad \begin{aligned} u &= x\cos(ux) + y\cos(uy) + z\cos(uz), \\ v &= x\cos(vx) + y\cos(vy) + z\cos(vz), \\ w &= x\cos(wx) + y\cos(wy) + z\cos(wz), \end{aligned}$$

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= u\cos(ux) + v\cos(vx) + w\cos(wx), \\ y &= u\cos(uy) + v\cos(vy) + w\cos(wy), \\ z &= u\cos(uz) + v\cos(vz) + w\cos(wz), \end{aligned}$$

$$(3)\qquad \begin{aligned} \cos^2(ux) + \cos^2(uy) + \cos^2(uz) &= 1, \\ \cos^2(vx) + \cos^2(vy) + \cos^2(vz) &= 1, \\ \cos^2(wx) + \cos^2(wy) + \cos^2(wz) &= 1, \end{aligned}$$

$$(4)\qquad \begin{aligned} \cos^2(ux) + \cos^2(vx) + \cos^2(wx) &= 1, \\ \cos^2(uy) + \cos^2(vy) + \cos^2(wy) &= 1, \\ \cos^2(uz) + \cos^2(vz) + \cos^2(wz) &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cos(ux)\cos(vx) + \cos(uy)\cos(vy) + \cos(wz)\cos(vz) = 0,\\
(5)\quad &\cos(ux)\cos(wx) + \cos(uy)\cos(wy) + \cos(uz)\cos(wz) = 0,\\
&\cos(vx)\cos(wx) + \cos(vy)\cos(wy) + \cos(vz)\cos(wz) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cos(ux)\cos(uy) + \cos(vx)\cos(vy) + \cos(wx)\cos(wy) = 0,\\
(6)\quad &\cos(ux)\cos(uz) + \cos(vx)\cos(vz) + \cos(wx)\cos(wz) = 0,\\
&\cos(uy)\cos(uz) + \cos(vy)\cos(vz) + \cos(wy)\cos(wz) = 0.
\end{aligned}$$

Es sind jetzt zur Zeit t die relativen Geschwindigkeiten des Punktes P gegen O, nach den drei Axen x, y, z zerlegt, $d_t x$, $d_t y$, $d_t z$, und parallel mit den Axen u, v, w zerlegt,

$$\begin{aligned}
&U = d_t x \cos(ux) + d_t y \cos(uy) + d_t z \cos(uz),\\
(7)\quad &V = d_t x \cos(vx) + d_t y \cos(vy) + d_t z \cos(vz),\\
&W = d_t x \cos(wx) + d_t y \cos(wy) + d_t z \cos(wz).
\end{aligned}$$

Differentiirt man die vorhergehenden Gleichungen (2), so erhält man, weil u, v, w constant sind,

$$\begin{aligned}
&d_t x = u d_t[\cos(ux)] + v d_t[\cos(vx)] + w d_t[\cos(wx)],\\
(8)\quad &d_t y = u d_t[\cos(uy)] + v d_t[\cos(vy)] + w d_t[\cos(wy)],\\
&d_t z = u d_t[\cos(uz)] + v d_t[\cos(vz)] + w d_t[\cos(wz)].
\end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (7) und berücksichtigt die Differentialen der Gleichungen (3), so erhält man

$$\begin{aligned}
U = {} & v\{\cos(ux)d_t[\cos(vx)] + \cos(uy)d_t[\cos(vy)]\\
&\qquad + \cos(uz)d_t[\cos(vz)]\}\\
&+ w\{\cos(ux)d_t[\cos(wx)] + \cos(uy)d_t[\cos(wy)]\\
&\qquad + \cos(wz)d_t[\cos(wz)]\},\\
V = {} & u\{\cos(vx)d_t[\cos(ux)] + \cos(vy)d_t[\cos(uy)]\\
&\qquad + \cos(vz)d_t[\cos(uz)]\}\\
(9)\quad &+ w\{\cos(vx)d_t[\cos(wx)] + \cos(vy)d_t[\cos(wy)]\\
&\qquad + \cos(vz)d_t[\cos(wz)]\},\\
W = {} & u\{\cos(wx)d_t[\cos(ux)] + \cos(wy)d_t[\cos(uy)]\\
&\qquad + \cos(wz)d_t[\cos(uz)]\}\\
&+ v\{\cos(wx)d_t[\cos(vx)] + \cos(wy)d_t[\cos(vy)]\\
&\qquad + \cos(wz)d_t[\cos(vz)]\},
\end{aligned}$$

Differentiirt man jetzt die Gleichungen (5), so findet man

$$\begin{aligned}
(10)\quad &\{\cos(ux)d_t[\cos(vx)] + \cos(uy)d_t[\cos(vy)]\\
&\qquad + \cos(uz)d_t[\cos(vz)]\}
\end{aligned}$$

$$= -\left\{\cos(vx)d_t[\cos(ux)] + \cos(vy)d_t[\cos(uy)] + \cos(vz)d_t[\cos(uz)]\right\} = r,$$

(10)
$$\left\{\cos(wx)d_t[\cos(ux)] + \cos(wy)d_t[\cos(uy)] + \cos(wz)d_t[\cos(uz)]\right\} = -\left\{\cos(ux)d_t[\cos(wx)] + \cos(uy)d_t[\cos(wy)] + \cos(uz)d_t[\cos(wz)]\right\} = q,$$

$$\left\{\cos(vx)d_t[\cos(wx)] + \cos(vy)d_t[\cos(wy)] + \cos(vz)d_t[\cos(wz)]\right\} = -\left\{\cos(wx)d_t[\cos(vx)] + \cos(wy)d_t[\cos(vy)] + \cos(wz)d_t[\cos(vz)]\right\} = p,$$

wo die neuen Bezeichnungen r, q, p der Kürze willen eingeführt sind. Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (9), so findet man

(11) $$U = vr - uq, \quad V = wp - ur, \quad W = uq - vp.$$

Diese drei relative Geschwindigkeiten des Punktes P gegen O nach den drei Axen u, v, w werden Null sein für jeden Punkt einer durch O gehenden geraden Linie, deren Gleichung

(12) $$\frac{u}{p} = \frac{v}{q} = \frac{w}{r}$$

ist, und diese Gerade wird die augenblickliche Drehungsaxe des Körpers.

Es geht ferner aus den Gleichungen (11) hervor, dass die Geschwindigkeit aller in einer der Axe (12) parallelen geraden Linie liegenden Punkte gleich sind. Es sind nämlich die Gleichungen einer solchen Geraden $vr - uq = a$, $wp - ur = b$, $uq - vp = c$, wo a, b, c von den Coordinaten u, v, w unabhängige Grössen sind, welche die Bedingungsgleichung $ap + bq + cr = o$ erfüllen.

Die Gleichung einer auf der augenblicklichen Drehungsaxe (12) senkrechten Ebene ist $pu + qv + rw = o$. Betrachtet man in derselben einen Punkt, dessen Abstand von O die Einheit ist, daher $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, so wird die relative Geschwindigkeit dieses Punktes gegen O die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Drehung genannt; wir werden dieselbe durch Ω bezeichnen. Es ist alsdann

$$\Omega^2 = U^2 + V^2 + W^2.$$

Es ist aber

$$U^2 + V^2 + W^2 = (rv - qw)^2 + (pw - ru)^2 + (qu - pv)^2$$
$$= (p^2 + q^2 + r^2)(u^2 + v^2 + w^2) - (pu + qv + rw)^2$$
$$= p^2 + q^2 + r^2,$$

folglich wird

$$\Omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Die Cosinus der Winkel, welche die augenblickliche Drehungsaxe (12) mit den drei Axen u, v, w bildet, sind

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

und die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ um die Axe (12) kann als aus drei Winkelgeschwindigkeiten um die drei Axen u, v, w, deren Grösse durch p, q, r dargestellt wird, zusammengesetzt gedacht werden.

§. 111.

Durch Differentiation der ersten der Gleichungen (3) des vorigen Paragraphen findet man

$$\cos(ux)d_t[\cos(ux)] + \cos(uy)d_t[\cos(uy)] + \cos(uz)d_t[\cos(uz)] = o,$$

und aus den Gleichungen (10)

$$\cos(vx)d_t[\cos(ux)] + \cos(vy)d_t[\cos(uy)] + \cos(wz)d_t[\cos(uz)] = -r,$$
$$\cos(wx)d_t[\cos(ux)] + \cos(wy)d_t[\cos(uy)] + \cos(wz)d_t[\cos(uz)] = q.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen der Reihe nach mit cos(ux), cos(vx), cos(wx), und addirt, so erhält man, mit Berücksichtigung der Gleichungen (4) und (6) des vorigen Paragraphen,

$$d_t[\cos(ux)] = q\cos(wx) - r\cos(vx), \text{ und ebenso}$$
$$d_t[\cos(uy)] = q\cos(wy) - r\cos(vy),$$
$$d_t[\cos(uz)] = q\cos(wz) - r\cos(vz),$$
$$d_t[\cos(vx)] = r\cos(ux) - p\cos(wx),$$
$$d_t[\cos(vy)] = r\cos(uy) - p\cos(wy),$$
$$d_t[\cos(vz)] = r\cos(uz) - p\cos(wz),$$
$$d_t[\cos(wx)] = p\cos(vx) - q\cos(ux),$$
$$d_t[\cos(wy)] = p\cos(vy) - q\cos(uy),$$
$$d_t[\cos(wz)] = p\cos(vz) - q\cos(wz).$$

Diese Werthe in die Gleichungen (8) substituirt geben

$$d_t x = u[q\cos(wx) - r\cos(vx)] + v[r\cos(ux) - p\cos(wx)] + w[p\cos(vx) - q\cos(ux)],$$
$$d_t y = u[q\cos(wy) - r\cos(vy)] + v[r\cos(uy) - p\cos(wy)] + w[p\cos(vy) - q\cos(uy)],$$
$$d_t z = u[q\cos(wz) - r\cos(vz)] + v[r\cos(uz) - p\cos(wz)] + w[p\cos(vz) - q\cos(wz)].$$

Hieraus können die Werthe der übergestrichenen mit der Masse der entsprechenden Punkte multiplicirten Flächenräume für eine Zeiteinheit gefunden werden. Die Projectionen dieser auf die drei Coordinatenebenen yz, xz, xy sind (§. 91)

$$\tfrac{1}{2}\int(zd_t y - yd_t z)dM,\quad \tfrac{1}{2}\int(xd_t z - zd_t x)dM,\quad \tfrac{1}{2}\int(yd_t x - xd_t y)dM.$$

Nehmen wir, um den Werth dieser Ausdrücke zu vereinfachen, an, die im Körper festen Axen u, v, w seien drei Hauptaxen in Bezug auf den Punkt O, so wird (§. 104)

$$\int vwdM = o,\quad \int uwdM = o,\quad \int uvdM = o.$$

Bezeichnet man ferner durch A, B, C die in Bezug auf diese drei Hauptaxen bezüglichen Trägheitsmomente, folglich

$$\int(v^2 + w^2)dM = A,\quad \int(u^2 + w^2)dM = B,\quad \int(u^2 + v^2)dM = C,$$

so wird durch Substitution der Werthe von x, y, z in die Gleichungen (2) des vorigen Paragraphen

$$\int(zd_t y - yd_t z)dM = Ap[\cos(wz)\cos(vy) - \cos(wy)\cos(vz)] + Bq[\cos(uz)\cos(wy) - \cos(wz)\cos(uy)] + Cr[\cos(uy)\cos(vz) - \cos(vy)\cos(uz)].$$

Es ist aber jetzt, weil die u, v, w Axen und ebenso die x, y, z Axen aufeinander senkrecht stehen,

$$\cos(ux) = \cos(wz)\cos(vy) - \cos(wy)\cos(vz),$$
$$\cos(vx) = \cos(uz)\cos(wy) - \cos(uy)\cos(wz),$$
$$\cos(wx) = \cos(vz)\cos(uy) - \cos(vy)\cos(uz).$$

(Diese Gleichungen, welche aus der analytischen Geometrie bekannt sind, können leicht aus den Gleichungen (1) bis (6) des vorigen Paragraphen entwickelt werden, ganz auf dieselbe Weise wie im §. 63 die Gleichung $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{R}} = \frac{Z}{R}\cdot\frac{\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{R}'} - \frac{\mathfrak{Z}'Y}{\mathfrak{R}'R}$ gefunden wurde.)

Substituirt man diese Werthe, so erhält man

$$\int(zd_t y - yd_t z)dM = Ap\cos(ux) + Bq\cos(vx) + Cr\cos(wx),$$

und ebenso

$$\int(xd_t z - zd_t x)dM = Ap\cos(uy) + Bq\cos(vy) + Cr\cos(wy),$$

$$\int(yd_t x - xd_t y)dM = Ap\cos(uz) + Bq\cos(vz) + Cr\cos(wz).$$

§. 112.

Nach diesen Vorbereitungen lassen sich die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien festen Körpers, auf welchen verschiedene Kräfte wirken, ohne Schwierigkeit aufstellen.

Die im §. 90 entwickelten allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines festen Körpers sind

$$\Sigma\frac{p}{g}d_t^2 x' = \Sigma X,\quad \Sigma\frac{p}{g}d_t^2 y' = \Sigma Y,\quad \Sigma\frac{p}{g}d_t^2 z' = \Sigma Z,$$

$$\Sigma\frac{p}{g}(z'd_t^2 y' - y'd_t^2 z') = \Sigma(Yz' - Zy'),$$

$$\Sigma\frac{p}{g}(x'd_t^2 z' - z'd_t^2 y') = \Sigma(Zx' - Xz'),$$

$$\Sigma\frac{p}{g}(y'd_t^2 x' - x'd_t^2 y') = \Sigma(Xy' - Yx'),$$

wo $\frac{p}{g} = dm$ die Masse eines Elementes des Körpers bezeichnet, dessen Coordinaten x', y', z' sind. Nimmt man jetzt als den im §. 110 durch O bezeichneten Punkt den Schwerpunkt an, und bezeichnet durch ξ, η, ζ seine Coordinaten nach den im Raume festen Axen, durch x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes des Körpers nach den damit parallelen durch den Schwerpunkt gehenden Axen, so dass

$$x' = x + \xi,\quad y' = y + \eta,\quad z' = z + \zeta,$$

so wird, weil $\int x'dm = \xi m$,

$$\Sigma\frac{p}{g}d_t^2 x' = \int d_t^2 x'dm = d_t^2\int x'dm = md_t^2\xi.$$

Die drei ersten Bewegungsgleichungen werden nun

(1) $$md_t^2\xi = \Sigma X,\quad md_t^2\eta = \Sigma Y,\quad md_t^2\zeta = \Sigma Z.$$

Ferner ist, weil $\int zdm = o$, $\int ydm = o$,

$$\begin{aligned}\Sigma\frac{p}{g}(z'd_t^2y' - y'd_t^2z') &= \int(z'd_t^2y' - y'd_t^2z')dm \\ &= \int[(z+\zeta)(d_t^2y + d_t^2\eta) - (y+\eta)(d_t^2z + d_t^2\zeta)]dm \\ &= \int(zd_t^2y - yd_t^2z)dm + m(\zeta d_t^2\eta - \eta d_t^2\zeta) \\ &= d_t\int(zd_ty - yd_tz)dm + \zeta\Sigma Y - \eta\Sigma Z.\end{aligned}$$

Ferner ist $\Sigma(Yz' - Zy') = \Sigma(Yz - Zy) + \zeta\Sigma Y - \eta\Sigma Z.$

Die drei letzten Gleichungen der Bewegung werden nun

$$\begin{aligned}&d_t\int(zd_ty - yd_tz)dm = \Sigma(Yz - Zy), \\ (2)\qquad &d_t\int(xd_tz - zd_tx)dm = \Sigma(Zx - Xz), \\ &d_t\int(yd_tx - xd_ty)dm = \Sigma(Xy - Yx).\end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung die Summen der Momente der gegebenen Kräfte in Bezug auf die drei durch den Schwerpunkt gehenden der Richtung nach festen Coordinatenaxen

$$\Sigma(Yz - Zy) = L, \quad \Sigma(Zx - Xz) = M, \quad \Sigma(Xy - Yx) = N,$$

und substituirt aus dem vorigen Paragraphen die Werthe der linken Seite der vorhergehenden Gleichungen, so werden diese die Form annehmen

$$\begin{aligned}&d_t[Ap\cos(ux) + Bq\cos(vx) + Cr\cos(wx)] = L, \\ (3)\qquad &d_t[Ap\cos(uy) + Bq\cos(vy) + Cr\cos(wy)] = M, \\ &d_t[Ap\cos(uz) + Bq\cos(vz) + Cr\cos(wz)] = N.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\cos(ux)$, $\cos(uy)$, $\cos(uz)$, addirt und bemerkt die Gleichungen (3), (5), (10) des vorigen Paragraphen, so wie die Differentialen der Gleichungen (3), so erhält man

$$Ad_tp + (B - C)qr = L\cos(ux) + M\cos(uy) + N\cos(uz),$$

und ebenso

$$\begin{aligned}(4)\qquad &Bd_tq + (C - A)rp = L\cos(vx) + M\cos(vy) + N\cos(vz), \\ &Cd_tr + (A - B)pq = L\cos(wx) + M\cos(wy) + N\cos(wz).\end{aligned}$$

Die Gleichungen (1) und (4) bestimmen vollständig die Bewegungen des Körpers.

Betrachtet man die Bewegung eines schweren Körpers im leeren Raume und nimmt die z Axe vertical und positiv nach unten an, so wird

$$\Sigma X = o, \quad \Sigma Y = o, \quad \Sigma Z = gm, \quad L = o, \quad M = o, \quad N = o.$$

Die Gleichungen (1) und (4) geben mithin

$$d_t^2 \xi = o, \quad d_t^2 \eta = o, \quad d_t^2 \zeta = g,$$

$$(5) \quad \begin{aligned} A d_t p + (B - C) q r &= o, \\ B d_t q + (C - A) r p &= o, \\ C d_t r + (A - B) p q &= o. \end{aligned}$$

Die Bewegung des Schwerpunkts und die Drehung des Körpers um denselben sind nun von einander ganz unabhängig. Der Schwerpunkt wird eine Parabel beschreiben und der Körper sich um den Schwerpunkt ebenso drehen, als wenn er unbeweglich wäre.

§. 113.

Hat der Körper einen festen Punkt, so nehme man diesen als den im §. 110 mit O bezeichneten Punkt an. Es seien fortwährend ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunktes, x, y, z die irgend eines andern Punktes des Körpers, und die x, y, z Axen jetzt nicht bloss der Richtung, sondern auch der Lage nach fest. Der Druck, welchen der feste Punkt O in jedem Augenblicke erleidet, sei durch Π bezeichnet und die Winkel, welche die Richtung dieses Drucks mit den drei Coordinatenaxen bildet, seien α, β, γ. Dieser Druck und seine Richtung ist durch folgende Gleichungen bestimmt

$$\Sigma X - \int d_t^2 x \, dm - \Pi \cos \alpha = o, \quad \Sigma Y - \int d_t^2 y \, dm - \Pi \cos \beta = o,$$

$$\Sigma Z - \int d_t^2 z \, dm - \Pi \cos \gamma = o,$$

oder wegen der Gleichungen $\int x dm = \xi m$, $\int y dm = \eta m$, $\int z dm = \zeta m$,

$$\Pi \cos \alpha = \Sigma X - m d_t^2 \xi, \quad \Pi \cos \beta = \Sigma Y - m d_t^2 \eta,$$

$$\Pi \cos \gamma = \Sigma Z - m d_t^2 \zeta.$$

Zur Bestimmung der Bewegung des Körpers dienen die Gleichungen (2) des vorigen Paragraphen

$$d_t \int (z d_t y - y d_t z) dm = L,$$

$$d_t \int (x d_t z - z d_t x) dm = M,$$

$$d_t \int (y d_t x - x d_t y) dm = N,$$

woraus wieder, wie im vorigen Paragraphen, die Gleichungen folgen:

$$
(1)\quad \begin{aligned}
&d_t[Ap\cos(ux) + Bq\cos(vx) + Cr\cos(wx)] = L,\\
&d_t[Ap\cos(uy) + Bq\cos(vy) + Cr\cos(wy)] = M,\\
&d_t[Ap\cos(uz) + Bq\cos(vz) + Cr\cos(wz)] = N,
\end{aligned}
$$

und hieraus ferner

$$
(2)\quad \begin{aligned}
&Ad_tp + (B - C)qr = L\cos(ux) + M\cos(uy) + N\cos(uz),\\
&Bd_tq + (C - A)rp = L\cos(vx) + M\cos(vy) + N\cos(vz),\\
&Cd_tr + (A - B)pq = L\cos(wx) + M\cos(wy) + N\cos(wz).
\end{aligned}
$$

§. 114.

Nimmt man an, die Momente der gegebenen Kräfte in Bezug auf den festen Punkt L, M, N seien Null, so erhält man aus den Gleichungen (2) des vorigen Paragraphen

$$
(1)\quad \begin{aligned}
&Ad_tp + (B - C)qr = o,\\
&Bd_tq + (C - A)rp = o,\\
&Cd_tr + (A - B)pq = o,
\end{aligned}
$$

und die Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen geben durch Integration

$$
\begin{aligned}
&Ap\cos(ux) + Bq\cos(vx) + Cr\cos(wx) = h,\\
&Ap\cos(uy) + Bq\cos(vy) + Cr\cos(wy) = h',\\
&Ap\cos(uz) + Bq\cos(vz) + Cr\cos(wz) = h'',
\end{aligned}
$$

wo h, h′, h″ constante Grössen sind und die Projection des zusammengesetzten Paares der Bewegungsmomente auf den Ebenen yz, xz, xy bezeichnen, wie aus dem §. 111 hervorgeht. Bezeichnet man die Intensität dieses Paares durch k, wo alsdann

$$
(2)\quad h^2 + h'^2 + h''^2 = k^2,
$$

so findet man durch Quadriren und Addiren dieser Gleichungen

$$
A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2.
$$

Bezeichnet man durch ω die Geschwindigkeit des Punktes (x, y, z), so ist (§. 110)

$$
\begin{aligned}
\omega^2 &= U^2 + V^2 + W^2 = (rv - qw)^2 + (pw - ru)^2 + (qu - pv)^2\\
&= p^2(v^2 + w^2) + q^2(w^2 + u^2) + r^2(u^2 + v^2)\\
&\quad - 2qrvw - 2rpwu - 2pquv,
\end{aligned}
$$

folglich

$$
(3)\quad \int\omega^2 dm = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2\mathfrak{T},
$$

gleich der doppelten lebendigen Kraft des Körpers, welche wir durch

$\mathfrak{L}$ bezeichnen werden. Die lebendige Kraft des Körpers ist also constant.

Die Gleichung der angeblichen Drehungsaxe des Körpers ist

$$\frac{u}{p} = \frac{v}{q} = \frac{w}{r}.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen (2) und (3) die Grössen p, q, r, so erhält man die Kegelfläche, welche diese Axe während der Bewegung im Körper beschreibt. Es wird diese Gleichung

$$(4) \quad A(k^2 - 2A\mathfrak{L})u^2 + B(k^2 - 2B\mathfrak{L})v^2 + C(k^2 - 2C\mathfrak{L})w^2 = o,$$

folglich diejenige einer Kegelfläche zweiten Grades. Aus den Gleichungen (2) und (3) erhält man ferner

$$k^2 - 2A\mathfrak{L} = -Bq^2(A - B) - Cr^2(A - C),$$
$$k^2 - 2C\mathfrak{L} = -Cp^2(A - C) + Bq^2(B - C).$$

Weil jetzt $A =$ oder $> B =$ oder $> C$, so wird immer $k^2 =$ oder $< 2A\mathfrak{L}$, $k^2 =$ oder $> 2C\mathfrak{L}$. Nur wenn $A = B = C$, wird $k^2 = 2A\mathfrak{L}$. Die Axe des Kegels (4) ist diejenige des grössten Trägheitsmomentes, die u Axe, wenn $k^2 > 2B\mathfrak{L}$, und diejenige des kleinsten Trägheitsmomentes, die w Axe, wenn $k^2 < 2B\mathfrak{L}$. Wenn $A = B$ oder $B = C$, wird der obige Kegel ein gerader.

Fällt die augenblickliche Drehungsaxe mit einer der Hauptaxen, z. B. der w Axe, zusammen, so wird $p = o$ und $q = o$. Die Gleichungen (1) geben alsdann $d_t p = o$, $d_t q = o$, $d_t r = o$, d. h. die Umdrehungsaxe wird alsdann immer mit der Hauptaxe w zusammenfallen. Dies gilt aber von keiner Axe, die nicht eine Hauptaxe ist. Soll nämlich umgekehrt die augenblickliche Umdrehungsaxe immer dieselbe Richtung im Körper behalten, so wird $d_t p = o$, $d_t q = o$, $d_t r = o$ und die Gleichungen (1) geben alsdann

$$(B - C)qr = o, \quad (C - A)rp = o, \quad (A - B)pq = o.$$

Sind jetzt alle drei Trägheitsmomente ungleich, so müssen zwei der Grössen p, q, r gleich Null sein, d. h. die Axe muss mit einer der Hauptaxen zusammenfallen. Sind zwei der Momente gleich, z. B. $A = B$, so wird $r = o$ sein müssen, d. h. die augenblickliche Um-

drehungsaxe muss auf die w Axe oder in die uv Ebene fallen; es ist aber alsdann auch jede in die uv Ebene fallende Axe eine Hauptaxe. Ist endlich $A = B = C$, so ist jede Axe eine Hauptaxe.

Die Cosinus, welche die Axe des zusammengesetzten Paares der Bewegungsmomente mit den x, y, z Axen bildet, sind $\frac{h}{k}, \frac{h'}{k}, \frac{h''}{k}$; daher die Cosinus der Winkel, welche sie mit den u, v, w Axen bildet,

$$\frac{h\cos(ux) + h'\cos(uy) + h''\cos(uz)}{k}, \frac{h\cos(vx) + h'\cos(vy) + h''\cos(vz)}{k},$$

$$\frac{h\cos(wx) + h'\cos(wz) + h''\cos(wz)}{k}.$$

Die Gleichungen dieser Axe in Beziehung auf die Hauptaxen u, v, w sind folglich

$$\frac{u}{h\cos(ux) + h'\cos(uy) + h''\cos(uz)} = \frac{v}{h\cos(vx) + h'\cos(vy) + h''\cos(vz)}$$

$$= \frac{w}{h\cos(wx) + h'\cos(wy) + h''\cos(wz)},$$

oder, wenn man die vorhergehenden Werthe von h, h', h'' substituirt,

$$(5) \qquad \frac{u}{Ap} = \frac{v}{Bq} = \frac{w}{Cr}.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen in Verbindung mit denen der (2) und (3) die Grössen p, q, r, so erhält man die Kegelfläche, welche die Axe des zusammengesetzten Paares der Bewegungsmomente im Körper beschreibt. Diese Gleichung wird

$$(6) \qquad \frac{(k^2 - 2A\mathfrak{L})}{A}u^2 + \frac{(k^2 - 2B\mathfrak{L})}{B}v^2 + \frac{(k^2 - 2C\mathfrak{L})}{C}w^2 = o.$$

§. 115.

Denkt man sich auf den drei Hauptaxen des Körpers ein Ellipsoid construirt, dessen Halbaxen den Quadratwurzeln der Trägheitsmomente reciprok gleich, also gleich $\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{B}}, \frac{1}{\sqrt{C}}$ sind, so werden die Gleichungen dieses Ellipsoids

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 = 1.$$

Es wird das Centralellipsoid des Körpers genannt. Es hat die Eigenschaft, dass das Trägheitsmoment in Bezug auf jede andere

durch den Mittelpunkt gehende Axe durch den entsprechenden Radius vector bestimmt wird. Denn es sei dieser R, und die Winkel, welche er mit den drei Hauptaxen bildet, α, β, γ, so ist

$$R = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{1}{\sqrt{A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma}}.$$

Es ist aber nach §. 103 das Trägheitsmoment in Bezug auf diese Axe

$$D = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

folglich wird $R = \frac{1}{\sqrt{D}}$, $D = \frac{1}{R^2}$.

Wir haben im vorigen Paragraphen die Gleichungen der augenblicklichen Drehungsaxe des Körpers gefunden,

(1) $$\frac{u}{p} = \frac{v}{q} = \frac{w}{r},$$ folglich auch ferner gleich

$$\frac{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \frac{\sqrt{Au^2 + Bv^2 + Cw^2}}{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}} = \frac{\sqrt{A^2u^2 + B^2v^2 + C^2w^2}}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}}.$$

Es ist aber wegen der Gleichungen (2) und (3) des vorigen Paragraphen

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2\mathfrak{L},$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2,$$

und ferner

$$p^2 + q^2 + r^2 = \Omega^2,$$
$$u^2 + v^2 + w^2 = R^2,$$
$$A^2u^2 + B^2v^2 + C^2w^2 = \frac{1}{P^2},$$

wenn man, wie vorher, durch Ω die augenblickliche Umdrehungsgeschwindigkeit, ferner durch R den Radius vector des Ellipsoids längs der augenblicklichen Umdrehungsaxe, durch P den senkrechten Abstand des Mittelpunkts von der dem Ellipsoid im Endpunkte der Umdrehungsaxe, oder wie es genannt wird, im Pole der Umdrehung, tangirenden Ebene bezeichnet. Die Gleichungen (1) geben alsdann

(2) $$\frac{R}{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{2\mathfrak{L}}} = \frac{1}{Pk}.$$

Aus diesen Gleichungen geht erstens hervor, dass

(3) $$\Omega = R\sqrt{2\mathfrak{L}},$$

d. h. *die augenblickliche Umdrehungsgeschwindigkeit ist der Länge*

desjenigen Radius vectors des Centralellipsoids proportional, um welche die Umdrehung eben stattfindet.

Bezeichnet man durch λ, μ, ν die Winkel, welche die Normale des Poles der Umdrehung mit den drei Hauptaxen bildet, so ist

$$\cos\lambda = \frac{Au}{\sqrt{A^2u^2 + B^2v^2 + C^2w^2}},\quad \cos\mu = \frac{Bv}{\sqrt{A^2u^2 + B^2v^2 + C^2w^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{Cw}{\sqrt{A^2u^2 + B^2v^2 + C^2w^2}},$$

wo u, v, w den Gleichungen (1) genügen. Hieraus findet man

$$\cos\lambda = \frac{Ap}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}},\quad \cos\mu = \frac{Bq}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{Cr}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}}.$$

Diese Normale fällt mit der Axe des zusammengesetzten Paares der Bewegungsmomente zusammen, denn die Gleichung dieser letztern war nach der Gleichung (5) des vorigen Paragraphen

$$\frac{u}{Ap} = \frac{v}{Bq} = \frac{w}{Cr}.$$

Die dem Centralellipsoid im Pole der Umdrehung tangirende Ebene ist der Ebene des zusammengesetzten Paares der Bewegungsmomente parallel und die augenblickliche Umdrehungsaxe ist dieser Ebene conjugirt.

Der Abstand jener tangirenden Ebene von dem Mittelpunkte des Ellipsoids ist $P = \frac{\sqrt{2\mathfrak{L}}}{k}$, folglich constant, und die tangirende Ebene ist im Raume fest. Construirt man um den Mittelpunkt des Ellipsoids eine Kugel, deren Halbmesser $\frac{\sqrt{2\mathfrak{L}}}{k}$ ist, und denkt sich eine Ebene, welche sich so bewegt, dass sie auf einmal diese Kugel und das Centralellipsoid berührt, so wird der Berührungspunkt mit dem Ellipsoid nach und nach die von dem Pole der Umdrehung beschriebene Linie durchlaufen. Diese auf der Oberfläche des Centralellipsoids gezeichnete Curve wird die relative Poloide der

Umdrehungsbewegung genannt. Während der Pol der Umdrehung auf der Oberfläche des Ellipsoids diese Linie beschreibt, wird er auf der im Raume festen tangirenden Ebene eine zweite Curve beschreiben, welche die absolute Poloide der Umdrehungsbewegung genannt wird. Construirt man durch den festen Mittelpunkt des Ellipsoids und durch die beiden Poloiden zwei Kegelflächen, wovon die erste im Körper [Gleichung (4) §. 114], die zweite im Raume fest ist, so wird die augenblickliche Umdrehungsaxe immer beiden Kegeln gemeinschaftlich sein, und weil die Umdrehungsaxe nur mit einer endlichen Geschwindigkeit ihre Lage ändert, werden die beiden Kegel einander in der Umdrehungsaxe berühren. *Die Bewegung des Körpers kann folglich durch die Bewegung der im Körper festen Kegel dargestellt werden, welche auf den im Raume festen Kegeln rollen, ohne zu gleiten.*

Die Gleichung der Ebene des zusammengesetzten Paares der Bewegungsmomente ist $Apu + Bqv + Crw = o$. Sucht man jetzt den Flächeninhalt der Ellipse, welche durch den Durchschnitt dieser Ebene mit dem Centralellipsoid, dessen Gleichung $Au^2 + Bv^2 + Cw^2 = 1$ ist, gebildet wird, so findet man diesen, wie aus der analitischen Geometrie bekannt ist, gleich

$$\frac{\pi\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}}{\sqrt{ABC}\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}},$$

oder gleich

$$\frac{\pi k}{\sqrt{2ABC\mathfrak{L}}}.$$

Die Fläche dieser Ellipse, deren Form während der Bewegung immer geändert wird, ist constant.

Construirt man auf den drei Hauptaxen ein zweites Ellipsoid, dessen Halbaxen den Quadratwurzeln der Trägheitsmomente gleich sind, so wird die Gleichung dieses zweiten Ellipsoids

$$\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C} = 1.$$

Sucht man den Durchschnittspunkt dieses Ellipsoids mit der Axe des zusammengesetzten Paares der Bewegungsmomente, deren Glei-

chung nach dem vorigen Paragraphen $\frac{u}{Ap} = \frac{v}{Bq} = \frac{w}{Cr}$ war, so findet man aus diesen Gleichungen

$$u^2 = \frac{A^2 p^2}{2\mathfrak{L}}, \quad v^2 = \frac{B^2 q^2}{2\mathfrak{L}}, \quad w^2 = \frac{C^2 r^2}{2\mathfrak{L}},$$

folglich

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{k}{2\mathfrak{L}}.$$

Dieser Durchschnittspunkt wird während der Bewegung des Körpers im Raume fest sein. Die Axe des zusammengesetzten Paares der Bewegungsmomente wird im Körper eine Kegelfläche beschreiben, welche durch die Durchschnittslinie jenes Ellipsoids und einer concentrischen Kugelfläche, deren Halbmesser $\frac{k}{\sqrt{2\mathfrak{L}}}$ ist, bestimmt wird. Die Gleichung dieser Kegelfläche ist schon im vorigen Paragraphen gefunden (6).

Aus den Gleichungen (1) folgt, wenn man sie der Reihe nach mit BCp, CAq, ABr multiplicirt und die Producte addirt,

$$ABC(pd_t p + qd_t q + rd_t r) + (A - B)(A - C)(B - C)pqr = o.$$

Es ist aber (§. 110) $\Omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$, wenn durch Ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit bezeichnet wird. Die obige Gleichung wird alsdann

$$(4) \qquad ABC\Omega d_t \Omega = (A - B) = (A - B)(B - C)(C - A)pqr.$$

Wenn die Hauptaxen in Bezug auf zwei der Hauptaxen gleich sind, $A = B$ oder $B = C$, so wird $d_t \Omega = o$ oder Ω constant. Dasselbe ist der Fall, wenn die augenblickliche Drehungsaxe mit einer der Hauptaxen zusammenfällt, weil alsdann zwei der Grössen p, q, r gleich Null sind.

§. 116.

Wir haben im vorigen Paragraphen angenommen, die Momente der gegebenen Kräfte seien alle gleich Null. Wir werden jetzt die allgemeinen Gleichungen des §. 113 auf die Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt anwenden. Es ist alsdann, wenn man die z Axe vertical und positiv nach unten annimmt,

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = gdm, \quad L = -g\int ydm, \quad M = g\int xdm, \quad N = o,$$

oder, wenn man die Werthe von x, y, z aus den Gleichungen (2) des §. 110 substituirt,

$$L = -g\int[u\cos(uy) + v\cos(vy) + w\cos(wy)]\,dm,$$
$$M = g\int[u\cos(ux) + v\cos(vx) + w\cos(wx)]\,dm.$$

Bezeichnet man jetzt durch u', v', w' die constanten Coordinaten des Schwerpunkts nach den Hauptaxen u, v, w gerechnet, so wird

$$L = -gm[u'\cos(uy) + v'\cos(vy) + w'\cos(wy)],$$
$$M = gm[u'\cos(ux) + v'\cos(vx) + w'\cos(wx)].$$

Berücksichtigt man jetzt die Gleichungen

$$\cos(uz) = \cos(wy)\cos(vx) - \cos(vy)\cos(wx),$$
$$\cos(vz) = \cos(uy)\cos(wx) - \cos(wy)\cos(ux),$$
$$\cos(wz) = \cos(vy)\cos(ux) - \cos(uy)\cos(vx),$$

so erhält man

$$L\cos(ux) + M\cos(uy) + N\cos(uz) = gm[w'\cos(vz) - v'\cos(wz)],$$
$$L\cos(vx) + M\cos(vy) + N\cos(vz) = gm[u'\cos(wz) - w'\cos(uz)],$$
$$L\cos(wx) + M\cos(wy) + N\cos(wz) = gm[v'\cos(uz) - u'\cos(vz)].$$

Die Gleichungen (2) des §. 113 geben

$$Ad_tp + (B - C)qr = gm[w'\cos(vz) - v'\cos(wz),$$
$$Bd_tq + (C - A)rp = gm[u'\cos(wz) - w'\cos(uz),$$
$$Cd_tr + (A - B)pq = gm[v'\cos(uz) - u'\cos(vz).$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit p, q, r und addirt, so erhält man

$$Apd_tp + Bqd_tq + Crd_tr = gm\{u'[q\cos(wz) - r\cos(vz)]$$
$$+ v'[r\cos(wz) - p\cos(wz)] + w'[p\cos(vz) - q\cos(uz)]\},$$

oder, wenn man die im §. 111 entwickelten Werthe von $d_t\cos(uz)$, $d_t\cos(vz)$, $d_t\cos(wz)$ substituirt,

$$Apd_tp + Bqd_tq + Crd_tr = gm[u'd_t\cos(uz) + v'd_t\cos(vz) + w'd_t\cos(wz)],$$

und folglich durch Integration

$$\tfrac{1}{2}[Ap^2 + Bq^2 + Cr^2] = gm[u'\cos(uz) + v'\cos(vz) + w'\cos(wz)] + \text{Const.}$$
$$= gm(z' - z_0),$$

wenn z' und z_0 die verticalen Coordinaten des Schwerpunkts am Ende und Anfang des gegebenen Zeitpunkts bezeichnen. Diese Gleichung lehrt, dass die lebendige Kraft des Körpers gleich dem Pro-

duct der Masse des Körpers in der vom Schwerpunkte durchfallenen verticalen Höhe ist.

§. 117.

Hat der Körper eine feste Axe, so ist die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts nur eine, und mithin wird auch die Bewegung des Körpers vollständig durch eine Gleichung, derjenigen der lebendigen Kraft, dargestellt. Nimmt man die z Axe als Umdrehungsaxe an und bezeichnet durch ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, durch $k^2 m$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die Umdrehungsaxe, so ist (§. 101) $\frac{\omega^2}{2} \cdot k^2 m$ die lebendige Kraft des Körpers. Bezeichnet man ferner durch ω_0 die anfängliche Umdrehungsgeschwindigkeit, d. h. wenn $t = o$, und bemerkt, dass $d_t z = o$, so wird die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2} \cdot k^2 m = \int_0^t (X d_t x + Y d_t y) dt.$$

Es ist aber $d_t x = -y . \omega$, $d_t y = x . \omega$, und das Differential der obigen Gleichung wird daher

$$k^2 m d_t \omega = \Sigma (Yx - Xy).$$

§. 118.

Nach §. 87 wird bei jedem beweglichen Körper der Druck oder die Spannung in jedem Punkte auf dieselbe Weise berechnet, wie bei einem im Gleichgewicht ruhenden Körper, wenn man statt der gegebenen Kräfte des Systems die verlorenen Kräfte substituirt, welche letzteren nach dem d'Alembertschen Princip während der Bewegung im Gleichgewicht sind. Im §. 25 ist der Druck auf zwei befestigte Punkte eines festen Körpers entwickelt, wenn derselbe sich im Gleichgewicht befindet. Bezeichnet man jetzt durch z_1 und z_2 die Ordinaten der beiden befestigten Punkte der z Axe, welche, wenn die ganze Axe fest ist, beliebig irgendwo in ihr angenommen werden können, und bezeichnet man den nach den x und y Axen zerlegten Druck in jedem dieser Punkte durch $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_2$, so findet man nach §. 25, wenn man statt der gegebenen Kräfte X, Y, Z,

die verlorenen Kräfte $X - d_t^2 x \, . \, dm$, $Y - d_t^2 y . dm$, Z setzt und bemerkt, dass hier $d_t z = o$ und $d_t^2 z = o$,

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{\Sigma(Zx - Xz) + \int z d_t^2 x \, dm + z_2 \Sigma X - z_2 \int d_t^2 x \, dm}{z_2 - z_1},$$

$$\mathfrak{X}_2 = \frac{\Sigma(Zx - Xz) + \int z d_t^2 x \, dm + z_1 \Sigma X - z_1 \int d_t^2 x \, dm}{z_1 - z_2},$$

$$\mathfrak{Y}_1 = \frac{\Sigma(Yz - Zy) - \int z d_t^2 y \, dm - z_2 \Sigma Y + z_2 \int d_t^2 y \, dm}{z_1 - z_2},$$

$$\mathfrak{Y}_2 = \frac{\Sigma(Yz - Zy) - \int z d_t^2 y \, dm - z_2 \Sigma Y + z_2 \int d_t^2 y \, dm}{z_2 - z_1}.$$

Der Druck längs der Axe wird

$$\mathfrak{Z} = \Sigma Z.$$

Wenn man durch r den senkrechten Abstand eines Punktes (x, y, z) von der z Axe bezeichnet, also $r^2 = x^2 + y^2$, und durch φ den Winkel, welchen diese Linie mit der xz Ebene bildet, so wird

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$d_t^2 x = - r \cos \varphi (d_t \varphi)^2 - r \sin \varphi d_t^2 \varphi,$$

$$d_t^2 y = - r \sin \varphi (d_t \varphi)^2 + r \cos \varphi d_t^2 \varphi,$$

oder

$$d_t^2 x = - x (d_t \varphi)^2 - y d_t^2 \varphi, \quad d_t^2 y = - y (d_t \varphi)^2 + x d_t^2 \varphi,$$

Es ist aber nun $\omega = d_t \varphi$, $d_t \omega = d_t^2 \varphi$, und die obigen Gleichungen werden daher

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{\Sigma(Zx - Xz) + z_2 \Sigma X - \omega^2 [\int xz dm - z_2 \int x dm] - d_t \omega [\int yz dm - z_2 \int y dm]}{z_2 - z_1},$$

$$\mathfrak{X}_2 = \frac{\Sigma(Zx - Xz) + z_1 \Sigma X - \omega^2 [\int xz dm - z_1 \int x dm] - d_t \omega [\int yz dm - z_1 \int y dm]}{z_1 - z_2},$$

$$\mathfrak{Y}_1 = \frac{\Sigma(Yz - Zy) - z_2 \Sigma Y + \omega^2 [\int yz dm - z_2 \int y dm] - d_t \omega [\int xz dm - z_2 \int x dm]}{z_1 - z_2},$$

$$\mathfrak{Y}_2 = \frac{\Sigma(Yz - Zy) - z_1 \Sigma Y + \omega^2 [\int yz dm - z_1 \int y dm] - d_t \omega [\int xz dm - z_1 \int x dm]}{z_2 - z_1},$$

$$\mathfrak{Z} = \Sigma Z.$$

Wirken auf den Punkt keine beschleunigenden Kräfte, so dass für jeden Punkt $X = o$, $Y = o$, $Z = o$, so wird nach dem vorigen Paragraphen $\omega = \omega_o$ constant; alsdann erhält man

$$\mathfrak{X}_1 = -\frac{\omega^2[\int xzdm - z_2\int xdm]}{z_2 - z_1},$$
$$\mathfrak{X}_2 = -\frac{\omega_2[\int xzdm - z_1\int xdm]}{z_1 - z_2},$$
$$\mathfrak{Y}_1 = \frac{\omega^2[\int yzdm - z_2\int ydm]}{z_1 - z_2},$$
$$\mathfrak{Y}_2 = \frac{\omega^2[\int yzdm - z_1\int ydm]}{z_2 - z_1},$$
$$\mathfrak{Z} = o.$$

Nimmt man einen der festen Punkte der Umdrehungsaxe, z. B. den Punkt z_1, als Anfangspunkt der Coordinaten an, so wird $z_1 = o$. Wenn nun die z Axe, welche als Umdrehungsaxe angenommen ist, eine durch diesen Punkt gehende Hauptaxe ist, so ist nach §. 104 $\int yzdm = o$, $\int xzdm = o$, folglich

$$\mathfrak{X}_1 = \omega^2\int xdm,\ \mathfrak{Y}_1 = \omega^2\int ydm,\ \mathfrak{X}_2 = o,\ \mathfrak{Y}_2 = o,$$

d. h. es leidet der zweite beliebig in der Hauptaxe gewählte Punkt keinen Druck. Wenn daher die Umdrehungsaxe eine durch einen gegebenen Punkt gehende Hauptaxe ist und auf den Körper keine beschleunigenden Kräfte wirken, so können, mit Ausnahme dieses Punktes, alle übrigen Punkte der Hauptaxe frei beweglich gemacht werden, weil sie nur in jenem Punkt einen Druck erleiden. Dies stimmt auch mit dem §. 114 überein. Ist dieser Punkt der Schwerpunkt des Körpers, so ist ferner $\int xdm = o$, $\int ydm = o$, folglich auch $\mathfrak{X}_1 = o$, $\mathfrak{Y}_1 = o$, und die Axe braucht alsdann gar nicht befestigt zu sein.

§. 119.

Wenn die verschiedenen Theile einer Maschine immer dasselbe Verhältniss der Geschwindigkeit während der Bewegung beibehalten, so dass, wenn die Geschwindigkeit eines Punktes v ist, die jedes anderen durch av dargestellt wird, wo a ein von der Zeit unabhängiger Coëfficient ist, so wird die lebendige Kraft $\frac{v^2}{2g}\Sigma pa^2$ werden, und die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\Sigma\int_0^t Tds - \Sigma\int_0^t T'ds' = \frac{v^2 - v_0^2}{2g}\Sigma pa^2.$$

Die Grössen $\Sigma\int_0^t Tds$ und $\Sigma\int_0^t T'ds'$ bezeichnen die dynamische Arbeit der bewegenden und widerstehenden Kräfte. Wenn diese gleich zunehmen oder abnehmen, so würde die Geschwindigkeit v eines Punktes und daher auch die Geschwindigkeit av jedes Punktes der Maschine während der Bewegung unverändert bleiben. Verändern sich aber jene dynamischen Arbeiten nicht gleich, so wird v nicht constant werden; wir können aber alsdann dadurch, dass wir Σpa^2 einen passenden Werth beilegen, erreichen, dass die Variationen von v immer zwischen zwei gegebenen Grenzen, $v_0 + \frac{v_0}{n}$ und $v_0 - \frac{v_0}{n}$, fallen. Bezeichnet man nämlich durch $\pm D$ die grösste Differenz, welche zwischen der dynamischen Arbeit der bewegenden Kräfte, $\int_0^t Tds$, und derjenigen der widerstehenden Kräfte, $\int_0^t T'ds'$, stattfinden kann, so muss Σpa^2 so bestimmt werden, dass

$$\pm D = \frac{1}{2g}\left[\left(v_0 \pm \frac{v_0}{n}\right)^2 - v_0^2\right]\Sigma pa^2,$$

oder

$$\pm D = \frac{v_0^2}{2g}\left(\pm\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\Sigma pa^2,$$

folglich

$$\Sigma pa^2 = \pm\frac{2gD}{v_0^2\left(\pm\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)},$$

oder, wenn n sehr klein ist,

$$\Sigma pa^2 = \frac{gnD}{v_0^2}.$$

Um diesen Werth von Σpa^2 zu erreichen, fügt man zu einem Theil der Maschine ein S c h w u n g r a d, d. h. einen Körper, welcher um eine feste Axe sich bewegt, und mittelst welches der Werth von Σpa^2 gehörig vergrössert wird. Um diesen Werth gross genug durch ein möglichst kleines Schwungrad zu erhalten, befestigt man es wo möglich auf den Theil der Maschine, welcher die grösste Umdrehungsgeschwindigkeit hat.

Ist die Maschine so eingerichtet, dass die Geschwindigkeit etlicher Theile nicht ein constantes Verhältniss zu der Geschwindigkeit der übrigen Theile behält, so kann man bei diesen letzten Theilen durch Hinzufügen eines Schwungrades eine Geschwindigkeit erreichen, welche nur zwischen gewissen engen Grenzen variiren kann. Wenn man von der grössten Differenz zwischen den dynamischen Arbeiten der bewegenden und widerstehenden Kräfte den kleinsten Werth der lebendigen Kraft des ersten Theiles des Systems subtrahirt, wird diese Differenz dann in die obige Formel statt D zu setzen sein.

§. 120.

Wir werden jetzt, als Beispiel der hier entwickelten allgemeinen Formeln, den Fall betrachten, wenn die gegebenen Kräfte diejenigen der Schwere sind und der Körper nur um eine horizontal befestigte Axe drehbar ist. Dies ist der Fall des gewöhnlichen physischen Pendels im leeren Raume. Es ist alsdann, wenn fortwährend die z Axe als Umdrehungsaxe, folglich horizontal, die x Axe vertical und die y Axe horizontal und auf beiden senkrecht angenommen werden,

$$X = g dm, \quad Y = o, \quad Z = o.$$

Die Gleichung der Bewegung wird nun nach §. 117

$$g\int_0^t\int d_t x dm dt = \frac{\omega^2 - \omega^2}{2} k^2 m,$$

wo ω_0 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Es ist aber, wenn durch ξ die Ordinate des Schwerpunkts, durch ξ_0 dessen Anfangswerth bezeichnet wird,

$$\int d_t x dm = d_t\int x dm = m d_t\xi, \quad \int_0^t\int d_t x dm = m(\xi - \xi_0).$$

Bezeichnet man durch a den Abstand des Schwerpunkts von der Umdrehungsaxe, durch φ den Winkel, welchen diese Linie a mit der verticalen x Axe bildet, durch α dessen Anfangswerth, so ist

$$\xi = a\cos\varphi, \quad \xi_0 = a\cos\alpha, \quad \omega = - d_t\varphi,$$

und man erhält alsdann die folgende Gleichung der Bewegung eines physischen Pendels im leeren Raume

$$\mathrm{gma}(\cos\varphi - \cos\alpha) = \frac{k^2 m}{2}[(d_t\varphi)^2 - \omega_0^2],$$

und hieraus

$$\omega^2 = (d_t\varphi)^2 = \omega_0^2 + \frac{2ag}{k^2}(\cos\varphi - \cos\alpha),$$

$$t = -\int_\alpha^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\omega_0^2 + \frac{2ag}{k^2}(\cos\varphi - \cos\alpha)}}.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass wenn $\varphi = \alpha$, auch $\omega = \omega_0$, d. h. die Bewegung im aufsteigenden Theil der Bahn ist der im absteigenden vollkommen gleich.

Setzt man hier

$$\varphi = 2\vartheta, \quad \frac{4ag}{\omega_0^2 k^2 + 2ag(1-\cos\alpha)} = c^2,$$

so erhält man

$$t = -\frac{ck}{\sqrt{ag}}\int_{\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\vartheta}}.$$

Weil φ immer gleich oder kleiner als α, folglich $\frac{1}{2}\varphi =$ oder $< \vartheta$ ist, so wird immer $c\sin\vartheta =$ oder < 1. Sollte jetzt $c > 1$ sein, so setze man

$$1 - c^2\sin^2\vartheta = \cos^2\psi, \quad c\sin\vartheta = \sin\psi, \quad d\vartheta = \frac{\frac{1}{c}\cos\psi d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{c}\right)^2\sin^2\psi}},$$

und man erhält dann

$$t = -\frac{k}{\sqrt{ag}}\int_\gamma^\beta \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{c}\right)^2\sin^2\psi}},$$

wo

$$\sin\beta = c\sin\tfrac{1}{2}\varphi, \quad \sin\gamma = c\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Benutzt man hier die üblichen Bezeichnungen der elliptischen Integrale, nämlich

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}} = \mathrm{dig.}(c, \varphi),$$

so wird, wenn $c < 1$,

$$(1) \qquad t = \frac{ck}{\sqrt{ag}}[\mathrm{dig.}(c, \tfrac{1}{2}\alpha) - \mathrm{dig.}(c, \tfrac{1}{2}\varphi)],$$

wenn $c > 1$,

$$(1)\quad t = \frac{k}{\sqrt{ag}}\Big[\text{dig.}\Big(\frac{1}{c},\ \text{arc.}(\sin = c \sin \tfrac{1}{2}\alpha)\Big) - \text{dig.}\Big(\frac{1}{c},\ \text{arc.}(\sin = c \sin \tfrac{1}{2}\varphi)\Big)\Big].$$

Aus diesen Gleichungen findet man auch umgekehrt, wenn $c < 1$,

$$(2)\quad \varphi = 2\,\text{ampl.}\Big(\text{dig.}(c, \tfrac{1}{2}\alpha) - \frac{\sqrt{ag}}{ck}t\Big),$$

und wenn $c > 1$

$$(2)\quad c \sin \tfrac{1}{2}\varphi = \sin.\ \text{ampl.}\Big[\text{dig.}\Big(\frac{1}{c},\ \text{arc.}(\sin = c \sin \tfrac{1}{2}\alpha)\Big) - \frac{\sqrt{ag}}{k}t\Big].$$

§. 121.

Wenn die anfängliche Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = o$ ist, so wird

$$c^2 = \frac{2}{1 - \cos \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha},\quad c = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\alpha}.$$

Es wird alsdann immer $c > 1$, und die Formeln des vorigen Paragraphen werden

$$t = \frac{k}{\sqrt{ag}}\Big\{\text{dig.}\Big[\sin \tfrac{1}{2}\alpha,\ \frac{\pi}{2}\Big] - \text{dig.}\Big[\sin \tfrac{1}{2}\alpha,\ \text{arc.}\Big(\sin = \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\alpha}\Big)\Big]\Big\},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = \sin\ \text{ampl.}\Big[\text{dig.}\Big(\sin \tfrac{1}{2}\alpha,\ \frac{\pi}{2}\Big) - \frac{\sqrt{ag}}{k}t\Big],$$

oder, wenn man das vollständige Digamma $\text{dig.}\Big(\sin \frac{1}{2}\alpha, \frac{\pi}{2}\Big)$ durch $D(\sin \frac{1}{2}\alpha)$ bezeichnet,

$$(1)\quad t = \frac{k}{\sqrt{ag}}\Big\{D(\sin \tfrac{1}{2}\alpha) - \text{dig.}\Big[\sin \tfrac{1}{2}\alpha,\ \text{arc.}\Big(\sin = \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\alpha}\Big)\Big]\Big\},$$

$$(2)\quad \sin \tfrac{1}{2}\varphi = \sin \tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \sin.\ \text{ampl.}\Big(D(\sin \tfrac{1}{2}\alpha) - \frac{\sqrt{ag}}{k}t\Big) = \sin \tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \sin.\ \text{coampl.}\Big(\frac{\sqrt{ag}}{k}t\Big).$$

Die elliptischen Integrale $D(\sin \frac{1}{2}\alpha)$ und $\text{dig.}\Big[\sin \frac{1}{2}\alpha, \text{arc.}\Big(\sin = \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\alpha}\Big)\Big]$, so wie die elliptische Transcendente $\sin.\ \text{coampl.}\Big(\frac{\sqrt{ag}}{k}t\Big)$ lassen sich bekanntlich in sehr schnell convergirenden Reihen entwickeln.

Aus der Gleichung $\omega^2 = \frac{2ag}{k^2}(\cos \varphi - \cos \alpha)$ geht hervor, dass

ω nur Null wird, wenn $\varphi = \alpha$ oder $-\alpha$. Der Pendel wird den Winkel α auf jeder Seite der verticalen Stellung abwechselnd durchlaufen. Bezeichnet man durch T die ganze Zeit einer Schwingung, so erhält man diese aus der Gleichung (1), indem man $\varphi = -\alpha$ setzt. Es wird alsdann

$$(3) \qquad T = \frac{2k}{\sqrt{ag}} D(\sin \tfrac{1}{2}\alpha).$$

Es ist jetzt (Verhulst Fonctions elliptiques pag. 122)

$$D(c) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 c^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 c^6 + \cdots\right],$$

und es wird nun

$$(4) \quad T = \frac{\pi k}{\sqrt{ag}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\alpha + \left(\frac{1.3.5}{2.4.5}\right)^2 \sin^6 \tfrac{1}{2}\alpha + \cdots\right].$$

Man kann viele noch rascher convergirende Reihen für $D(\sin \frac{1}{2}\alpha)$ aufstellen. Setzt man z. B.

$$\tan^2 \tfrac{1}{4}\alpha = \sin\beta, \quad \tan^2 \tfrac{1}{2}\beta = \sin\beta', \quad \tan^2 \tfrac{1}{2}\beta' = \sin\beta'' \text{ u. s. w.}$$

so ist (Verhulst pag. 152)

$$D(\sin \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{\pi}{2}(1 + \sin\beta)(1 + \sin\beta')(1 + \sin\beta'') \cdots\cdot$$

$$(5) \qquad T = \frac{\pi k}{\sqrt{ag}}(1 + \sin\beta)(1 + \sin\beta')(1 + \sin\beta'') \cdots\cdot$$

Wenn nicht α sehr nahe an π ist, nehmen die Winkel β, β', β'' ausserordentlich schnell ab. Ist α sehr nahe an π, so braucht man bequemer die folgenden Formeln. Man setze

$$\cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sin\gamma, \quad \tan^2 \tfrac{1}{2}\gamma = \sin\gamma', \quad \tan^2 \tfrac{1}{2}\gamma' = \sin\gamma'' \text{ u. s. w.},$$

so wird (Verhulst pag. 159)

$$D(\sin \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\alpha}\sqrt{\cos\gamma \cos\gamma' \cos\gamma'' \cdots\cdot}\ \frac{\log \text{nat}\left(\frac{4}{\sin\gamma^{(n)}}\right)}{2^n},$$

$$(6) \quad T = \frac{2k}{\sqrt{ag}\,\sin \frac{1}{2}\alpha}\sqrt{\cos\gamma \cos\gamma' \cos\gamma'' \cdots\cdot}\ \frac{\log \text{nat}\left(\frac{4}{\sin\gamma^{(n)}}\right)}{2^n}.$$

Wenn $\pi - \alpha$ so klein ist, dass man $\cos^2 \frac{1}{2}\alpha$ in Bezug auf 4 vernachlässigen kann, so wird

$$D(\sin \tfrac{1}{2}\alpha) = \log \text{nat}\left(\frac{4}{\cos \frac{1}{2}\alpha}\right), \text{ und}$$

(7) $$T = \frac{2k}{\sqrt{ag}} \log \text{nat}\left(\frac{4}{\cos \frac{1}{2}\alpha}\right).$$

Setzt man

$$q(\mu) = e^{-\frac{\pi D(\cos \mu)}{D(\sin \mu)}},$$

so findet man bei Verhulst eine den verschiedenen Werthen von μ entsprechende Tafel von $q(\mu)$. Durch Hülfe dieser Tafel hat man (Verhulst pag. 256)

$$D(\sin \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{2\pi[1 + 4q(\frac{1}{2}\alpha)^{16} + 4q(\frac{1}{2}\alpha)^{64} + \ldots]}{\left(\frac{1 + \sqrt{\cos \frac{1}{2}\alpha}}{2} + \sqrt[4]{\frac{(1 + \cos \frac{1}{2}\alpha)\sqrt{\cos \frac{1}{2}\alpha}}{2}}\right)^2}.$$

Die Grösse $q(\frac{1}{2}\alpha)$ ist immer sehr klein, wenn α nicht $\frac{\pi}{2}$ übersteigt. Man hat alsdann $q^{16} < \frac{1}{10^{22}}$. Für $\alpha = 126°$ hat man $q^{16} < \frac{1}{10^{15}}$, und kann daher unbedenklich setzen

(8) $$T = \frac{4\pi k}{\sqrt{ag}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1 + \sqrt{\cos \frac{1}{2}\alpha}}{2} + \sqrt[4]{\frac{(1 + \cos \frac{1}{2}\alpha)\sqrt{\cos \frac{1}{2}\alpha}}{2}}\right)^2}.$$

Wenn α 126° übersteigt, kann man die folgende Formel gebrauchen (Verhulst pag. 257),

$$D(\sin \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{D(\cos \frac{1}{2}\alpha)}{\pi} \log \text{nat} \frac{1}{q\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)}(1 + \ldots),$$

wo die vernachlässigte Reihe kleiner als $\frac{1}{10^{17}}$ ist. Es ist alsdann

(9) $$T = \frac{4\pi k}{\sqrt{ag}} \log \text{nat}\left(\frac{1}{q\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)}\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{1 + \sqrt{\sin \frac{1}{2}\alpha}}{2} + \sqrt[4]{\frac{(1 + \sin \frac{1}{2}\alpha)\sqrt{\sin \frac{1}{2}\alpha}}{2}}\right)^2}.$$

Wenn $\alpha = o$, so wird $D(\sin \frac{1}{2}\alpha) = \frac{\pi}{2}$, und

(10) $$T = \frac{\pi k}{\sqrt{ag}}$$

wird die Zeit einer verschwindenden Oscillation sein.

§. 122.

Denkt man sich einen schweren Punkt an einem Faden, dessen Masse Null wäre, aufgehängt, so wird dieses ein mathematischer Pendel genannt. Bezeichnet man durch r seine Länge, so ist hier $k = a = r$, folglich die Zeit einer Schwingung $T = \frac{4D\sqrt{r}}{B\sqrt{2g}}$. Hätte man $\sqrt{r} = \frac{k}{\sqrt{a}}$, $r = \frac{k^2}{a}$, so würden die Schwingungen des mathematischen Pendels mit denjenigen des physischen vollkommen übereinstimmen. Die Länge $r = \frac{k^2}{a}$ wird daher die Länge des physischen Pendels genannt.

Denkt man sich in der durch die Umdrehungsaxe und den Schwerpunkt gehenden Ebene und in dem Abstand r von der Umdrehungsaxe eine mit dieser Axe parallele Linie, so werden alle Punkte dieser Linie dieselbe Bewegung annehmen, als wären sie nur mit der Axe, nicht mit den übrigen Punkten verbunden. Der Punkt, wo jene Gerade die vom Schwerpunkt senkrecht auf die Umdrehungsaxe gezogene Linie schneidet, wird der Schwingungspunkt des Pendels genannt. Kehrt man den Pendel um, lässt ihn um jene durch den Schwingungspunkt gehende Linie schwingen, so wird, wenn $k'^2 m$ und a' die neuen Werthe des Trägheitsmomentes und des Abstandes des Schwerpunkts bezeichnen,

$$a' = r - a, \quad k'^2 = k^2 + (r - a)^2 - a^2 = r^2 - ar,$$

folglich $\frac{k'^2}{a'} = r$, d. h. der Pendel wird in dieser umgekehrten Stellung genau ebenso schwingen wie früher. Hat man umgekehrt gefunden, dass ein Pendel um zwei parallele Axen, in deren Ebenen der Schwerpunkt liegt und welche verschiedene Abstände vom Schwerpunkte haben, gleiche Schwingungen macht, so ist der Abstand dieser Axen der Länge des Pendels gleich. Es ist alsdann $\frac{k'^2}{a'} = \frac{k^2}{a}$. Da aber immer, wenn man durch S das Trägheitsmoment in Bezug

auf eine durch den Schwerpunkt mit jener Axe parallele Axe bezeichnet, $k^2 m = S + a^2 m$, $k'^2 = S + a'^2 m$, folglich $k'^2 = k^2 = a'^2 - a^2$ und $\frac{a' - a}{a} \cdot k^2 = a'^2 - a^2$ ist, weil angenommen, dass nicht $a' = a$, $\frac{k^2}{a} = a' + a = r$. Ein solcher Pendel wird ein Reversionspendel genannt.

Man nennt die Länge des Secundenpendels die Länge des mathematischen Pendels, welcher in einer Secunde Mittelzeit eine Schwingung, deren Bogen unendlich klein ist, vollendet. Bezeichnet man diesen durch l, so hat man

$$1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad g = \pi^2 l.$$

§. 123.

Wenn der Pendel sich in der Luft bewegt, so muss noch der Widerstand der Luft unter die gegebenen Kräfte gezählt werden. Wir werden diesen Widerstand auf eine Flächeneinheit durch $F(v)$ bezeichnen, wo v die senkrecht gegen die Fläche stattfindende Geschwindigkeit ist. Bezeichnet man durch $d\sigma$ ein Element der Oberfläche, durch δ den Winkel, welchen die Normale des Elementes $d\sigma$ mit der Richtung der Bewegung bildet, und durch ϱ den Abstand von der Umdrehungsaxe, so ist $\varrho\omega \cos\delta$ die Componente der Geschwindigkeit längs der Normale des Flächenelementes und folglich $F(\varrho\omega \cos\delta) d\sigma$ der Widerstand der Luft gegen die Bewegung des Flächenelementes. Die Componente dieses Widerstandes längs der Richtung der Bewegung, oder die Tension des Luftwiderstandes wird $F(\varrho\omega \cos\delta) \cos\delta \, d\sigma$ und seine elementäre dynamische Arbeit folglich $-F(\varrho\omega \cos\delta) \cos\delta \, d\sigma \, \varrho\omega dt$. Die dynamische Arbeit des ganzen Luftwiderstandes wird $-\int_0^t \int F(\varrho\omega \cos\delta) \varrho\omega \cos\delta \, d\sigma dt$, wo die Integration in Bezug auf σ auf den ganzen Theil der Oberfläche, welcher dem Luftwiderstande ausgesetzt wird, auszudehnen ist. Die Gleichung der lebendigen Kraft wird

$$\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2}k^2 m = agm(\cos\varphi-\cos\alpha)-\int_0^t\omega[\int F(\varrho\omega\cos\delta)\varrho\cos\delta\, d\sigma]dt.$$

Bei einem einfachen Pendel, dessen Länge r ist, hat man

$$\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2}r^2 m = rgm(\cos\varphi-\cos\alpha)-\int_0^t\omega f(r\omega)rdt.$$

Soll jetzt bei demselben Werth von ω_0 und α die Bewegung beider Pendel immer zusammenfallen, so muss

$$r=\frac{k^2}{a},\quad f(r\omega)=\frac{1}{a}\int F(\varrho\omega\cos\delta)\varrho\cos\delta\, d\sigma$$

sein. Welches auch die Gestalt des Pendels sein mag, und welches auch das Gesetz des Luftwiderstandes ist, so giebt es doch immer nur einen mathematischen Pendel, dessen Bewegung, wenn ein angemessener Widerstand angenommen wird, mit derjenigen des physischen Pendels zusammenfällt. Die Länge dieses einfachen Pendels ist nur von der Form des physischen Pendels, nicht von dem Luftwiderstande abhängig.

§. 124.

Wir werden annehmen, der Luftwiderstand sei in einer Reihe, nach den Potenzen der Geschwindigkeit geordnet, entwickelt, so dass

$$\int F(\varrho\omega\cos\delta)\varrho\cos\delta\, d\sigma = m(P\omega+Q\omega^2+R\omega^3+\ldots),$$

folglich wird die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2}k^2 = ag(\cos\varphi-\cos\alpha)-P\int_0^t\omega^2 dt-Q\int_0^t\omega^3 dt-R\int_0^t\omega^4 dt-\cdots$$

Die Differentialgleichung der Bewegung wird nun

$$k^2\omega d_t\omega = -ag\sin\varphi\, d_t\varphi-P\omega^2-2Q\omega^3-3R\omega^4-\ldots$$

oder, weil $\omega=-d_t\varphi$,

$$(1)\quad k^2 d_t^2\varphi+ag\sin\varphi+Pd_t\varphi+Q(d_t\varphi)^2+R(d_t\varphi)^3+\cdots=o.$$

Aus dieser Differentialgleichung soll jetzt φ durch t, α und ω_0 ausgedrückt gefunden werden. Wir werden nur den Fall betrachten, dass $\omega_0=o$, und alsdann φ in einer Reihe nach den Potenzen von α entwickelt annehmen, folglich

$$(2)\quad \varphi=\varphi_1\alpha+\varphi_2\alpha^2+\varphi_3\alpha^3+\cdots,$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ Functionen von t sind. Man hat alsdann

$$\begin{aligned}
d_t\varphi &= \alpha d_t\varphi_1 + \alpha^2 d_t\varphi_2 + \alpha^3 d_t\varphi_3 + \cdots,\\
(d_t\varphi)^2 &= \alpha^2 d_t\varphi_1^2 + 2\alpha^3 d_t\varphi_1 d_t\varphi_2 + \cdots,\\
(d_t\varphi)^3 &= \alpha^3(d_t\varphi_1)^3 + \cdots,\\
d_t^2\varphi &= \alpha d_t^2\varphi_1 + \alpha^2 d_t^2\varphi_2 + \alpha^3 d_t^2\varphi_3 + \cdots,\\
\sin\varphi &= \varphi - \tfrac{1}{6}\varphi^3 + \cdots\\
&= \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3(\varphi_3 - \tfrac{1}{6}\varphi_1^3) + \cdots
\end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (1), so erhält man eine nach den Potenzen von α geordnete Reihe, welche gleich Null sein soll und deren Coëfficienten daher alle gleich Null sein müssen. Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{ag}{k^2} = b,\ \frac{P}{k^2} = p,\ \frac{Q}{k^2} = q,\ \frac{R}{k^2} = r,$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
&d_t^2\varphi_1 + b\varphi_1 + pd_t\varphi_1 = 0,\\
(3)\quad &d_t^2\varphi_2 + b\varphi_2 + pd_t\varphi_2 + q(d_t\varphi_1)^2 = 0,\\
&d_t^2\varphi_3 + b(\varphi_3 - \tfrac{1}{6}\varphi_1^3) + pd_t\varphi_3 + 2qd_t\varphi_1 d_t\varphi_2 + r(d_t\varphi_1)^3 = 0.
\end{aligned}$$

. .

Aus der ersten dieser Gleichungen wird durch Integration φ_1 gefunden; aus der zweiten, wenn der Werth von φ_1 substituirt ist, wird φ_2 gefunden, u. s. w.

Die erste Differentialgleichung ist

$$(4)\qquad d_t^2\varphi_1 + b\varphi_1 + pd_t\varphi_1 = 0,$$

und die durch die Integration hervorgebrachten Constanten sind so bestimmt, dass, wenn $t = 0$, $d_t\varphi_1 = 0$ und $\varphi_1 = 1$. Jede der folgenden Differentialgleichungen wird

$$(5)\qquad d_t^2\varphi_n + b\varphi_n + pd_t\varphi_n = T_n,$$

wo T_n eine Function von t ist, und die durch die Integration dieser Gleichungen hervorgebrachten Constanten sind so zu bestimmen, dass, wenn $t = 0$, $\varphi_n = 0$ und $d_t\varphi_n = 0$. Setzt man jetzt in diese Differentialgleichungen statt des Zeichens d_t die Grösse s, und statt T Null, so erhält man die Determinante dieser Gleichungen

$s^2 + bs + p = o$. Bezeichnet man die zwei Wurzeln dieser Gleichung durch s_1 und s_2, so ist

$$s_1 = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}, \quad s_2 = -\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\sqrt{-1}.$$

Die allgemeine Form des Integrals der Differentialgleichung (5) ist alsdann

$$\varphi_n = \lambda_1 e^{s_1 t}(C'_n + \int T_n e^{-s_1 t} dt) + \lambda_2 e^{s_2 t}(C''_n + \int T_n e^{-s_2 t} dt),$$

wo λ_1 und λ_2 durch die Gleichungen $\lambda_1 + \lambda_2 = o$, $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 = o$ bestimmt sind (**Moigno**, Calcul intégral pag. 584 u. f.). Man erhält hieraus

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{4b-p^2}\sqrt{-1}}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{4b-p^2}\sqrt{-1}},$$

und folglich

(6)

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{4b-p^2}\sqrt{-1}} \cdot e^{-\frac{pt}{2} + \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2} t\sqrt{-1}} \left(C'_n + \int T_n e^{\frac{pt}{2} - \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2} t\sqrt{-1}} dt\right)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{4b-p^2}\sqrt{-1}} \cdot e^{-\frac{pt}{2} - \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2} t\sqrt{-1}} \left(C''_n + \int T_n e^{\frac{pt}{2} + \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2} t\sqrt{-1}} dt\right).$$

Setzt man $n = 1$ und $T_1 = o$, so findet man

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{4b-p^2}\sqrt{-1}}\left(e^{-\frac{pt}{2} + \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2} t\sqrt{-1}} C'_1 + e^{-\frac{pt}{2} - \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2} t\sqrt{-1}} C''_1\right),$$

$$d_t\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{4b-p^2}\sqrt{-1}}\left[\left(-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\sqrt{-1}\right) e^{-\frac{pt}{2} + \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2} t\sqrt{-1}} C'_1\right.$$

$$\left. + \left(-\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\sqrt{-1}\right) e^{-\frac{pt}{2} - \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2} t\sqrt{-1}} C''_1\right].$$

Es ist jetzt, wenn $t = o$, $\varphi_1 = 1$, $d_t\varphi_1 = o$; folglich wird

$$\sqrt{4b-p^2}\sqrt{-1} = C'_1 + C''_1,$$

$$o = \left(-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\sqrt{-1}\right)C'_1 + \left(-\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\sqrt{-1}\right)C''_1,$$

nnd hieraus

$$C'_1 = \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\sqrt{-1}, \quad C''_1 = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\sqrt{-1}.$$

Substituirt man diese Werthe, so findet man

$$\varphi_1 = \frac{pe^{-\frac{pt}{2}}}{\sqrt{4b-p^2}} \cdot \frac{e^{\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\sqrt{-1}} - e^{-\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

oder

$$+ e^{-\frac{pt}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\sqrt{-1}} + e^{-\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\sqrt{-1}}}{2},$$

$$(7) \quad \varphi_1 = e^{-\frac{pt}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\right) + \frac{p}{\sqrt{4b-p^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\right).$$

Die folgenden Werthe von $T_1, T_2, T_3, \ldots$ können alle unter folgende Form gesetzt werden

$$T_n = \Sigma e^{ht}(A \cos mt + B \sin mt)$$

$$= \Sigma e^{ht}\left(\frac{A - B\sqrt{-1}}{2} e^{mt\sqrt{-1}} + \frac{A + B\sqrt{-1}}{2} e^{-mt\sqrt{-1}}\right).$$

Man erhält nun

$$\int T_n e^{\frac{pt}{2} - \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\sqrt{-1}} dt = \Sigma e^{\left(h+\frac{p}{2}\right)t}\left(\frac{A-B\sqrt{-1}}{2} e^{\left(m - \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\right)t\sqrt{-1}} + \frac{A+B\sqrt{-1}}{2} e^{-\left(m + \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\right)t\sqrt{-1}}\right)$$

$$= \Sigma e^{\left(h+\frac{p}{2}\right)t}\left(\frac{\frac{A-B\sqrt{-1}}{2} e^{\left(m - \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\right)t\sqrt{-1}}}{h + \frac{p}{2} + \left(m - \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\right)\sqrt{-1}} + \frac{\frac{A+B\sqrt{-1}}{2} e^{-\left(m + \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\right)t\sqrt{-1}}}{h + \frac{p}{2} - \left(m + \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\right)\sqrt{-1}}\right).$$

$$\int T_n e^{\frac{pt}{2} + \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\sqrt{-1}} dt = \Sigma e^{\left(h+\frac{p}{2}\right)t}\left(\frac{\frac{A-B\sqrt{-1}}{2} e^{\left(m + \frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\right)t\sqrt{-1}}}{\left(+m+p+\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\right)\sqrt{-1}}\right.$$

$$+\frac{\frac{A+B\sqrt{-1}}{2}e^{-\left(m-\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\right)t\sqrt{-1}}}{h+\frac{p}{2}-\left(m-\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}\right)\sqrt{-1}}\Bigg),$$

und hieraus durch leichte Reductionen

$$\frac{e^{-\frac{pt}{2}+\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\sqrt{-1}}}{\sqrt{4b-p^2}\sqrt{-1}}\int T_n e^{\frac{pt}{2}-\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\sqrt{-1}}dt$$

$$-\frac{e^{-\frac{pt}{2}-\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\sqrt{-1}}}{\sqrt{4b-p^2}\sqrt{-1}}\int T_n e^{\frac{pt}{2}+\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\sqrt{-1}}dt$$

$$=\Sigma e^{ht}\left\{\frac{\left[2Am\left(h+\frac{p}{2}\right)+B\left(h^2+ph-m^2+b\right)\right]\sin mt+\left[A\left(h^2+ph-m^2+b\right)-2Bm\left(h+\frac{p}{2}\right)\right]\cos mt}{(h^2+ph+m^2+b)^2-m^2(4b-p^2)}\right\}.$$

Dies in der Gleichung (6) substituirt giebt

$$(8)\quad \varphi_n=\frac{2e^{-\frac{pt}{2}}}{\sqrt{4b-p^2}}\cdot\frac{C'_n e^{\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\sqrt{-1}}-C''_n e^{-\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\Sigma e^{ht}\left\{\frac{\left[2Am\left(h+\frac{p}{2}\right)+B\left(h^2+ph-m^2+b\right)\right]\sin mt+\left[A\left(h^2+ph-m^2+b\right)-2Bm\left(h+\frac{p}{2}\right)\right]\cos mt}{(h^2+ph+m^2+b)^2-m^2(4b-p^2)}\right\}.$$

Hieraus findet man ferner

$$\Bigg(d_t\varphi_n=-\frac{pe^{-\frac{pt}{2}}}{\sqrt{4b-p^2}}\cdot\frac{C'_n e^{\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\sqrt{-1}}-C''_n e^{-\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$+e^{-\frac{pt}{2}}\cdot\frac{C'_n e^{\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\sqrt{-1}}+C''_n e^{-\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\sqrt{-1}}}{2}$$

$$+ \Sigma e^{bt} \left\{ \frac{\begin{array}{l} \{[A(h+p) - Bm](m^2 + h^2) + (Bm + Ah)b\} \cos mt \\ + \{[B(h+p) + Am](m^2 + h^2) - (Am + Bh)b\} \sin mt \end{array}}{(h^2 + ph + m^2 + b)^2 - m^2(4b - p^2)} \right\}.$$

Die zwei Constanten C'_n und C''_n sollen jetzt in der Weise bestimmt werden, dass wenn $t = o$, $\varphi_n = o$ und $d_t \varphi_n = o$. Man erhält hierdurch

$$C'_n = - \Sigma \left\{ \frac{\begin{array}{l} \left[\left(Ah - Bm\right)\left(h^2 + ph + m^2 + b + \frac{p^2}{2}\right) + \frac{Ap}{2}\left(h^2 + r^2 + b\right)\right] \\ + \left[A\left(h^2 + ph - m^2 + b\right) - 2B\left(h + \frac{p}{2}\right)\right] \frac{\sqrt{4b - p^2}}{2} \sqrt{-1} \end{array}}{(h^2 + ph + m^2 + b)^2 - m^2(4b - p^2)} \right\},$$

$$C'_n = - \Sigma \left\{ \frac{\begin{array}{l} \left[\left(Ah - Bm\right)\left(h^2 + ph + m^2 + b + \frac{p^2}{2}\right) + \frac{Ap}{2}\left(h^2 + r^2 + b\right)\right] \\ - \left[A\left(h^2 + ph - m^2 + b\right) - 2B\left(h + \frac{p}{2}\right)\right] \frac{\sqrt{4b - p^2}}{2} \sqrt{-1} \end{array}}{(h^2 + ph + m^2 + b)^2 - m^2(4b - p^2)} \right\}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$2h\left(h^2 + ph + m^2 + b + \frac{p^2}{2}\right) + p(h^2 + m^2 + b) = E_n,$$

$$2p\left(h^2 + ph + m^2 + b + \frac{p^2}{2}\right) = F_n, \quad h^2 + ph - m^2 + b = G_n,$$

$$2m\left(h + \frac{p}{2}\right) = H_n, \quad (h^2 + ph + m^2 + b)^2 - m(4b - p^2) = K_n,$$

und substituirt die gefundenen Werthe von C'_n und C''_n in der Gleichung (8), so wird

(9)

$$\varphi_n = e^{-\frac{pt}{2}} \left(\frac{A_n E_n - B_n F_n}{K_n} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{4b - p^2}}{2} t\right)}{\sqrt{4b - p^2}} + \frac{A_n G_n - B_n H_n}{K_n} \cos\left(\sqrt{4b - p^2}\, t\right) \right)$$

$$+ \Sigma e^{bt} \left(\frac{{}^n A_n H_n + B_n G}{K_n} \sin mt + \frac{A_n G_n - B_n H_n}{K_n} \cos mt \right).$$

Durch diese Form können alsdann φ_2, φ_3, ... successive gefunden werden. Die Entwickelung hat weiter keine Schwierigkeit, als die Weitläufigkeit der Formeln. In der Anwendung kann man sich

beinahe immer auf die erste Potenz der Elongation α beschränken und $\varphi = \varphi_1 \alpha$ annehmen, oder

(10)

$$\varphi = \alpha . e^{-\frac{pt}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\right) + \frac{p}{\sqrt{4b-p^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\right)\right].$$

§. 124.

Aus der Formel (10) des vorigen Paragraphen erhält man

$$d_t\varphi = -\alpha \cdot \frac{2b}{\sqrt{4b-p^2}} \cdot e^{-\frac{pt}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}t\right).$$

Am Ende jeder Schwingung ist $d_t\varphi = o$, und man erhält, wenn man durch T die Zeit einer Schwingung bezeichnet,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{4b-p^2}},$$

oder, wenn man die Werthe von $b = \frac{ag}{k^2}$ und $p = \frac{A}{k^2}$ substituirt,

$$T = \frac{2\pi k}{\sqrt{4ag - A}} = \frac{\pi k}{\sqrt{ag}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{A}{4ag}}}.$$

Im leeren Raum fanden wir die Zeit einer Schwingung, wenn die höheren Potenzen des Elongationswinkels α vernachlässigt wurden, $T = \frac{\pi k}{\sqrt{ag}}$. Der Luftwiderstand hat folglich diese Zeit im Verhältniss $\sqrt{1 - \frac{A}{4ag}} : 1$ vergrössert. Setzt man die Formel (10) des vorigen Paragraphen $t = nT = \frac{2n\pi}{\sqrt{4b-p^2}}$, so findet man die Elongation α_n am Ende der n^{ten} Oscillation. Es wird alsdann

$$\alpha_n = (-1)^n \alpha . e^{-\frac{np\pi}{\sqrt{4b-p^2}}} = (-1)^n \alpha . e^{-\frac{nA\pi}{k\sqrt{4ag-A}}}.$$

Die Elongationen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ bilden folglich abnehmende geometrische Reihen, deren Exponent $e^{-\frac{A\pi}{\sqrt{4ag-A}}}$ ist. Dies wird auch

durch die Erfahrung bestätigt, so oft der ursprüngliche Elongationswinkel klein ist. Wenn dieser aber grösser wird, so nehmen die Elongationen schneller ab, als in einer geometrischen Reihe der Fall ist. Die höheren Potenzen der Elongationswinkel können alsdann nicht länger vernachlässigt werden, und man wird sich leicht überzeugen, dass es nicht allein nothwendig ist, in die Formel (1) des vorigen Paragraphen die höheren Potenzen von φ bei der Entwickelung von $\sin\varphi$, sondern auch die höheren Potenzen von α bei der Entwickelung der Werthe des Luftwiderstandes mitzunehmen.

§. 125.

Ausser dem Widerstand, welchen die Luft gegen die Bewegung eines Pendels übt, hat sie noch andere Wirkungen auf denselben. Die eine dieser Wirkungen ist, dass der Pendel in der Luft etwas weniger wiegt, als im luftleeren Raume, indem ein Theil seiner Schwere, welcher gleich dem Gewicht der Luftmasse, deren Platz er einnimmt, von der Luft getragen wird. Ist das Verhältniss zwischen der Dichtigkeit des Pendels und derjenigen der Luft durch ϱ ausgedrückt, und bezeichnet g die Grösse der Schwere im luftleeren Raume, g' die in der Luft, so wird $g' = g\left(1 - \frac{1}{\varrho}\right)$ und die Zeit einer Pendelschwingung in der Luft wird folglich, wenn dieser Winkel statt g in die Formel des vorigen Paragraphen substituirt wird,

$$T = \frac{\pi k}{\sqrt{ag}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{A}{4ag} - \frac{1}{\varrho}}}.$$

Eine zweite Wirkung der Luft ist, dass ausser dem Pendel auch eine gewisse Luftmasse mitschwingt. Hierdurch wird das Trägheitsmoment des Pendels vergrössert, und, weil das Trägheitsmoment der mitschwingenden Luftmasse nur von der Form des Pendels und von der Dichtigkeit der Luft abhängt, wird man statt k^2, $k^2\left(1 + \frac{k'}{\varrho}\right)$ setzen müssen. Es wird alsdann die Schwingungszeit in der Luft

$$T = \frac{\pi k}{\sqrt{ag}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{k'}{\varrho}}}{\sqrt{1 - \frac{A}{4ag} - \frac{1}{\varrho}}}.$$

Die Schwingungszeit wird folglich durch die Anwesenheit der Luft im Verhältniss $\sqrt{1 - \frac{A}{4ag} - \frac{1}{\varrho}} : \sqrt{1 + \frac{k'}{\varrho}}$ vergrössert werden.

Weil der direkte Luftwiderstand auch der Dichtigkeit der Luft proportional sein muss, kann man auch $A = \frac{A'}{\varrho}$ setzen, und erhält dann, wenn man die höheren Potenzen von $\frac{1}{\varrho}$ vernachlässigt,

$$T = \frac{\pi k}{\sqrt{ag}}\left[1 + \frac{1}{2\varrho}\left(1 + k' + \frac{A'}{4ag}\right)\right],$$

wo k' und A' zwei nur von der Figur des Pendels abhängige Constanten bezeichnen.

§. 126.

Die in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten Gesetze der Umdrehungsbewegung drücken nicht nur die Bewegung eines physischen Pendels, sondern im Allgemeinen die eines festen Körpers aus, wenn die gegebenen Kräfte zu zwei während der Bewegung immer in demselben Punkte haftenden Kräften reducirt werden können, und die eine dieser Kräfte entweder der Axe parallel ist, oder ihren Angriffspunkt in der Axe hat. (Siehe die §§. 65—67.) Alsdann kann diese Kraft ausser Betracht gesetzt werden, weil ihr Moment in Bezug auf die x Axe immer Null ist. Der Angriffspunkt der zweiten Kraft muss dann in den vorhergehenden Paragraphen statt des Schwerpunktes gesetzt werden, die Projection der Kraft auf eine auf der Umdrehungsaxe senkrechte Ebene statt der Schwere gm, und eine durch die Umdrehungsaxe parallel mit dieser Projection gezogene Linie statt der verticalen x Axe. Dies findet z. B. bei den magnetischen Körpern statt, wenn die Umdrehungsaxe vertical ist, oder durch den Schwerpunkt des Körpers geht.

§. 127.

Wir werden jetzt die Gesetze der Bewegung eines festen Körpers auf einer festen Ebene betrachten, wenn er der Wirkung beliebiger Kräfte unterworfen ist, die jedoch ihn von der Ebene nicht zu entfernen streben.

Wir werden, wie im §. 110, uns drei im Raume feste Axen x', y', z' denken, und diejenige der x' und y' in der festen Ebene annehmen. Es seien ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunktes O. Wir werden zuerst annehmen, der Körper berühre die Ebene nur in einem Punkte. Dieser Punkt wird im Allgemeinen auf der Oberfläche des Körpers wechseln. Durch den Schwerpunkt O lege man die drei Hauptaxen u, v, w und die drei Axen x, y, z parallel mit den drei im Raume festen Axen x', y', z'. Die Coordinaten des Berührungspunktes relativ zum Schwerpunkte längs der letzten Axen seien x, y, z, und der Widerstand der Ebene sei durch F bezeichnet. Fügt man diese Kraft zu den gegebenen Kräften, so ist der Körper als frei zu betrachten. In die Gleichungen des §. 112 braucht man nur statt Z, Z + F, statt L, L — Fy, statt M, M + Fx zu setzen. Die Gleichungen (1) und (3) des §. 112 werden nun

$$(1)\quad md_t^2\xi = \Sigma X,\quad md_t^2\eta = \Sigma Y,\quad md_t^2\zeta = \Sigma Z + F,$$

$$(2)\quad \begin{cases} d_t[Ap\cos(ux) + Bq\cos(vx) + Cr\cos(wx)] = L - Fy, \\ d_t[Ap\cos(uy) + Bq\cos(vy) + Cr\cos(wy)] = M + Fx, \\ d_t[Ap\cos(uz) + Bq\cos(vz) + Cr\cos(wz)] = N. \end{cases}$$

Statt der Gleichungen (3) des §. 112 kann man auch die Gleichungen (4) desselben Paragraphen benutzen, und man erhält dann

$$(3)\quad \begin{cases} Ad_tp + (B - C)qr = L\cos(ux) + M\cos(uy) + N\cos(uz) \\ \qquad\qquad + F[x\cos(uy) - y\cos(ux)], \\ Bd_tq + (C - A)rp = L\cos(vx) + M\cos(vy) + N\cos(vz) \\ \qquad\qquad + F[x\cos(vy) - y\cos(vx)], \\ Cd_tr + (A - B)pq = L\cos(wx) + M\cos(wy) + N\cos(wz) \\ \qquad\qquad + F[x\cos(wy) - y\cos(wx)]. \end{cases}$$

Es können auch diese Gleichungen unter eine andere Form gesetzt werden, wenn man bemerkt, dass

$$x\cos(uy) - y\cos(ux) = w[\cos(wx)\cos(uy) - \cos(wy)\cos(ux)]$$
$$+ v[\cos(vy)\cos(ux) - \cos(vx)\cos(uy)],$$

und weil (§. 111)

$$\cos(wx)\cos(uy) - \cos(wy)\cos(ux) = \cos(vz),$$
$$\cos(vy)\cos(ux) - \cos(vx)\cos(uy) = \cos(wz),$$
$$x\cos(uy) - y\cos(ux) = w\cos(vz) - v\cos(wz),$$

und ebenso

$$x\cos(vy) - y\cos(vx) = u\cos(wz) - w\cos(uz),$$
$$x\cos(wy) - y\cos(wx) = v\cos(wz) - u\cos(vz).$$

Diese Werthe in die Gleichungen (3) substituirt geben

$$(4)\quad \begin{aligned} A d_t p + (B - C)qr &= L\cos(ux) + M\cos(uy) + N\cos(uz) \\ &\quad + F[w\cos(vz) - v\cos(wz)], \\ B d_t q + (C - A)rp &= L\cos(vx) + M\cos(vy) + N\cos(vz) \\ &\quad + F[u\cos(wz) - w\cos(uz)], \\ C d_t r + (A - B)pq &= L\cos(wx) + M\cos(wy) + N\cos(wz) \\ &\quad + F[v\cos(uz) - u\cos(vz)]. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir durch $U = f(u, v, w) = o$ die Gleichung der Oberfläche des Körpers, so wird, weil im Berührungspunkte die Normale dieser Oberfläche auf der Ebene senkrecht stehen und der z Axe parallel sein muss (wir haben hier den Fall ausgenommen, den wir später betrachten werden, dass der Berührungspunkt eine Spitze wäre),

$$(6)\quad \begin{aligned} \cos(uz) &= \frac{d_u U}{\sqrt{(d_u U)^2 + (d_v U)^2 + (d_w U)^2}}, \\ \cos(vz) &= \frac{d_v U}{\sqrt{(d_u U)^2 + (d_v U)^2 + (d_w U)^2}}, \\ \cos(wz) &= \frac{d_w U}{\sqrt{(d_u U)^2 + (d_v U)^2 + (d_w U)^2}}, \end{aligned}$$

Man hat ferner

$$(7)\qquad z = -\zeta.$$

Die Gleichungen (1), (2) [(3) oder (4) statt (2)], (5), (6) und (7) geben zusammen 10 von einander unabhängige Gleichungen, weil von den drei Gleichungen (5) nur zwei von einander unabhängig

sind. Diese in Verbindung mit den drei Gleichungen (2) und den Werthen von p, q, r des §. 110 geben 13 Gleichungen, um die 13 unbekannten u, v, w, x, y, z, ξ, η, ζ, F und drei der Winkel (ux), (uz), (uz), (vx) u. s. w. als Functionen von t zu bestimmen.

Bildet der Berührungspunkt eine Spitze des Körpers, so werden die Coordinaten u, v, w unveränderlich, so lange sich der Körper auf diese Spitze stützt. Es ist alsdann nicht nöthig, dass der Widerstand F auf der Oberfläche des Körpers normal ist. Die Gleichungen (5) und (6) fallen nun weg, aber auch drei der unbekannten u, v, w. Wenn der Körper die Ebene nicht nur in einem Punkte, sondern in einer geraden Linie berührt, und diese nicht eine Kante ist, so muss die Oberfläche oder ein Theil derselben abwickelbar sein. In jedem Punkte der Berührungslinie findet ein gewisser Widerstand statt, und da alle diese Widerstände in demselben Sinne wirken, so können sie in eine einzige Kraft zusammengesetzt werden. Bezeichnet man diese Kraft durch F und die Coordinaten ihres Angriffspunkts durch u, v, w, so gelten ganz dieselben Gleichungen, wie vorher.

Wäre die gerade Berührungslinie eine Kante, deren Gleichung nach den Hauptaxen u, v, w

$$(8) \qquad v = au + b, \quad w = a'u + b$$

wäre, wo a, b, a', b' Constanten sind, und weil die Kante in der xy Ebene liegen soll,

$$(9) \qquad \cos(uz) + a\cos(vz) + a'\cos(wz) = o,$$

so würden diese Gleichungen statt der Gleichungen (5) und (6) zu setzen sein.

Diese und noch andere Fälle können auch nach einander bei der Bewegung eines festen Körpers auf einer Ebene eintreten.

§. 128.

Wir werden jetzt annehmen, die gegebenen Kräfte seien die Schwere und eine dem Drucke proportionale Reibung μF. Wir werden die x' Axe in der festen Ebene horizontal, die y' Axe po-

sitiv abwärts annehmen, und durch e die Neigung der Ebene gegen den Horizont bezeichnen. Es seien f und f′ die Projection der Reibung μF parallel mit den x′ und y′ Axen. Es ist nun

$$(1)\quad \begin{aligned} \Sigma X = f,\ \Sigma Y = mg \sin e + f',\ \Sigma Z = mg \cos e, \\ L = f'z,\ M = -zf,\ N = yf - xf'. \end{aligned}$$

Um die Geschwindigkeiten des Berührungspunktes anzugeben, bemerke man, dass $x + \xi$, $y + \eta$ und o die Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf die festen Axen x′, y′, z′ sind, oder, wenn man die Werthe von x und y substituirt,

$$\xi + u \cos(ux) + v \cos(vx) + w \cos(wx),$$
$$\eta + u \cos(uy) + v \cos(vy) + w \cos(wy).$$

Bezeichnet man jetzt durch i, i′, i″ die Geschwindigkeit des Berührungspunktes, nach den drei Axen x′, y′, z′ zerlegt, so werden

$$(2)\quad \begin{aligned} i &= d_t\xi + ud_t \cos(ux) + vd_t \cos(vx) + wd_t \cos(wx), \\ i' &= d_t\eta + ud_t \cos(uy) + vd_t \cos(vy) + wd_t \cos(wy), \\ i'' &= o. \end{aligned}$$

Es können nun zwei Fälle eintreten. Es ist entweder die Reibung stark genug, um die Geschwindigkeit aufzuheben oder nicht. Im ersten Falle rollt der Körper, im zweiten gleitet er. Im ersten Falle werden

$$(3)\quad i = o,\ i' = o,\ \sqrt{f^2 + f'^2} < \mu R,$$

d. h. die Reibung tritt nur mit der Intensität auf, die in jedem Augenblicke nöthig ist, um die Geschwindigkeit des Berührungspunktes zu vertilgen. Im zweiten Falle werden

$$(4)\quad \sqrt{f^2 + f'^2} = \mu R,\ \frac{f}{f'} = \frac{i}{i'},$$

d. h. die Reibung tritt mit ihrer vollen Intensität auf und ist der Richtung der Bewegung genau entgegengesetzt.

§. 129.

Wir wollen die hier entwickelte Theorie der Bewegung eines festen Körpers auf einer festen Ebene an einem einfachen Beispiele anwenden. Es sei der Körper ein homogener gerader Cylinder, die Axe des Cylinders ursprünglich horizontal, der x′ Axe parallel, und

die ursprüngliche Bewegung in der $y'z'$ Ebene. Die Axe wird dann immer horizontal verbleiben. Es ist nun $f = o$ und

$$\Sigma X = o, \quad \Sigma Y = mg \sin e + f', \quad \Sigma Z = -mg \cos e,$$
$$L = fz, \quad M = o, \quad N = -f'x.$$

Wenn r den Halbmesser des Cylinders bezeichnet, wird das Trägheitsmoment in Bezug auf diese Axe $\frac{1}{2}r^2m$ (§. 108). Nimmt man jetzt als u Axe die Axe des Cylinders an, und bezeichnet durch Ω die Umdrehungsgeschwindigkeit des Cylinders, so wird $q = r = o$, $p = \Omega$, $A = \frac{1}{2}r^2m$. Es ist ferner $\zeta = -z = r$, $\xi =$ constant und $y = o$, weil die Berührungslinie des Cylinders in die durch die Axe gelegte xz Ebene fallen muss. Die Gleichungen (1) und (2) des §. 127 werden alsdann

$$(1) \quad \begin{cases} md_t^2\eta = mg \sin e + f', \quad md_t^2\zeta = o = -mg \cos e + F, \\ \frac{1}{2}rmd_t\Omega = -f'. \end{cases}$$

Die Gleichungen (2) des §. 127 werden

$$(2) \qquad i = o, \quad i' = d_t\eta - r\Omega.$$

Setzt man jetzt $d_t\eta = V$, und bezeichnet durch V_o und Ω_o die Anfangswerthe von V und Ω, so wird wegen der Gleichungen (1)

$$(3) \quad \begin{cases} md_tV = mg \sin e - \frac{1}{2}rmd_t\Omega, \\ V - V_o = g \sin e . t - \frac{1}{2}r(\Omega - \Omega_o). \end{cases}$$

Es sind jetzt drei Fälle zu entscheiden, wenn anfänglich $i' = V - r\Omega$ gleich Null ist, oder positiv oder negativ, d. h. ob $V_o = r\Omega_o$, oder $V_o > r\Omega_o$ oder $V_o < r\Omega_o$.

Es sei $V_o = r\Omega_o$. Der Cylinder fängt alsdann zu rollen an. Er wird auch damit fortfahren, wenn fortwährend $V = r\Omega$ verbleibt. Die Gleichung (3) giebt nun

$$\Omega = \frac{2}{3}\frac{g \sin e}{r} . t + \Omega_o, \quad d_t\Omega = \frac{2}{3}\frac{g \sin e}{r},$$

und weil $-f' =$ oder $< \mu F$, wird

$$\frac{1}{2}rmd_t\Omega = < \mu mg \cos e,$$

oder

$$\frac{1}{3}g \sin e = < \mu \cos e, \quad \operatorname{tang} e = < 3\mu.$$

Wenn die Tangente des Neigungswinkels der Ebene nicht grösser,

als 3μ ist, wo μ den Reibungscoëfficienten bezeichnet, so wird der Cylinder fortwährend rollen und die Umdrehungsgeschwindigkeit durch die obige Formel bestimmt werden. — Ist dagegen $\tang e > 3\mu$, so wird der Cylinder gleich zu gleiten anfangen und es wird nun

$$-f' = \mu F, \quad \tfrac{1}{2} r m d_t \Omega = \mu m g \cos e,$$

und daher

$$\tfrac{1}{2} r(\Omega - \Omega_o) = \mu g \cos e . t, \quad \Omega = \frac{2\mu g \cos e}{r} . t + \Omega_o,$$

$$V = V_o + gt(\sin e - \mu \cos e),$$

und es ist $V > r\Omega$.

Es sei jetzt $V_o > r\Omega_o$. Der Cylinder wird im Anfang gleiten. Es wird daher im Anfange, wie oben

$$-f' = \mu F, \quad \Omega = \Omega_o + \frac{2\mu g \cos e}{r} . t,$$

$$V = V_o + gt(\sin e - \mu \cos e),$$

$$V - r\Omega = V_o - r\Omega_o + gt(\sin e - 3\mu \cos e).$$

Wenn die Zeit t wächst, so wird, wenn $\sin e < 3\mu \cos e$, oder wenn $\tang e < 3\mu$, die Grösse $V - r\Omega$ Null werden, und der Körper zu rollen anfangen von einer Zeit t' an, wo t' durch die Gleichung

$$V_o - r\Omega_o + gt'(\sin e - 3\mu \cos e) = o$$

bestimmt wird, folglich wird

$$t' = \frac{V_o - r\Omega_o}{3\mu \cos e - \sin e}.$$

Von dieser Zeit an wird dann der Cylinder fortwährend rollen, und es wird, wie vorher

$$\Omega = \tfrac{2}{3} \frac{g \sin e}{r} . t + \Omega_o.$$

Ist dagegen $\sin e =$ oder $> 3\mu \cos e$, so wird $V - r\Omega$ immer positiv verbleiben und der Körper fortwährend zugleich gleiten.

Es sei endlich $V_o < r\Omega_o$. Der Cylinder wird im Anfange eine grössere Umdrehungsgeschwindigkeit als fortschreitende Geschwindigkeit besitzen. Die Reibung f' wird im Anfange abwärts dieser Umdrehungsbewegung entgegengesetzt wirken. Es wird folglich im Anfange $f' = \mu F$, und daher

$$\tfrac{1}{2} r(\Omega_o - \Omega) = \mu g \cos e . t,$$

$$\Omega = \Omega_\circ - \frac{2\mu g \cos e}{r} \cdot t,$$

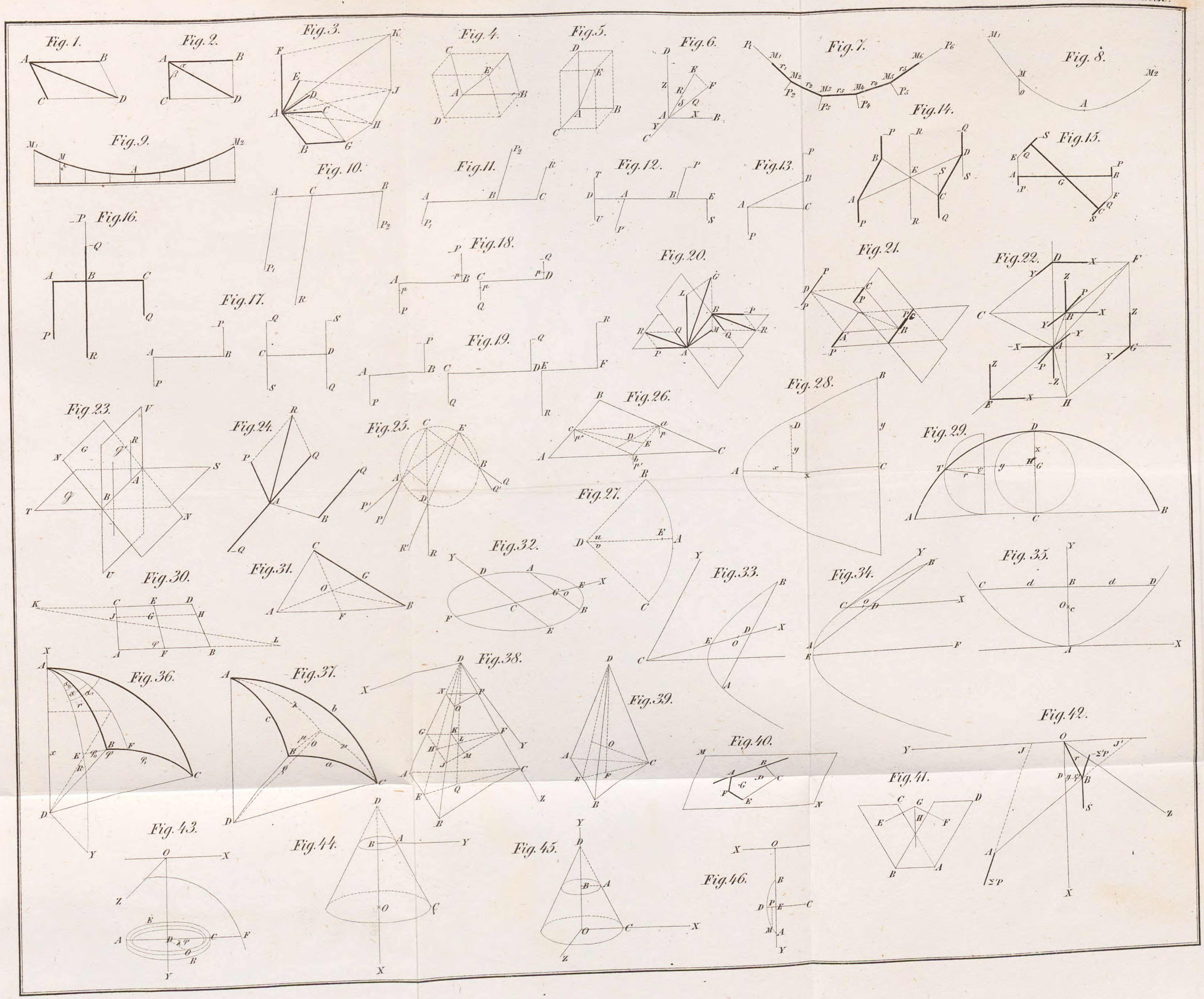
$$V = V_\circ + gt(\sin e + \mu \cos e),$$

$$V - r\Omega = V_\circ - r\Omega_\circ + gt(\sin e + 3\mu \cos e).$$

Die Umdrehungsgeschwindigkeit Ω wird nun immer kleiner und die fortschreitende Geschwindigkeit V immer grösser, bis zuletzt $V = r\Omega$, dies wird eintreffen zu einer Zeit t', wo

$$t' = \frac{r\Omega_\circ - V_\circ}{\sin e + 3\mu \cos e}.$$

Von dieser Zeit t' an wird der Körper zu rollen anfangen, wenn $\tang e = < 3\mu$, oder zu gleiten, wenn $\tang e > 3\mu$, ganz nach denselben Gesetzen, wie im ersten Falle, wo $V_\circ = r\Omega_\circ$.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.

ZWEITE ABTHEILUNG.

MECHANISCHE EIGENSCHAFTEN DER KÖRPER

UND

DEREN EINFLUSS AUF DIE GESETZE DES GLEICHGEWICHTS UND DER BEWEGUNG.

Zweiter Abschnitt.

Mechanische Eigenschaften der Körper und deren Einfluss auf die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung.

Cap. I.

Theorie der Molekülarzusammensetzung der Körper.

§. 130.

Die Körper werden als aus sehr kleinen und in jeder Hinsicht unveränderlichen Theilen zusammengesetzt gedacht, welche Atome genannt werden. Diese Atome bilden unter einander Gruppen, welche Molekülen genannt werden. Die den Atomen inwohnenden Kräfte, wodurch die Molekülen gebildet sind, werden Atomkräfte genannt, und sind chemischer Art, indem sie durch keine mechanische Kraft überwunden werden können. In mechanischer Hinsicht können folglich die Molekülen als die Grundbestandtheile der Körper angesehen werden.

Die Molekülen werden durch Kräfte, welche die Molekülarkräfte genannt werden, in bestimmten Entfernungen von einander gehalten. Diese Kräfte zeigen sich als anziehend, wenn jener Abstand der Molekülen vergrössert, als abstossend, wenn er vermindert wird. Wir können daher die Molekülarkraft als das Resultat zweier Kräfte betrachten, die eine anziehend, die andere abstossend, welche beide abnehmen, wenn die Entfernung vergrössert wird,

und zwar so, dass die abstossende Kraft geschwinder als die anziehende abnimmt. Man kennt noch nicht das Gesetz, wonach diese Kräfte in sehr kleinen Entfernungen wirken; wenn aber der Abstand messbar wird, zeigt sich die Molekülarkraft nur als anziehend und wirkt proportional mit dem Produkte der Massen der beiden Molekülen und umgekehrt proportional mit dem Quadrate der Entfernung. Diese anziehende Kraft wird die allgemeine Gravitationskraft der Körper genannt, indem der Name Molekülarkraft nur von der in sehr kleinen Entfernungen wirkenden Kraft gebraucht wird.

§. 131.

Die Molekülarkraft hält nicht allein die Molekülen eines Körpers in bestimmten Entfernungen von einander und widersetzt sich folglich jeder Volumenveränderung, sondern hält auch oft die Molekülen in einer bestimmten relativen Stellung zu einander, und widersetzt sich folglich auch mit einer gewissen Kraft jeder Formveränderung des Körpers. Körper dieser Art werden feste genannt; diejenigen dagegen, deren Molekülarkraft sich nur einer Volumenveränderung widersetzt, werden flüssige genannt. Indem der Widerstand des Körpers gegen Formveränderung sehr klein sein kann, gehen die festen Körper allmälig in flüssige über, und werden schon, wenn jener Widerstand nicht Null, sondern nur sehr klein ist, klebrigflüssige Körper genannt.

Flüssige Körper, die sich uns immer nur im zusammengedrückten Zustande zeigen, und folglich immer ihr Volumen zu vergrössern streben, werden luftförmige Körper oder Gase genannt. Im Gegensatz hierzu werden die übrigen flüssigen Körper, welche ein bestimmtes Volumen haben, welches sie nicht zu vergrössern streben, tropfbarflüssige Körper genannt.

Diese drei verschiedenen Zustände, worin ein Körper sich befinden kann, der feste, der tropfbar- und der luftförmigflüssige, werden die Aggregatzustände des Körpers genannt.

§. 132.

Bei den festen Körpern widersetzen sich die Molekülarkräfte sowohl jeder Formveränderung, wie jeder Volumenveränderung. Dieser Widerstand muss eine Function jener Veränderung sein, und wird zwischen gewissen Grenzen nur Null, wenn die Form- oder Volumenveränderung Null ist; diese Grenzen werden die Grenzen der Elasticität des Körpers genannt, und der Körper wird zwischen diesen Grenzen elastisch genannt. Innerhalb der Grenzen der Elasticität ist folglich das Gleichgewicht der Molekülen ein stetiges, d. h. sie kehren nach dem Aufhören der die Veränderung bewirkenden Kräfte in die ursprüngliche Lage zurück. Sind dagegen jene Grenzen überschritten, so nehmen die Molekülen eine neue Gleichgewichtslage an, welche auch als eine Theilung des Körpers angesehen wird.

§. 133.

Wenn ein Körper erwärmt wird, so wird dadurch die abstossende Molekülarkraft vergrössert. Wenn keine äusseren Hindernisse stattfinden, kommen folglich die Molekülen erst in einem grösseren Abstand von einander ins Gleichgewicht, und eine Ausdehnung des Körpers findet folglich Statt. Nimmt dagegen die Wärme eines Körpers ab, so wird hierdurch die abstossende Kraft der Molekülen vermindert, und der Körper zieht sich folglich zusammen.

Man hat früher dieses erklärt, indem man die Wärme als einen feinen unwägbaren Stoff betrachtete, welcher jedes der Molekülen wie eine Atmosphäre umgebe und in welchem Stoff allein die abstossende Kraft der Molekülen liege. Man nahm nämlich nur anziehende Kräfte an, sowohl zwischen den Molekülen der Körper unter einander, wie zwischen diesen und dem Stoffe, welchen man als Wärmestoff bezeichnete, wogegen man annahm, dass die Theile dieses letzteren Stoffes sich unter einander abstossen. In der letzten Zeit ist indessen diese Hypothese, weil sie nur wenige der physischen Phaenomene der Wärme zu erklären erlaubt,

verlassen worden, ohne dass man indessen eine andere Theorie aufzustellen vermocht hat.

So wie eine Vermehrung oder Verminderung der Wärme eines Körpers eine entsprechende Volumenveränderung hervorbringt, so bringt auch umgekehrt eine auf irgend eine andere Weise hervorgebrachte Ausdehnung eines Körpers eine Verminderung, und ein Zusammendrücken eine Vergrösserung seiner Wärme hervor. Im ersten Falle sucht der Körper aus den ihn umgebenden wärmeren Körpern die stattgefundene Wärmeverminderung zu erstatten; im letzten Falle wird er diesen den Ueberschuss seiner Wärme abgeben.

§. 134.

Die Wirkung der Wärme besteht nicht allein darin, dass sie die abstossende Kraft der Molekülen vergrössert, sondern sie verändert auch die formbildende Kraft der Molekülen. Bei festen Körpern wird diese formbildende Kraft durch Vermehrung der Wärme geschwächt und verschwindet zuletzt ganz; der Körper geht folglich von dem festen zum flüssigen Aggregatzustand über, d. h. er schmilzt. Durch eine hinreichende Verminderung der Wärme erhalten umgekehrt die tropfbarflüssigen Körper die formbildende Kraft, welche sie früher nicht hatten; sie werden folglich fest, d. h. sie erstarren. Durch eine Vermehrung der Wärme gehen dagegen zuletzt die tropfbarflüssigen Körper in luftförmige über, d. h. sie verdampfen. Man hat Grund anzunehmen, dass jeder Körper durch eine hinlängliche Vermehrung oder Verminderung der Wärme jeden der drei Aggregatzustände annehmen könne.

§. 135.

So lange der Aggregatzustand des Körpers nicht verändert wird, und folglich eine Vermehrung oder Verminderung der Wärme des Körpers nur eine entsprechende Veränderung der abstossenden Molekülarkraft hervorbringt, sucht diese Wärme sich allen umgebenden kälteren Körpern mitzutheilen. Sie wirkt dadurch auf das Gefühl und auf das Thermometer, und wird daher freie Wärme

genannt. Wenn dagegen der Aggregatzustand des Körpers durch die Wärme verändert wird, so dass der Körper aus dem festen in den tropfbarflüssigen Zustand, oder aus diesem in den luftförmigflüssigen Zustand übergeht, so wird durch diese Veränderung des Aggregatzustandes eine gewisse Quantität der Wärme gebunden, so dass sie nicht zu anderen umgebenden Körpern übergehen kann, und folglich auch weder auf das Gefühl, noch auf das Thermometer wirken kann. Diese Wärme wird daher gebundene oder latente Wärme genannt. Dasselbe ist auch der Fall, wenn dieselbe Veränderung des Aggregatzustandes durch irgend eine andere Ursache bewirkt wird, und die Temperatur des Körpers sinkt alsdann, weil ein Theil seiner Wärme gebunden worden ist. Geht umgekehrt der Körper aus dem tropfbarflüssigen Zustande in den festen oder aus dem luftförmigen in den tropfbarflüssigen Zustand über, so wird ein Theil der vorher gebundenen Wärme frei, und die Temperatur des Körpers steigt, sofern die frei gewordene Wärme nicht von anderen umgebenden kälteren Körpern absorbirt wird.

Cap. II.

Theorie der allgemeinen Gravitation.

§. 136.

Betrachten wir einen materiellen Punkt O, welcher von einem Körper beliebiger Form angezogen wird. Diese Anziehung geht von allen Elementen des Körpers aus, und die Resultante dieser elementaren Anziehungen ist die totale Anziehung des gegebenen Körpers.

Es sei (Fig. 48) C ein beliebiger fester Punkt im Körper und Cx, Cy, Cz drei durch diesen Punkt gezogene rechtwinklige Coordinatenaxen. Es seien x, y, z die Coordinaten eines Elementes P

des gegebenen Körpers, dm dessen Masse, ξ, η, ζ die drei Coordinaten des materiellen Punktes O, μ dessen Masse, und endlich r der Abstand OP, wo folglich:

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2.$$

Die Anziehung des Elementes P auf den materiellen Punkt O wird dann nach §. 130 gleich:

$$K = \frac{k\mu\, dm}{r^2},$$

wo k ein constanter Coefficient ist, welcher die Intensität der Anziehungskraft bezeichnet, zur Einheit der Massen und des Abstandes hingeführt.

Die Kraft K wirkt längs der P und O verbindenden Geraden PO. Die Cosinus der drei Winkel, welche diese Gerade mit den drei Coordinaten bildet, sind:

$$\frac{\xi - x}{r},\ \frac{\eta - y}{r},\ \frac{\zeta - z}{r},$$

und die Componenten der Anziehungskraft K längs diesen drei Axen werden folglich:

$$k\mu\,\frac{\xi - x}{r^3}\,dm,\ k\mu\,\frac{\eta - y}{r^3}\,dm,\ k\mu\,\frac{\zeta - z}{r^3}\,dm.$$

Bezeichnet man jetzt durch A, B und C die drei Componenten der auf den Punkt O ausgeübten totalen Anziehungskraft, so findet man durch Integration:

$$A = k\mu \int \frac{\xi - x}{r^3}\,dm,\ B = k\mu \int \frac{\eta - y}{r^3}\,dm,\ C = k\mu \int \frac{\zeta - z}{r^3}\,dm,$$

wo die Integration auf alle Massenelemente des anziehenden Körpers ausgedehnt werden muss.

Bezeichnet man durch U die Kräftefunction (§. 18), wo:

$$U = \int (A d\xi + B d\eta + C d\zeta) = - k\mu \int \frac{dm}{r},$$

so können die drei Integrale A, B und C durch dieses einzige Integral U ausgedrückt werden, indem:

$$A = d_{\xi} U,\ B = d_{\eta} U,\ C = d_{\zeta} U.$$

Es ist hier zu bemerken, dass bei der Berechnung der Kräftefunction U, r immer positiv genommen werden muss.

§. 137.

Die Kräftefunction U, so wie auch ihre Differentialcoefficienten in Bezug auf ξ, η, ζ sind endliche und stetige Functionen dieser Variabeln, insofern die Dichtigkeit überall als endlich vorausgesetzt wird. Dass dies der Fall ist, wenn der angezogene Punkt ausserhalb des anziehenden Körpers liegt, und folglich $r > o$ ist, folgt unmittelbar aus den Formeln für U, A, B und C. Dass dies aber auch der Fall ist, wenn der angezogene Punkt selbst dem anziehenden Körper angehört, sieht man leicht, wenn man Polarcoordinaten einführt. Setzt man nämlich:

$$x = \xi + r \cos \varphi, \; y = \eta + r \sin \varphi \cos \psi, \; z = \zeta + r \sin \varphi \sin \psi,$$

wo φ den Winkel bezeichnet, welchen r mit der xAxe bildet, und ψ den Winkel, welchen die durch r und die xAxe gehende Ebene mit der xyEbene bildet. Es wird alsdann das Element des Volumens gleich: $r^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\psi \, dr$, und folglich, wenn man die Dichtigkeit im Punkte (x, y, z) mit D bezeichnet:

$$dm = Dr^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\psi \, dr,$$
$$U = -k\mu \int\int\int Dr \sin \varphi \, d\varphi \, d\psi \, dr,$$
$$A = d_\xi U = -k\mu \int\int\int D \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \, d\psi \, dr,$$
$$B = d_\eta U = -k\mu \int\int\int D \sin^2 \varphi \cos \psi \, d\varphi \, d\psi \, dr,$$
$$C = d_\zeta U = -k\mu \int\int\int D \sin^2 \varphi \sin \psi \, d\varphi \, d\psi \, dr,$$

woraus die Endlichkeit und Stetigkeit der Werthe von U und seinen Differentialcoefficienten hervorgeht.

Sucht man die zweiten Differentialcoefficienten von U, so findet man:

$$d_\xi^2 U = d_\xi A = -k\mu \int \left\{ \frac{3(\xi - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right\} dm,$$
$$d_\eta^2 U = d_\eta B = -k\mu \int \left\{ \frac{3(\eta - y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right\} dm,$$
$$d_\zeta^2 U = d_\zeta C = -k\mu \int \left\{ \frac{3(\zeta - z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right\} dm.$$

Hieraus findet man für den Fall, dass r nicht gleich Null wird, d. h. wenn der angezogene Punkt ausserhalb des anziehenden Körpers liegt:

$$d_\xi^2 U + d_\eta^2 U + d_\zeta^2 U = o.$$

Wenn dagegen der angezogene Punkt selbst einen Theil der anziehenden Masse bildet, so kann man sich eine unendlich kleine Kugel, welche diesen Punkt einschliesst, denken, und besonders die Kräftefunction U' dieser Kugel und diejenige U'' des übrigen Theils des Körpers suchen. Es wird alsdann $U = U' + U''$, wo U'' der obigen Differentialgleichung entspricht. Bezeichnet man durch a, b und c die Coordinaten des Mittelpunkts S jener Kugel (Fig. 49), durch R ihren Halbmesser, durch D die Dichtigkeit im angezogenen Punkte O und folglich auch in der ganzen unendlich kleinen Kugel, durch ϱ den Abstand SO des angezogenen Punktes O vom Mittelpunkte der Kugel, durch r den Abstand des anziehenden Elementes in P vom Mittelpunkte S, endlich durch ψ den von PS und SO gebildeten Winkel PSO, so wird:

$$PO = r = \sqrt{r^2 - 2r\varrho\cos\psi + \varrho^2}.$$

Bezeichnet man ferner durch φ den Winkel, welchen die Ebene PSO mit einer festen durch SO gelegten Ebene bildet, so wird:

$$dm = Dr^2 \sin\psi \, d\varphi \, d\psi \, dr,$$

und

$$U' = -k\mu D \iiint \frac{r^2 \sin\psi \, d\varphi \, d\psi \, dr}{\sqrt{r^2 - 2r\varrho\cos\psi + \varrho^2}},$$

wo die Integrationen in Bezug auf r von $r = o$ bis $r = R$, in Bezug auf ψ von $\psi = o$ bis $\psi = \pi$ und in Bezug auf φ von $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$ auszudehnen sind. Führt man die Integrationen aus, so erhält man:

$$U' = -2\pi k\mu D \int_o^R \left(\varrho + r - \sqrt{(r-\varrho)^2}\right)\frac{r\,dr}{\varrho},$$

wo für $\sqrt{(r-\varrho)^2}$ immer der positive Werth zu nehmen ist. Da hier $\varrho < R$ ist, so wird:

$$\int_0^R\left(\varrho + r - \sqrt{(r-\varrho)^2}\right)\frac{r\,d\,r}{\varrho} = \int_0^\varrho\left((\varrho + r) - (\varrho - r)\right)\frac{r\,d\,r}{\varrho}$$

$$+ \int_\varrho^R\left((\varrho + r) - (r - \varrho)\right)\frac{r\,d\,r}{\varrho}$$

$$= \int_0^\varrho \frac{2r^2\,d\,r}{\varrho} + \int_\varrho^R 2r\,d\,r$$

$$= \tfrac{2}{3}\varrho^2 + (R^2 - \varrho^2) = R^2 - \tfrac{1}{3}\varrho^2.$$

Substituirt man diesen Werth, so erhält man:

$$U' = -2\pi k\,\mu\,D\,(R^2 - \tfrac{1}{3}\varrho^2),$$

und weil: $\varrho^2 = (\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2$:

$$U' = -2\pi k\,\mu\,D\left(R^2 - \tfrac{1}{3}(\xi - a)^2 - \tfrac{1}{3}(\eta - b)^2 - \tfrac{1}{3}(\zeta - c)^2\right).$$

Hieraus findet man dann durch Differentiation:

$$d_\xi U' = \tfrac{4}{3}\pi k\,\mu\,D\,(\xi - a),\quad d_\xi^2 U' = \tfrac{4}{3}\pi k\,\mu\,D;$$

$$d_\eta U' = \tfrac{4}{3}\pi k\,\mu\,D\,(\eta - b),\quad d_\eta^2 U' = \tfrac{4}{3}\pi k\,\mu\,D;$$

$$d_\zeta U' = \tfrac{4}{3}\pi k\,\mu\,D\,(\zeta - c),\quad d_\zeta^2 U' = \tfrac{4}{3}\pi k\,\mu\,D;$$

und folglich: $\quad d_\xi^2 U' + d_\eta^2 U' + d_\zeta^2 U' = 4\pi k\,\mu\,D.$

Es ist für den übrigen Theil des anziehenden Körpers vorher gefunden, dass: $\quad d_\xi^2 U'' + d_\eta^2 U'' + d_\zeta^2 U'' = o,$

und man findet folglich durch Addition für einen inneren angezogenen Punkt:

$$d_\xi^2 U + d_\eta^2 U + d_\zeta^2 U = 4\pi k\,\mu\,D,$$

wo D die Dichtigkeit in dem angezogenen Punkte bezeichnet. Diese Formel kann als eine allgemeine bezeichnet werden, wenn man bei einem äusseren Punkte die Dichtigkeit als Null betrachtet. Auf der Oberfläche des anziehenden Körpers wird $d_\xi^2 U$ zwei Werthe haben, welche den zwei Grenzen des Verhältnisses $\frac{\Delta(d_\xi U)}{\Delta\xi}$ gleich sein werden, für einen unendlich kleinen, positiven oder negativen Werth von $\Delta\xi$. Ebenso werden auch $d_\eta^2 U$ und $d_\zeta^2 U$ zweideutige Werthe erhalten, und es wird folglich in diesem Falle der Ausdruck:

$$d_\xi^2 U + d_\eta^2 U + d_\zeta^2 U$$

acht verschiedene Werthe erhalten.

§. 138.

Wenn der Abstand des angezogenen Punktes O von dem anziehenden Körper sehr gross in Bezug auf die Ausdehnung dieses Körpers ist, so kann man bei der Berechnung der Kräftefunction U die Grösse $\frac{1}{r}$ in eine convergirende Reihe nach den Potenzen und Produkten der Coordinaten x, y und z entwickeln. Setzt man alsdann den Abstand:

$$CO = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{1}{2}} = R,$$

so wird:

$$\frac{1}{r} = \left(R^2 - 2(\xi x + \eta y + \zeta z) + (x^2 + y^2 + z^2)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{R} + \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{R^3} + \frac{3(\xi x + \eta y + \zeta z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) R^2}{2 R^5} + \ldots,$$

und folglich:

$$U = -k\mu \int \frac{dm}{r} = -k\mu \left\{ \frac{1}{R} \int dm + \frac{\xi}{R^3} \int x\, dm + \frac{\eta}{R^3} \int y\, dm + \frac{\zeta}{R^3} \int z\, dm \right.$$

$$+ \frac{3}{2R^5} \int (\xi x + \eta y + \zeta z)^2\, dm - \frac{1}{2R^3} \int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm$$

$$\left. + \ldots\ldots \right\}$$

Nimmt man jetzt an, der Anfangspunkt der Coordinaten C wäre der Schwerpunkt des anziehenden Körpers, so wird:

$$\int x\, dm = o, \int y\, dm = o, \int z\, dm = o.$$

Bezeichnet man jetzt durch M die ganze Masse des Körpers, so wird:

$$U = -k\mu \left\{ \frac{M}{R} + \frac{3}{2R^5} \int (\xi x + \eta y + \zeta z)^2\, dm - \frac{1}{2R^3} \int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm + \ldots \right\}$$

Ist jetzt der Abstand R sehr gross in Bezug auf die Coordinaten x, y, z, so kann man diesen Werth der Kräftefunction auf sein erstes Glied reduciren und hat folglich:

$$U = -k\mu \frac{M}{R}, \; A = k\mu \frac{M\xi}{R^3}, \; B = k\mu \frac{M\eta}{R^3}, \; C = k\mu \frac{M\zeta}{R^3}.$$

Die Resultante dieser drei Componenten der Anziehungskraft wird gleich $\frac{k\mu M}{R^2}$, und wirkt auf den Punkt O in der Richtung CO. Es folgt hieraus, dass, wenn der Abstand des angezogenen Punktes sehr gross in Bezug auf die Ausdehnung des anziehenden Körpers ist, die Anziehung annäherungsweise sowohl in Grösse wie in Richtung dieselbe ist, als wenn die ganze Masse dieses Körpers in seinem Schwerpunkt concentrirt wäre.

§. 139.

Es sei der anziehende Körper eine concentrische und homogene Kugelschicht (Fig. 50). Nehmen wir den Mittelpunkt C als Anfangspunkt der Coordinaten an. Es sei $CO = R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ gleich dem Abstand des angezogenen Punktes O vom Mittelpunkte, P ein Element der Kugelschicht, $CP = \varrho$ der Abstand dieses Elementes vom Mittelpunkte C, φ der Winkel, welchen diese Gerade mit CO bildet, und ψ der Winkel, welchen die Ebene CPO mit einer durch CO gehenden beliebigen festen Ebene bildet. Wir werden ferner durch a und b den äusseren und inneren Halbmesser der Kugelschicht bezeichnen, und endlich wie früher durch r den Abstand PO, durch ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes O, folglich die drei Projectionen des Abstandes R, endlich durch D die gleichförmige Dichtigkeit der Kugelschicht. Man hat jetzt:

$$dm = D\varrho^2 \sin\varphi \, d\varrho \, d\varphi \, d\psi,$$

$$r^2 = R^2 - 2R\varrho\cos\varphi + \varrho^2,$$

und hieraus die Kräftefunction:

$$U = -k\mu\int\frac{dm}{r} = -k\mu D\int\!\!\int\!\!\int\frac{\varrho^2 \sin\varphi \, d\varrho \, d\varphi \, d\psi}{\sqrt{R - 2R\varrho\cos\varphi + \varrho^2}},$$

wo die Integrationen auszuführen sind in Bezug auf ϱ von $\varrho = b$ bis $\varrho = a$; in Bezug auf φ von $\varphi = o$ bis $\varphi = \pi$; uud in Bezug auf ψ von $\psi = o$ bis $\psi = 2\pi$. Führt man jetzt gleich die Integration aus in Bezug auf ψ, so erhält man:

$$U = -2\pi k\mu D \int_b^a \left(\int_0^\pi \frac{\varrho \sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{R - 2R\varrho\cos\varphi + \varrho^2}} \right) \varrho \, d\varrho.$$

Es ist aber:

$$\int \frac{\varrho \sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{R^2 - 2R\varrho\cos\varphi + \varrho^2}} = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - 2R\varrho\cos\varphi + \varrho^2} + \text{Const},$$

wo das Wurzelzeichen immer positiv zu nehmen ist. Es wird folglich, wenn R grösser als oder gleich ϱ ist:

$$\int_0^\pi \frac{\varrho \sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{R - 2R\varrho\cos\varphi + \varrho^2}} = \frac{1}{R}\Big[(R+\varrho) - (R-\varrho)\Big] = \frac{2\varrho}{R},$$

wenn dagegen R kleiner als ϱ ist, so wird:

$$\int_0^\pi \frac{\varrho \sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{R^2 - 2R\varrho\cos\varphi + \varrho^2}} = \frac{1}{R}\Big[(\varrho + R) - (\varrho - R)\Big] = 2.$$

Substituirt man diese Werthe, so findet man:

a) Wenn der angezogene Punkt ausserhalb der Kugelschicht liegt oder auf deren äusseren Oberfläche, und folglich R immer grösser als ϱ ist (Fig. 50):

$$U = -2\pi k\mu D \int_b^a \frac{2\varrho^2 d\varrho}{R} = -\frac{4\pi k\mu D (a^3 - b^3)}{3R} = -\frac{k\mu M}{R},$$

wenn M die Masse der ganzen Kugelschicht bezeichnet. Substituirt man jetzt den Werth von R und differentirt in Bezug auf ξ, η und ζ, so findet man:

$$A = d_\xi U = \frac{k\mu M\xi}{R^3},\ B = d_\eta U = \frac{k\mu M\eta}{R^3},\ C = d_\zeta U = \frac{k\mu M\zeta}{R^3}.$$

Die Resultante dieser drei Componenten giebt die Anziehung der Kugelschicht gleich:

$$\frac{k\mu M}{R^3}\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \frac{k\mu M}{R^2}$$

und in der Richtung nach dem Mittelpunkte der Kugel hin wirkend. Die Anziehung einer homogenen und concentrischen Kugelschicht auf einen äusseren Punkt ist folglich dieselbe, als wenn die ganze Masse der Kugelschicht in ihrem Mittelpunkte concentrirt wäre.

b) Wenn der angezogene Punkt innerhalb der Kugelschicht liegt, und folglich R immer kleiner als ϱ ist (Fig. 51):

$$U = -2\pi k\mu D \int_b^a 2\varrho\, d\varrho = -2\pi k\mu D (a^2 - b^2).$$

Hieraus findet man die Componenten der Anziehung:

$$A = d_\xi U = o,\ B = d_\eta U = o,\ C = d_\zeta U = o.$$

Die Anziehung einer homogenen concentrischen Kugelschicht auf einen inneren Punkt ist folglich gleich Null.

c) Wenn der angezogene Punkt in der Kugelschicht selbst liegt, und folglich R > b aber R < a ist (Fig. 52). Es ist alsdann:

$$U = -2\pi k\mu D \left\{ \int_R^a \left(\int_o^\pi \frac{\varrho \sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{R^2 - 2R\varrho\cos\varphi + \varrho^2}} \right) \varrho\, d\varrho \right.$$
$$\left. + \int_b^R \left(\int_o^\pi \frac{\varrho \sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{R^2 - 2R\varrho\cos\varphi + \varrho^2}} \right) \varrho\, d\varrho \right\}.$$

Weil hier im ersten Integrale R immer kleiner als ϱ, im zweiten immer grösser als ϱ ist, so wird:

$$U = -2\pi k\mu D \left\{ \int_R^a 2\varrho\, d\varrho + \int_b^R \frac{2\varrho^2\, d\varrho}{R} \right\}$$
$$= -2\pi k\mu D \left\{ (a^2 - R^2) + \tfrac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - b^3}{R} \right\}$$
$$= -2\pi k\mu D \left\{ a^2 - \frac{R^3 + 2b^3}{3R} \right\}.$$

Hieraus findet man dann die Componenten der Anziehung:

$$A = d_\xi U = \tfrac{4}{3}\pi k\mu D \cdot \frac{(R^3 - b^3)\xi}{R^3},$$
$$B = d_\eta U = \tfrac{4}{3}\pi k\mu D \cdot \frac{(R^3 - b^3)\eta}{R^3},$$
$$C = d_\zeta U = \tfrac{4}{3}\pi k\mu D \cdot \frac{(R^3 - b^3)\zeta}{R^3},$$

und folglich die totale Anziehung gleich:

$$\tfrac{4}{3}\pi k\mu D \cdot \frac{R^3 - b^3}{R^3}\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \tfrac{4}{3}\pi k\mu D \cdot \frac{R^3 - b^3}{R^2},$$

und es wirkt dieselbe in der Richtung nach dem Mittelpunkte hin.

Zu derselben Formel kommt man auch, wenn man die Kugelschicht mit Hülfe einer durch den angezogenen Punkt gehenden Kugeloberfläche in zwei concentrische Schichten theilt, so übt die äussere Schicht auf den Punkt keine Wirkung aus, sondern dieser wird nur von der inneren Schicht, deren Masse $\frac{4}{3}\pi D (R^3 - b^3)$ ist, angezogen.

Ist $b = o$, oder die Kugel voll, so wird die Anziehung gleich: $\frac{4}{3}\pi k\mu DR$, d. h. die Anziehung einer homogenen Kugel auf einen inneren Punkt ist dem Abstand dieses Punktes vom Mittelpunkte direct proportional.

§. 140.

Die in dem vorigen Paragraphen entwickelten Werthe der Kräftefunction U und der Anziehung hätten auch aus der Formel:

$$d_\xi^2 U + d_\eta^2 U + d_\zeta^2 U = o,$$

oder:

$$d_\xi^2 U + d_\eta^2 U + d_\zeta^2 U = 4\pi k\mu D,$$

je nachdem der angezogene Punkt ausserhalb des anziehenden Körpers liegt oder einen Theil derselben ausmacht, hergeleitet werden können.

Die Gleichung: $R^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ giebt nämlich:

$$d_\xi R = \frac{\xi}{R},\ d_\eta R = \frac{\eta}{R},\ d_\zeta R = \frac{\zeta}{R};$$

$$d_\xi^2 R = \frac{1}{R} - \frac{\xi^2}{R^3},\ d_\eta^2 R = \frac{1}{R} - \frac{\eta^2}{R^3},\ d_\zeta^2 R = \frac{1}{R} - \frac{\zeta^2}{R^3};$$

und folglich:

$$d_\xi^2 U = d_R^2 U \cdot (d_\xi R)^2 + d_R U \cdot d_\xi^2 R = \frac{\xi^2}{R^2} \cdot d_R^2 U + \frac{1}{R} \cdot d_R U - \frac{\xi^2}{R^3} \cdot d_R U,$$

$$d_\eta^2 U = d_R^2 U \cdot (d_\eta R)^2 + d_R U \cdot d_\eta^2 R = \frac{\eta^2}{R^2} \cdot d_R^2 U + \frac{1}{R} \cdot d_R U - \frac{\eta^2}{R^3} \cdot d_R U,$$

$$d_\zeta^2 U = d_R^2 U \cdot (d_\zeta R)^2 + d_R U \cdot d_\zeta^2 R = \frac{\zeta^2}{R^2} \cdot d_R^2 U + \frac{1}{R} \cdot d_R U - \frac{\zeta^2}{R^3} \cdot d_R U.$$

Hieraus findet man dann durch Addition:

$$d_\xi^2 U + d_\eta^2 U + d_\zeta^2 U = d_R^2 U + \frac{2}{R} d_R U,$$

und man hat folglich für einen Punkt, welcher nicht einen Theil des anziehenden Körpers ausmacht:

$$d_R^2 U + \frac{2}{R} d_R U = o,$$

und für einen Punkt der Kugelschicht selbst:

$$d_R^2 U + \frac{2}{R} d_R U = 4\pi k\mu D.$$

Da die Kugelschicht rings um den Abstand R symmetrisch liegt, so muss die Kräftefunction nur eine Function von R sein, und die Anziehung wird längs der Geraden R wirken und gleich $d_R U$ sein. Die obigen Differentialgleichungen werden folglich vollständige Differentialgleichungen, und geben durch Multiplication mit R^2 und Integration, für den Fall, dass der angezogene Punkt nicht einen Theil der anziehenden Kugelschicht ausmacht:

$$R^2 d_R U = \text{const.},$$

dagegen, wenn der angezogene Punkt einen Theil der anziehenden Kugelschicht bildet:

$$R^2 d_R U = 4\pi k\mu D \int R^2 dR = \tfrac{4}{3}\pi k\mu D R^3 + \text{const.}$$

Es sei jetzt der angezogene Punkt ganz innerhalb der Kugelschicht gelegen, oder $R < b$. Man hat alsdann: $R^2 d_R U = \text{const}$, und die Anziehung gleich:

$$d_R U = \frac{\text{const}}{R^2}.$$

Um hier die Constante zu bestimmen, kann man bemerken, dass wenn $R = o$, oder wenn der angezogene Punkt im Mittelpunkte liegt, die Anziehung $d_R U$ gleich Null sein muss; man muss folglich hier immer $\text{const} = o$, und folglich auch immer in diesem Falle die Anziehung gleich Null haben. Da die Anziehung eine continuirliche Function von R ist, so muss dies noch gelten, wenn $R = b$ ist, d. h. wenn der angezogene Punkt auf der inneren Fläche der Kugelschicht liegt.

Es sei jetzt der angezogene Punkt selbst ein Theil der anziehenden Kugelschicht. Es wird alsdann die Anziehung:

$$d_R U = \tfrac{4}{3}\pi k\mu D \frac{R^3 + const}{R^2}.$$

Diese Anziehung soll jetzt wegen ihrer Continuirlichkeit sich Null nähern, wenn R sich b nähert, und es muss darum const $= - b^3$ angenommen werden, und folglich:

$$d_R U = \tfrac{4}{3}\pi k\mu D \frac{R^3 - b^3}{R^2}$$

sein. Auf die äussere Oberfläche, oder wenn $R = a$, wird die Anziehung gleich:

$$\tfrac{4}{3}\pi k\mu D \frac{a^3 - b^3}{a^2} = \frac{k\mu M}{a^2}.$$

Es sei endlich der angezogene Punkt ganz ausserhalb der Kugelschicht gelegen, oder $R > a$, so hat man wieder:

$$d_R U = \frac{const}{R^2}.$$

Setzt man hier $R = o$, so muss dieser Ausdruck gleich dem vorher gefundenen Werthe der Anziehung auf der äusseren Oberfläche der Kugelschicht sein, oder:

$$\frac{const}{a^2} = \frac{k\mu M}{a^2},$$

woraus const $= k\mu M$ und die Anziehung:

$$d_R U = \frac{k\mu M}{R^2}.$$

Die auf diesem Wege für die verschiedene Lage des angezogenen Punktes gefundenen Werthe der Anziehung stimmen ganz mit den im vorigen Paragraphen gefundenen überein.

§. 141.

Dieselben Sätze der Anziehung gelten auch von einer aus concentrischen homogenen Schichten verschiedener Dichtigkeit bestehenden Kugel. Die Anziehung wird nämlich gleich der Summe der Anziehungen aller einzelnen Schichten sein. Wenn der angezogene Punkt ausserhalb der Kugel liegt, wird die Anziehungskraft dieselbe sein, als wäre die ganze Masse der Kugel in ihrem Mittel-

punkte vereinigt; wie die Dichtigkeit sich von einer Schicht zur anderen ändert, ist ohne Einfluss. Wenn der angezogene Punkt in der Kugel selbst liegt, kann man sich durch diesen Punkt eine concentrische Kugeloberfläche construirt denken; die Anziehung der äusseren Kugelschicht wird dann gleich Null, und nur diejenige der inneren Kugel zu berücksichtigen. In diesem Falle ist aber, um eine allgemeine Formel der Anziehung zu entwickeln, nothwendig, das Gesetz zu kennen, wie die Dichtigkeit sich von einer Schicht zur anderen ändert.

Es nehme z. B. die Dichtigkeit in einer arithmetischen Reihe vom Mittelpunkte aus ab; sie sei im Mittelpunkte gleich D_0, und im Abstande r vom Mittelpunkte gleich $D_0 - cr$. Es sei wie vorher a der Halbmesser der Kugel, R der Abstand des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte und $R < a$. Die Masse des Kugelkernes, auf welchem der angezogene Punkt liegt, wird dann gleich:

$$4\pi \int_0^R r^2 (D_0 - cr)\, dr = \tfrac{4}{3}\pi R^3 (D_0 - \tfrac{3}{4} cR).$$

Diese Masse, im Mittelpunkte concentrirt, wird eine Anziehung gleich:

$$\frac{k\mu}{R^2}\left[\tfrac{4}{3}\pi R^3 (D_0 - \tfrac{3}{4} cR)\right] = \tfrac{4}{3}\pi k\mu R (D_0 - \tfrac{3}{4} cR)$$

ausüben, und diese Anziehung wird dann der Anziehung der ganzen Kugel gleich sein. Die Anziehung auf einen inneren Punkt wird folglich unter der Voraussetzung einer vom Mittelpunkte aus gleichmässig abnehmenden Dichtigkeit gleich der Differenz zweier Glieder sein, von denen das erste dem einfachen Abstande des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte, das zweite dem Quadrate dieses Abstandes proportional ist.

§. 142.

Es sei der anziehende Körper ein homogenes Ellipsoid, dessen Oberfläche durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

bestimmt ist. Wir werden die in dem vorigen Paragraphen be-

nutzten Bezeichnungen auch hier anwenden und zuerst die Kräftefunction:

$$U = -k\mu\int\frac{dm}{r} = -k\mu D\int\int\int\frac{dx\,dy\,dz}{r}$$

suchen, wo die Integrationen auf alle Werthe von x, y und z auszudehnen sind, welche der Ungleichheit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1$$

entsprechen.

Um dieses Integral zu bestimmen, kann man nach einer von Lejeune-Dirichlet zuerst angegebenen Methode, die Grenzen des Integrals erst erweitern, indem man jenen Ausdruck mit der Grösse:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos\left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\varphi\right].\,d\varphi$$

multiplicirt, welche Grösse gleich der Einheit ist, wenn der Factor $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ kleiner als die Einheit ist, aber gleich Null, wenn dieser Factor die Einheit übertrifft (Moigno, Calcul intégral, pag. 269). Man erhält folglich:

$$U = -\frac{2k\mu D}{\pi}\int_0^\infty d\varphi\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}\int\int\int\cos\left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\varphi\right]\frac{dx\,dy\,dz}{r},$$

wo die Integrationen in Bezug auf x, y und z jetzt von $-\infty$ bis $+\infty$ ausgedehnt werden können.

Um die Rechnung zu vereinfachen, kann man jetzt statt des vorigen Integrals das folgende, dessen reeller Theil damit zusammenfällt, betrachten:

$$U' = -\frac{2k\mu D}{\pi}\int_0^\infty d\varphi\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}\int\int\int e^{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\varphi\sqrt{-1}}.\,\frac{dx\,dy\,dz}{r}.$$

Um hier die veränderliche Grösse r auch nur im Exponenten zu haben, kann man das bestimmte Integral:

$$\int_0^\infty \frac{e^{r^2\psi\sqrt{-1}}\,d\psi}{\sqrt{\psi}} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}}{r}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}\,(1+\sqrt{-1})}{r\sqrt{2}},$$

(Moigno, Calcul intégral, pag. 309), benutzen, woraus:

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,(1+\sqrt{-1})}\int_0^\infty \frac{e^{r^2\psi\sqrt{-1}}}{\sqrt{\psi}}\,d\psi.$$

Substituirt man diesen Werth von $\frac{1}{r}$, so erhält man: $U' =$

$$-\frac{2\sqrt{2}\,k\mu D}{\pi\sqrt{\pi}\,(1+\sqrt{-1})}\int_0^\infty\int_0^\infty d\varphi\, d\psi\,\frac{\sin\varphi}{\varphi\sqrt{\psi}}\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\varphi + r^2\psi\right]\sqrt{-1}}\,.\,dx\,dy\,dz,$$

oder, wenn man statt r^2 seinen Werth, $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$, setzt:

$$U' = -\frac{2\sqrt{2}\,k\mu D}{\pi\sqrt{\pi}\,(1+\sqrt{-1})}\int_0^\infty\int_0^\infty d\varphi\, d\psi\,\frac{\sin\varphi}{\varphi\sqrt{\psi}}\, e^{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\psi\sqrt{-1}}$$

$$.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{a^2}\right)x^2 - 2\xi\psi x\right]\sqrt{-1}}\,dx\,.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{b^2}\right)y^2 - 2\eta\psi y\right]\sqrt{-1}}\,dy$$

$$.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{c^2}\right)z^2 - 2\zeta\psi z\right]\sqrt{-1}}\,dz.$$

Es ist aber jetzt (Moigno, Calcul intégral, pag. 310):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{a^2}\right)x^2 - 2\xi\psi x\right]\sqrt{-1}}\,.\,dx = \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\psi+\frac{\varphi}{a^2}}}\cdot e^{\frac{-\xi^2\psi^2}{\psi+\frac{\varphi}{a^2}}\sqrt{-1}},$$

und ebenso findet man die Werthe der zwei anderen ähnlichen Integrale. Substituirt man diese Werthe und reducirt, so erhält man:

$$U' = -2k\mu D\sqrt{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty d\varphi\, d\psi\, \frac{\sin\varphi}{\varphi\sqrt{\psi}}\,.\,\frac{e^{\left[\frac{\xi^2}{\varphi+a^2\psi}+\frac{\eta^2}{\varphi+b^2\psi}+\frac{\zeta^2}{\varphi+c^2\psi}\right]\varphi\psi\sqrt{-1}}}{\sqrt{\left(\psi+\frac{\varphi}{a^2}\right)\left(\psi+\frac{\varphi}{b^2}\right)\left(\psi+\frac{\varphi}{c^2}\right)}}.$$

Dieses Integral kann vereinfacht werden, wenn man statt ψ eine neue Variable s einführt, wo $s = \frac{\varphi}{\psi}$ ist. Setzt man dann der Kürze wegen:

$$S = \frac{\xi^2}{a^2+s} + \frac{\eta^2}{b^2+s} + \frac{\zeta^2}{c^2+s},$$

so wird:

$$U' = -2k\mu D\sqrt{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty d\varphi\, ds\,.\,\frac{\sin\varphi}{\varphi^2}\,.\,\frac{e^{S\varphi\sqrt{-1}}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)}}.$$

Der reelle Theil dieses Ausdrucks wird dann:

$$U = 2k\mu D\int_0^\infty\int_0^\infty d\varphi\, ds\,.\,\frac{\sin\varphi}{\varphi^2}\,.\,\frac{\sin(S\varphi)}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)}}.$$

Differentiirt man hier in Bezug auf ξ, so erhält man die Componente der Anziehung längs der xAxe:

$$A = \frac{4k\mu D\xi}{a^2}\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)}}\int_0^\infty \frac{\cos(S\varphi)\sin\varphi\, d\varphi}{\varphi}.$$

Es ist jetzt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(S\varphi)\sin\varphi\, d\varphi}{\varphi} = \frac{\pi}{2},$$

wenn $S < 1$, und

$$\int_0^\infty \frac{\cos(S\varphi)\sin\varphi\, d\varphi}{\varphi} = 0,$$

wenn $S > 1$ (Moigno, Calcul intégral, pag. 269), und es sind folglich besonders zwei Fälle zu unterscheiden, wenn der angezogene Punkt ein innerer oder ein äusserer Punkt ist.

1) Für einen inneren angezogenen Punkt hat man:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} < 1,$$

und folglich auch:

$$S = \frac{\xi^2}{a^2 + s} + \frac{\eta^2}{b^2 + s} + \frac{\zeta^2}{c^2 + s} < 1,$$

woraus:

$$\int_0^\infty \frac{\cos (S\varphi) \sin \varphi \, d\varphi}{\varphi} = \frac{\pi}{2},$$

und

$$A = \frac{2\pi k\mu D\xi}{a^2} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right)^3 \left(1 + \frac{s}{b^2}\right) \left(1 + \frac{s}{c^2}\right)}}.$$

2) **Für einen äusseren angezogenen Punkt hat man:**

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} > 1,$$

und folglich $S > 1$ für $s = 0$, und bis auf einen Werth von s, welcher der Gleichung:

$$S = \frac{\xi^2}{a^2 + s} + \frac{\eta^2}{b^2 + s} + \frac{\zeta^2}{c^2 + s} = 1$$

entspricht; von da ab und bis $s = \infty$ wird dagegen $S < 1$. Bezeichnen wir durch s_1 die einzige positive Wurzel dieser Gleichung, so wird man die Integration in Bezug auf s nur von $s = s_1$ bis $s = \infty$ auszuführen haben, und es wird folglich in diesem Falle:

$$A = \frac{2\pi k\mu D\xi}{a^2} \int_{s_1}^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right)^3 \left(1 + \frac{s}{b^2}\right) \left(1 + \frac{s}{c^2}\right)}}.$$

Ebenso findet man die zwei anderen Componenten der Anziehung:

$$B = \frac{2\pi k\mu D\eta}{b^2} \int \frac{ds}{\sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right) \left(1 + \frac{s}{b^2}\right)^3 \left(1 + \frac{s}{c^2}\right)}},$$

$$C = \frac{2\pi k\mu D\zeta}{c^2} \int \frac{ds}{\sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right) \left(1 + \frac{s}{b^2}\right) \left(1 + \frac{s}{c^2}\right)^3}},$$

wo die Integrationen für einen inneren Punkt von o bis ∞, für einen äusseren von s_1 bis ∞ auszudehnen sind.

Diese Integrale können auf elliptische Integrale erster und dritter Gattung nach den gewöhnlichen Reductionsmethoden zurückgeführt werden.

§. 143.

Die Anziehung eines Ellipsoids auf einen inneren Punkt wird nicht verändert, wenn auch die Axen in gleichem Verhältnisse wachsen oder abnehmen. Man suche nämlich nach den im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln die Componenten der Anziehung eines Ellipsoids, dessen Halbaxen $(1+\delta)a$, $(1+\delta)b$, $(1+\delta)c$ sind, auf einen inneren Punkt. Die Anziehung längs der xAxe wird dann:

$$A' = \frac{2\pi k\mu D\xi}{(1+\delta)^2 a^2}\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{(1+\delta)^2 a^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{(1+\delta)^2 b^2}\right)\left(1+\frac{s}{(1+\delta)^2 c^2}\right)}}.$$

Setzt man hier $\frac{s}{(1+\delta)^2} = \sigma$, und bemerkt, dass, wenn $s = \infty$, auch $\sigma = \infty$, und wenn $s = 0$, auch $\sigma = 0$ ist, so findet man:

$$A' = \frac{2\pi k\mu D\xi}{a^2}\int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sqrt{\left(1+\frac{\sigma}{a^2}\right)^3\left(1+\frac{\sigma}{b^2}\right)\left(1+\frac{\sigma}{c^2}\right)}},$$

folglich genau denselben Werth, wie wenn die Axen des Ellipsoids a, b, c wären.

Es geht hieraus hervor, dass eine ellipsoidische homogene Schicht, welche durch zwei gleichförmige Ellipsoide mit proportionalen Axen begrenzt wird, keine Wirkung auf einen innerhalb der Schicht gelegenen Punkt ausübt.

Sucht man dagegen die Anziehung des zweiten Ellipsoides, dessen Halbaxen $(1+\delta)a$, $(1+\delta)b$, $(1+\delta)c$ sind, auf einen äusseren Punkt, so findet man die Componente dieser Anziehung längs der xAxe:

$$A' = \frac{2\pi k\mu D\xi}{(1+\delta)^2 a^2}\int_{s_1}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{(1+\delta)^2 a^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{(1+\delta)^2 b^2}\right)\left(1+\frac{s}{(1+\delta)^2 c^2}\right)}},$$

wo s_1 die einzige reelle Wurzel der Gleichung:

$$\frac{\xi^2}{(1+\delta)^2 a^2+s} + \frac{\eta^2}{(1+\delta)^2 b^2+s} + \frac{\zeta^2}{(1+\delta)^2 c^2+s} = 1$$

ist. Setzt man jetzt $\frac{s}{(1+\delta)^2} = \sigma$, so wird der Grenze $s = \infty$ auch $\sigma = \infty$ entsprechen, und zu $s = s_1$, $\sigma = \sigma_1$ gehören, wo σ_1 die reelle Wurzel der Gleichung:

$$\frac{\xi_1^2}{a^2+\sigma} + \frac{\eta_1^2}{b^2+\sigma} + \frac{\zeta_1^2}{c^2+\sigma} = 1$$

ist, und

$$\xi_1 = \frac{\xi}{(1+\delta)},\ \eta_1 = \frac{\eta}{(1+\delta)},\ \zeta_1 = \frac{\zeta}{(1+\delta)}.$$

Man erhält dann:

$$A' = 2\pi k\mu D(1+\delta)\,\xi_1\int_{\sigma_1}^{\infty}\frac{d\sigma}{\sqrt{\left(1+\frac{\sigma}{a^2}\right)^3\left(1+\frac{\sigma}{b^2}\right)\left(1+\frac{\sigma}{c^2}\right)}},$$

oder

$$A' = (1+\delta)\,A,$$

wenn A die Componente der Anziehung eines Ellipsoides, dessen Halbaxen a, b und c sind, auf einen Punkt, dessen Coordinaten ξ_1, η_1 und ζ_1 sind, bezeichnet. Auf dieselbe Weise erhält man:

$$B' = (1+\delta)\,B,\ C' = (1+\delta)\,C.$$

Wenn folglich sowohl die Axen des Ellipsoids, wie auch der Abstand des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte in einem gewissen Verhältnisse wachsen, und die gerade Linie, welche den Punkt mit dem Mittelpunkte verbindet, dieselbe Richtung gegen die Axen behält, so wachsen auch die Componenten der Anziehung und folglich auch die Anziehung selbst in demselben Verhältnisse.

§. 144.

Wenn das gegebene Ellipsoid ein Umdrehungsellipsoid ist, so können die elliptischen Integrale auf Kreisfunctionen oder auf logarithmische Functionen reducirt werden. Es sei die xAxe die Umdrehungsaxe und folglich b = c. Es wird alsdann:

$$A = \frac{2\pi\, k\mu\, D\xi}{a^2} \int \frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)^3 \left(1+\frac{s}{b^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{2\pi\, k\mu\, D\xi}{a^2} \int \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\sqrt{1+\frac{s}{a^2}}}.$$

Die Integration wird jetzt verschieden auszuführen sein, je nachdem $a > b$ oder $a < b$ ist. Es sei erst $a > b$. Es wird alsdann:

$$\int \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\sqrt{1+\frac{s}{a^2}}} = 2a^2 \left\{ \frac{ab^2}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2+s}} \right.$$

$$\left. - \frac{ab^2}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}} \log nat \left(\frac{\sqrt{a^2+s} + \sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+s} - \sqrt{a^2-b^2}} \right) \right\} + Const.$$

Für einen inneren angezogenen Punkt, wo die Grenzen der Integration o und ∞ sind, wird folglich:

$$A = 4\pi\, k\mu\, D\, b^2 \xi \left\{ \frac{a}{2(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}} \log nat \left(\frac{a + \sqrt{a^2-b^2}}{a - \sqrt{a^2-b^2}} \right) - \frac{1}{a^2-b^2} \right\}.$$

Für einen äusseren angezogenen Punkt, wo die Grenzen der Integrationen s_1 und ∞ sind, wird:

$$A = 4\pi\, k\mu\, D\, b^2\, \xi \left\{ \frac{a}{2(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}} \log nat \left(\frac{\sqrt{a^2+s_1} + \sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+s_1} - \sqrt{a^2-b^2}} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{a}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2+s_1}} \right\},$$

wo s_1 durch die Gleichung zweiten Grades:

$$\frac{\xi^2}{a^2+s_1} + \frac{\eta^2+\zeta^2}{b^2+s_1} = 1$$

bestimmt ist.

Wenn $a < b$, so wird:

$$\int \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\sqrt{1+\frac{s}{a^2}}} = 2a^2 \left\{ \frac{ab^2}{(b^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc}\left(\tang = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{a^2+s}} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{ab^2}{(b^2-a^2)\sqrt{a^2+s}} \right\} + Const,$$

woraus für einen inneren angezogenen Punkt:

$$A = 4\pi k\mu D b^2 \xi \left\{ \frac{1}{b^2 - a^2} - \frac{a}{(b^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right) \right\},$$

und für einen äusseren angezogenen Punkt:

$$A = 4\pi k\mu D b^2 \xi \left\{ \frac{a}{(b^2-a^2)\sqrt{a^2+s_1}} - \frac{a}{(b^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{a^2+s_1}}\right) \right\}.$$

Die zwei anderen Componenten des Umdrehungsellipsoids werden durch die Formel:

$$\frac{B}{\eta} = \frac{C}{\zeta} = \frac{2\pi k\mu D}{b^2} \int \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{b^2}\right)^2 \sqrt{1+\frac{s}{a^2}}},$$

bestimmt. Es ist jetzt, wenn $a > b$:

$$\int \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{b^2}\right)^2 \sqrt{1+\frac{s}{a^2}}} = 2a^2 b^4 \left\{ \frac{1}{4a(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}} \log\operatorname{nat} \left(\frac{\sqrt{s+a^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{s+a^2}-\sqrt{a^2-b^2}} \right) - \frac{\sqrt{s+a^2}}{2a(a^2-b^2)\sqrt{s+b^2}} \right\} + \text{Const},$$

und es wird folglich in diesem Falle für einen inneren angezogenen Punkt:

$$\frac{B}{\eta} = \frac{C}{\zeta} = 4\pi k\mu D a^2 b^2 \left\{ \frac{1}{2b^2(a^2-b^2)} - \frac{1}{4a(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}} \log\operatorname{nat} \left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} \right) \right\},$$

und für einen äusseren Punkt:

$$\frac{B}{\eta} = \frac{C}{\zeta} = 4\pi k\mu D a^2 b^2 \left\{ \frac{\sqrt{s_1+a^2}}{2a(a^2-b^2)(s_1+b^2)} - \frac{1}{4a(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}} \log\operatorname{nat} \left(\frac{\sqrt{s_1+a^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{s_1+a^2}-\sqrt{a^2-b^2}} \right) \right\}.$$

Wenn $a < b$ ist, so wird:

$$\int \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{b^2}\right)^2 \sqrt{1+\frac{s}{a^2}}} = 2a^2 b^4 \left\{ \frac{\sqrt{s+a^2}}{2a(b^2-a^2)(s+b^2)} - \frac{1}{2a(b^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{s+a^2}}\right) \right\},$$

und folglich für einen inneren angezogenen Punkt:

$$\frac{B}{\eta} = \frac{C}{\zeta} = 4\pi k\mu D a^2 b^2 \left\{ \frac{1}{2a(b^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right) - \frac{1}{2(b^2-a^2)b^2} \right\},$$

und für einen äusseren Punkt:

$$\frac{B}{\eta} = \frac{C}{\zeta} = 4\pi k\mu D a^2 b^2 \left\{ \frac{1}{2a(b^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{a^2+s_1}}\right) - \frac{\sqrt{a^2+s_1}}{2a(b^2-a^2)(b^2+s_1)} \right\}.$$

Die beiden Componenten B und C können, weil $\frac{B}{\eta} = \frac{C}{\zeta}$ ist, zu einer Kraft zusammengesetzt werden, welche längs der Senkrechten fällt, welche von dem angezogenen Punkte auf die Umdrehungsaxe gezogen wird. Ihre Grösse wird, wenn man die Länge dieser Senkrechten mit δ bezeichnet:

$$B' = \sqrt{B^2 + C^2} = \frac{B}{\eta}\sqrt{\eta^2 + \zeta^2} = \frac{B}{\eta}\delta.$$

Es sei die Excentricität der Ellipse sehr klein. Wenn $a > b$, setze man $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} = e$, $a^2 = b^2(1+e^2)$, wo e eine sehr kleine Grösse ist. Man findet dann:

$$A = \frac{4\pi k\mu D\xi}{e^2}\left\{ \frac{\sqrt{1+e^2}}{2e} \log\operatorname{nat}\left(\frac{\sqrt{b^2(1+e^2)+s_1}+be}{\sqrt{b^2(1+e^2)+s_1}-be}\right) - \frac{b\sqrt{1+e^2}}{\sqrt{b^2(1+e^2)+s_1}} \right\},$$

$$B' = \frac{4\pi k\mu D\delta}{e^2}\left\{ \frac{b\sqrt{1+e^2}\sqrt{b^2(1+e^2)+s_1}}{2(b^2+s_1)} - \frac{\sqrt{1+e^2}}{4e} \log\operatorname{nat}\left(\frac{\sqrt{b^2(1+e^2)+s_1}+be}{\sqrt{b^2(1+e^2)+s_1}-be}\right) \right\},$$

wo für einen inneren Punkt $s_1 = 0$, für einen äusseren Punkt s_1 durch die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{b^2(1+e^2)+s_1}+\frac{\delta^2}{b^2+s_1}=1$$

bestimmt ist. Entwickelt man hier nach den steigenden Potenzen von e^2 und vernachlässigt die höheren Potenzen, so findet man:

$$s_1=(\xi^2+\delta^2-b^2)-\frac{b^2\xi^2e^2}{\xi^2+\delta^2},$$

oder, wenn man $\xi^2+\delta^2=R^2$ setzt, wo R den Abstand des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte des Ellipsoids bezeichnet:

$$s_1=R^2-b^2-\frac{b^2\xi^2e^2}{R^2}.$$

Entwickelt man jetzt die obigen Formeln der Anziehung nach den steigenden Potenzen von e^2 und vernachlässigt die höheren Potenzen, so findet man:

1) Für einen inneren angezogenen Punkt, wenn folglich $s_1=o$ ist:

$$A=\tfrac{4}{3}\pi k\mu D\xi\left(1-\tfrac{2}{5}e^2\right),\ B'=\tfrac{4}{3}\pi k\mu D\delta\left(1+\tfrac{1}{5}e^2\right).$$

2) Für einen äusseren angezogenen Punkt, wenn man den oben gefundenen Werth von s_1 substituirt:

$$A=\tfrac{4}{3}\pi k\mu D.\frac{b^3\xi}{R^3}\left\{1+\left(\tfrac{1}{2}+\frac{3b^2}{5R^2}-\frac{3b^2\delta^2}{2R^4}\right)e^2\right\},$$

$$B'=\tfrac{4}{3}\pi k\mu D.\frac{b^3\delta}{R^3}\left\{1+\left(\tfrac{1}{2}+\frac{6b^2}{5R^2}-\frac{3b^2\delta^2}{2R^4}\right)e^2\right\}.$$

Es sei dagegen jetzt $a>b$, oder das Umdrehungsellipsoid ein flachgedrücktes. Man setze dann: $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}=e$, oder $b^2=a^2(1+e^2)$, und man erhält:

$$A=\frac{4\pi k\mu D\xi(1+e^2)}{e^2}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+s_1}}-\frac{1}{e}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{ae}{\sqrt{a^2+s_1}}\right)\right\},$$

$$B'=\frac{4\pi k\mu D\delta(1+e^2)}{e^2}\left\{\frac{1}{2e}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{ae}{\sqrt{a^2+s_1}}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{a\sqrt{a^2+s_1}}{2\left(a^2(1+e^2)+s_1\right)}\right\},$$

wo für einen inneren Punkt $s_1 = o$, für einen äusseren Punkt aber s_1 durch die Gleichung:

$$\frac{\xi^2}{a^2 + s_1} + \frac{\delta^2}{a^2(1+e^2)+s_1} = 1$$

bestimmt ist. Aus dieser Gleichung findet man dann, wenn man die höheren Potenzen von e^2 vernachlässigt:

$$s_1 = (\xi^2 + \delta^2 - a^2) - \frac{a^2 d^2 e^2}{\xi^2 + \delta^2} = R^2 - a^2 - \frac{a^2 \delta^2 e^2}{R^2}.$$

Entwickelt man jetzt die obigen Formeln der Anziehung nach den steigenden Potenzen von e^2 und vernachlässigt die höheren Potenzen, so findet man:

1) Für einen inneren angezogenen Punkt, wenn folglich $s_1 = o$ ist:

$$A = \tfrac{4}{3}\pi k \mu D \xi (1 + \tfrac{2}{5}e^2), \quad B' = \tfrac{4}{3}\pi k \mu D \delta (1 - \tfrac{1}{5}e^2).$$

2) Für einen äusseren angezogenen Punkt wird:

$$A = \tfrac{4}{3}\pi k \mu D \,.\, \frac{a^3 \xi}{R^3} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{3a^2}{5R^2} + \frac{3a^2\delta^2}{2R^4}\right) e^2 \right\},$$

$$B' = \tfrac{4}{3}\pi k \mu D \,.\, \frac{a^3 \delta}{R^3} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{6a^2}{5R^2} + \frac{3a^2\delta^2}{2R^4}\right) e^2 \right\}.$$

§. 145.

Wir werden jetzt die Anziehung der Erde auf einen äusseren Punkt suchen, wenn auf ihre Umdrehungsbewegung Rücksicht genommen wird.

Die Form der Erde ist theilweise durch Messungen bestimmt, welche gezeigt haben, dass sie annäherungsweise als ein flachgedrücktes Umdrehungsellipsoid angesehen werden kann, dessen Umdrehungsaxe α gleich 20250000 pr. Fuss, und dessen Aequatoraxe β gleich 20320000 pr. Fuss ist. Es wird folglich die Excentricität: $\varepsilon = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\alpha} = 0{,}082$. Wenn hier von der Form der Erde gesprochen wird, ist dadurch die Form der Meeresoberfläche zu verstehen, und diese durch Nivellirung unter der erhöheten Landmasse fortgesetzt zu denken.

Von der inneren Structur der Erde, die äusserste Schicht ausgenommen, kennen wir nichts, ausser dass die Dichtigkeit im Innern viel grösser wie auf der Oberfläche sein muss, indem die mittlere Dichtigkeit der Erde doppelt so gross gefunden ist, wie die der auf der Oberfläche am häufigsten vorkommenden Mineralien. Die natürlichste Voraussetzung über die innere Structur der Erde scheint die zu sein, dass sie aus Schichten verschiedener Dichtigkeit besteht, welche durch concentrische Umdrehungsellipsoide verschiedener, aber immer sehr kleiner Excentricität begrenzt wird.

Um die Anziehung eines solchen Ellipsoids zu finden, suchen wir erst die einer unendlich dünnen Schicht, deren Umdrehungsaxe gleich a, Dicke gleich da, Excentricität gleich e und Dichtigkeit gleich D ist. Die Componenten dieser Anziehung findet man, wenn man die am Ende des vorigen Paragraphen gegebenen Formeln in Bezug auf a differentiirt, und D und e als constante Grössen ansieht. Man erhält dann:

$$dA = \frac{\frac{4}{3}\pi k\mu D\xi}{R^3}\left\{3a^2 + \left(3a^2 - \frac{3a^4}{R^2} + \frac{15a^4\delta^2}{2R^4}\right)e^2\right\} da,$$

$$dB' = \frac{\frac{4}{3}\pi k\mu D\delta}{R^3}\left\{3a^2 + \left(3a^2 - \frac{6a^4}{R^2} + \frac{15a^4\delta^2}{2R^4}\right)e^2\right\} da.$$

Integrirt man jetzt wieder in Bezug auf a zwischen den Grenzen a = o und a = ∞, und zwar so, dass jetzt D und e als Functionen von a angesehen werden, so findet man die Componenten der Anziehung der Erde parallel mit der Umdrehungsaxe und senkrecht auf derselben:

$$A = \frac{\frac{4}{3}\pi k\mu\xi}{R^3}\int_0^{\alpha} D\left\{3a^2 + \left(3a^2 - \frac{3a^4}{R^2} + \frac{15a^4\delta^2}{2R^4}\right)e^2\right\} da,$$

$$B' = \frac{\frac{4}{3}\pi k\mu\delta}{R^3}\int_0^{\alpha} D\left\{3a^2 + \left(3a^2 - \frac{6a^4}{R^2} + \frac{15a^4\delta^2}{2R^4}\right)e^2\right\} da,$$

oder, wenn man der Kürze wegen:

$$\int_0^\alpha Da^2(1+e^2)\,da = \int_0^\alpha Db^2 da = P,\ \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\alpha Da^4 e^2 da = S$$

setzt, wo S eine sehr kleine Grösse derselben Ordnung wie ε^2 ist:

$$A = \frac{4\pi k\mu\xi}{R^3}\left\{P - S\left(\frac{\alpha^2}{R^2} - \frac{5}{2}\cdot\frac{\alpha^2\delta^2}{R^4}\right)\right\},$$

$$B' = \frac{4\pi k\mu\delta}{R^3}\left\{P - S\left(\frac{2\alpha^2}{R^2} - \frac{5}{2}\cdot\frac{\alpha^2\delta^2}{R^4}\right)\right\}.$$

Würde man das Gesetz kennen, wonach die Dichtigkeit und Excentricität sich mit a ändern, so könnte man die Integrale P und S bestimmen, und hierdurch die ganze Anziehung der Erde. In Ermangelung dessen kann man auf folgende Weise indirect, wenn die Grösse der Anziehung auf einer Stelle der Erde gegeben ist, hieraus annäherungsweise die Werthe der Integrale bestimmen.

Es sei zuerst der angezogene Punkt auf der Oberfläche der Erde und φ dessen geographische Breite, d. h. der Winkel, welchen die Normale in diesem Punkte mit dem Aequator bildet. Man hat alsdann, wenn $\varepsilon = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\alpha}$ die Excentricität der Oberfläche der Erde bezeichnet:

$$\xi = \frac{\alpha \sin\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\varphi}},\ \delta = \frac{\alpha(1+\varepsilon^2)\cos\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\varphi}},\ R = \frac{\alpha\sqrt{1+(2\varepsilon^2+\varepsilon^4)\cos^2\varphi}}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\varphi}},$$

oder, wenn man nach den Potenzen von ε^2 entwickelt und die höheren Potenzen vernachlässigt:

$$\xi = \alpha\sin\varphi\,(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2\varphi),\ \delta = \alpha\cos\varphi\,\left(1 + \varepsilon^2\,(1 - \tfrac{1}{2}\cos^2\varphi)\right),$$
$$R = \alpha\,(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2\varphi).$$

Substituirt man dann diese Werthe und vernachlässigt die mit ε^4 vergleichbaren kleinen Grössen $\varepsilon^2 S$, so findet man:

$$A = \frac{4\pi k\mu\sin\varphi}{\alpha^2}\left\{(P - S) + \cos^2\varphi\,(\tfrac{5}{2}S - 2\varepsilon^2 P)\right\},$$

$$B' = \frac{4\pi k\mu\cos\varphi}{\alpha^2}\left\{(P + \varepsilon^2 P - 2S) + \cos^2\varphi\,(\tfrac{5}{2}S - 2\varepsilon^2 P)\right\}.$$

Durch die tägliche Umdrehungsbewegung der Erde wird eine auf der Umdrehungsaxe senkrechte Centrifugalkraft hervorgerufen,

deren Grösse nach §. 86 gleich $\frac{\mu v^2}{\delta}$, wenn v die Geschwindigkeit des angezogenen Punktes bezeichnet. Nimmt man als Zeiteinheit die Sekunde Mittelzeit an, so ist, weil in einem Sternentag 86164,09 Sekunden Mittelzeit enthalten sind:

$$v = \frac{2\pi\delta}{86164{,}09} = \omega\delta,$$

wenn man der Kürze wegen die Umdrehungsgeschwindigkeit gleich ω setzt. Die Centrifugalkraft wird folglich gleich:

$$\frac{\mu v^2}{\delta} = \mu\omega^2\delta = \mu\omega^2 a \cos\varphi \left(1 + \varepsilon^2 (1 - \tfrac{1}{2}\cos^2\varphi)\right).$$

Die Componente B′ der Anziehung senkrecht auf der Axe wird um diese Centrifugalkraft vermindert, und folglich gleich: $B' - \mu\omega^2\delta$. Die Resultante dieser Kraft und der Componente A wird dann die Schwere des angezogenen Punktes sein, und der Winkel ψ, welchen ihre Richtung mit dem Aequator bildet, wird durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{A}{B' - \mu\omega^2\delta}$$

bestimmt. Die Richtung der Schwere muss aber, wie wir in einem der folgenden Capitel über die Gesetze des Gleichgewichts der tropfbarflüssigen Körper sehen werden, auf der Meeresoberfläche senkrecht sein, und folglich $\psi = \varphi$, oder:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{A}{B' - \mu\omega^2\delta}, \quad \frac{B' - \mu\omega^2\delta}{\cos\varphi} = \frac{A}{\sin\varphi}.$$

Substituirt man hier die oben gefundenen Werthe von A, B′ und $\mu\omega^2\delta$, so erhält man die Bedingungsgleichung:

$$\frac{4\pi k\mu}{a^2}\left\{(P - S) + \cos^2\varphi\,(\tfrac{5}{2}S - 2\varepsilon^2 P)\right\}$$

$$= \frac{4\pi k\mu}{a^2}\left\{(P + \varepsilon^2 P - 2S) + \cos^2\varphi\,(\tfrac{5}{2}S - 2\varepsilon^2 P)\right\}$$

$$- \mu\omega^2 a\left\{1 + \varepsilon^2 (1 - \tfrac{1}{2}\cos^2\varphi)\right\},$$

und hieraus durch Reduction:

$$\omega^2 \alpha \left\{1 + \varepsilon^2 (1 - \tfrac{1}{2}\cos^2\varphi)\right\} = \frac{4\pi k}{\alpha^2} (\varepsilon^2 P - S).$$

Da diese Gleichung für alle Werthe von φ stattfinden soll, so muss $\omega^2\alpha$ eine mit ε^2 vergleichbare kleine Grösse sein, und:

$$\omega^2 \alpha = \frac{4\pi k}{\alpha^2} (\varepsilon^2 P - S).$$

Die Grösse der Resultante, oder die Schwere p des angezogenen Punktes findet man ferner:

$$p = \sqrt{A^2 + (B' - \mu\omega^2\delta)^2} = \sqrt{A^2 \left(1 + \frac{1}{\tang^2 \varphi}\right)} = \frac{A}{\sin\varphi},$$

oder, wenn man den Werth von A substituirt:

$$p = \frac{4\pi k \mu}{\alpha^2} \left\{(P - S) + \cos^2\varphi \, (\tfrac{5}{2} S - 2\varepsilon^2 P)\right\}$$

$$= \frac{4\pi k \mu}{\alpha^2} (P + \tfrac{3}{2} S - 2\varepsilon^2 P) + \frac{4\pi k \mu}{\alpha^2} (2\varepsilon^2 P - \tfrac{5}{2} S) \sin^2\varphi$$

$$= \frac{4\pi k \mu}{\alpha^2} (P + \tfrac{3}{2} S - 2\varepsilon^2 P) + \frac{4\pi k \mu}{\alpha^2} [\tfrac{5}{2}(\varepsilon^2 P - S) - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 P] \sin^2\varphi.$$

Substituirt man hier im letzten Gliede die Gleichung:

$$\omega^2 \alpha = \frac{4\pi k}{\alpha^2} (\varepsilon^2 P - S),$$

so erhält man:

$$p = \frac{4\pi k \mu}{\alpha^2} (P + \tfrac{3}{2} S - 2\varepsilon^2 P) + \mu \left(\tfrac{5}{2}\omega^2\alpha - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 . \frac{4\pi k P}{\alpha^2}\right) \sin^2\varphi.$$

Da die Masse μ gleich $\frac{p}{g_\varphi}$ ist (§. 6), wenn man durch g_φ die Geschwindigkeit bezeichnet, welche ein Körper im freien Falle und im luftleeren Raume nach einer Sekunde Mittelzeit erlangt hat, so wird:

$$g_\varphi = \frac{4\pi k}{\alpha^2} (P + \tfrac{3}{2} S - 2\varepsilon^2 P) + \left(\tfrac{5}{2}\omega^2\alpha - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 . \frac{4\pi k P}{\alpha^2}\right) \sin^2\varphi.$$

Setzt man $\varphi = o$, so erhält man am Aequator:

$$g_\circ = \frac{4\pi k}{\alpha^2}(P + \tfrac{3}{2}S - 2\varepsilon^2 P),$$

und hieraus:
$$\frac{4\pi k P}{\alpha^2} = g_\circ - \frac{4\pi k}{\alpha^2}(\tfrac{3}{2}S - 2\varepsilon^2 P).$$

Substituirt man diese Grössen in der obigen Gleichung, und vernachlässigt die mit ε^4 vergleichbaren Grössen $\varepsilon^2 S$ und $\varepsilon^4 P$, so erhält man:

$$g_\varphi = g_\circ + (\tfrac{5}{2}\omega^2\alpha - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 g_\circ)\sin^2\varphi.$$

Da $\omega^2\alpha$ eiue mit ε^2 vergleichbare Grösse ist, so kann man auch statt $\omega^2\alpha$ die davon nur um eine mit ε^4 vergleichbare kleine Grösse verschiedene Grösse $\omega^2\beta = \omega^2\alpha\,(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2)$ setzen, wo $\omega^2\beta$ die Centrifugalkraft am Aequator bezeichnet. Bezeichnet man durch $u = \frac{\omega^2\beta}{g_\circ}$ das Verhältniss zwischen der Centrifugalkraft und der Schwere am Aequator, so erhält man:

$$g_\varphi = g_\circ \left\{1 + (\tfrac{5}{2}u - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2)\sin^2\varphi\right\}.$$

Diese Formel der Schwere auf der Oberfläche der Erde ist zuerst von Laplace in seiner Mécanique céleste auf eine sehr weitläufige Weise entwickelt worden.

Durch Pendelbeobachtungen auf vielen verschiedenen Punkten der Erdoberfläche sind als die wahrscheinlichen Werthe von $g_\circ$ und $(\tfrac{5}{2}u - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2)$ gefunden:

$$g_\circ = 31{,}163 \text{ pr. Fuss}, \quad \tfrac{5}{2}u - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 = 0{,}0051757.$$

Substituirt man diese Zahlenwerthe und setzt dann zugleich $\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$, so erhält man:

$$g_\varphi = 31{,}24394\,(1 - 0{,}0025911 \cos 2\varphi) \text{ pr. Fuss},$$

welche Formel die im §. 6 gegebene ist. Da die Aequatoraxe der Erde durch Messungen gleich 20320000 pr. Fuss gefunden ist, so erhält man:

$$u = \frac{\omega^2\beta}{g_\circ} = \frac{4\pi^2}{(86164{,}09)^2}\cdot\frac{\beta}{g_\circ} = 0{,}00347,$$

und folglich $\tfrac{5}{2}u = 0{,}00867$. Oben ist aber gegeben die durch

Pendelbeobachtungen bestimmte Zahl: $\frac{5}{2}u - \frac{1}{2}\varepsilon^2 = 0{,}00518$, und man findet folglich hieraus:

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 = 0{,}00349,\ \varepsilon = 0{,}083,$$

welcher Werth sehr wenig von dem durch Messungen gefundenen Werthe $\varepsilon = 0{,}082$ abweicht.

§. 146.

Aus den Gleichungen:

$$g_0 = \frac{4\pi k}{\alpha^2}\,(P + \tfrac{2}{5}S - 2\varepsilon^2 P)$$

und

$$\omega^2\beta = \frac{4\pi k}{\alpha^2}\,(\varepsilon^2 P - S)$$

findet man:

$$P = \frac{\alpha^2}{4\pi k}\left\{g_0\,(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) + \tfrac{3}{2}\omega^2\beta\right\}$$

$$= \frac{\alpha^2 g_0}{4\pi k}\left\{1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{2}u\right\},$$

$$S = \frac{\alpha^2 g_0}{4\pi k}\left\{\varepsilon^2 - u\right\}.$$

Diese Werthe, in den oben entwickelten Gleichungen der Anziehung der Erde auf irgend einen äusseren Punkt substituirt, geben:

$$A = \frac{\mu g_0 \alpha^2 \xi}{R^3}\left\{1 + \left[\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{2}u - (\varepsilon^2 - u)\left(\frac{\alpha^2}{R^2} - \tfrac{5}{2}.\frac{\alpha^2\delta^2}{R^4}\right)\right]\right\},$$

$$B' = \frac{\mu g_0 \alpha^2 \delta}{R^3}\left\{1 + \left[\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{2}u - (\varepsilon^2 - u)\left(\frac{2\alpha^2}{R^2} - \tfrac{5}{2}.\frac{\alpha^2\delta^2}{R^4}\right)\right]\right\}.$$

Bezeichnet man durch h die Höhe des angezogenen Punktes über der Meeresoberfläche, und wie vorher durch φ die geographische Breite des entsprechenden Punktes dieser Oberfläche, so wird:

$$\xi = \alpha \sin\varphi\,(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2\varphi) + h \sin\varphi,$$

$$\delta = \alpha \cos\varphi\left(1 + \varepsilon^2\,(1 - \tfrac{1}{2}\cos^2\varphi)\right) + h\cos\varphi,$$

$$R = \alpha + h + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2\varphi\,.\,\frac{\alpha}{\alpha + h}\,(\alpha + 2h\cos^2\varphi).$$

Ist die Höhe h sehr klein in Bezug auf den Halbmesser der Erde α, so wird:

$$\xi = (\alpha + h) \sin\varphi \left(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2\varphi\right),$$
$$\delta = (\alpha + h) \cos\varphi \left(1 + \varepsilon^2 \left(1 - \tfrac{1}{2}\cos^2\varphi\right)\right),$$
$$R = (\alpha + h) \left(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2\varphi\right).$$

Substituirt man diese Werthe, so findet man:

$$A = \mu g_0 \sin\varphi \cdot \frac{\alpha^2}{(\alpha+h)^2} \left\{1 - 2\varepsilon^2 \cos^2\varphi\right\} \cdot$$
$$\left\{1 + \left[\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{2}u - (\varepsilon^2 - u)\left(1 - \tfrac{5}{2}\cos^2\varphi\right)\right]\right\}$$
$$= \mu g_0 \sin\varphi \cdot \left\{\frac{\alpha^2}{(\alpha+h)^2} + \left(\tfrac{5}{2}u - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right)\sin^2\varphi\right\},$$

$$B' = \mu g_0 \cos\varphi \cdot \frac{\alpha^2}{(\alpha+h)^2} \left\{1 + \varepsilon^2 \left(1 - 2\cos^2\varphi\right)\right\}$$
$$\left\{1 + \left[\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{2}u - (\varepsilon^2 - u)\left(2 - \tfrac{5}{2}\cos^2\varphi\right)\right]\right\}$$
$$= \mu g_0 \cos\varphi \left\{\frac{\alpha^2}{(\alpha+h)^2} + u + \left(\tfrac{5}{2}u - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right)\sin^2\varphi\right\}.$$

Die auf den angezogenen Punkt wirkende Centrifugalkraft ist:

$$\mu\omega^2\delta = \mu\omega^2 (\alpha + h)\cos\varphi = \mu\omega^2\alpha\cos\varphi = \mu u g_0 \cos\varphi,$$

weil man die mit ε^4 vergleichbare kleine Grösse $\mu\omega^2 \cdot \frac{h}{\alpha}$ vernachlässigen kann. Um diese Grösse wird die Componente der Anziehung senkrecht auf die Axe vermindert, und man erhält:

$$B' - \mu\omega^2\delta = \mu g_0 \cos\varphi \left\{\frac{\alpha^2}{(\alpha+h)^2} + \left(\tfrac{5}{2}u - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right)\sin^2\varphi\right\}.$$

Hieraus findet man:

$$\frac{A}{B' - \mu\omega^2\delta} = \operatorname{tang}\varphi,$$

d. h. die Richtung der Schwere ist dieselbe in der Höhe h über der Oberfläche der Erde, wie senkrecht darunter an dieser Oberfläche selbst. Es wird ferner die Resultante:

$$p = \sqrt{A^2 + (B' - \mu\omega^2\delta)^2}$$

$$= \frac{A}{\sin\varphi} = \mu g_0 \left\{ \frac{\alpha^2}{(\alpha + h)^2} + (\tfrac{5}{2}u - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2)\sin^2\varphi \right\}$$

$$= \mu g_0 \frac{\alpha^2}{(\alpha + h)^2} \left\{ 1 + (\tfrac{5}{2}u - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2)\sin^2\varphi \right\}.$$

Bezeichnet man durch $g_{\varphi,h}$ die Geschwindigkeit, welche ein Körper an diesem Punkte im freien Falle im luftleeren Raume nach einer Secunde Mittelzeit erlangen wird, so erhält man $p = \mu g_{\varphi,h}$, und:

$$g_{\varphi,h} = g_0 \frac{\alpha^2}{(\alpha + h)^2} \left\{ 1 + (\tfrac{5}{2}u - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2)\sin^2\varphi \right\} = g_\varphi \cdot \frac{\alpha^2}{(\alpha + h)^2}$$

$$= g_\varphi \cdot \frac{\beta^2}{(\beta + h)^2},$$

d. h. die Schwerkraft ist in einer mit Rücksicht auf den Halbmesser der Erde kleinen Höhe über der Meeresoberfläche umgekehrt proportional mit dem Abstand vom Mittelpunkte der Erde.

Wir haben bisher die Anziehung des über die Meeresoberfläche erhöheten Continents vernachlässigt. Es sei (Fig. 53) AM'B die Oberfläche des Continents, DAMBE die Meeresoberfläche und ihre Erweiterung unter die des Continents. Es sei M' der angezogene Punkt, M'M normal zur Erweiterung der Meeresoberfläche und gleich h; es sei ferner die Oberfläche des Continents in der Nähe von M' annäherungsweise auf MM' senkrecht. Die Grösse der Schwere im Punkte M', wenn der Continent AM'B keine Anziehung übt, ist vorher gefunden gleich $g_\varphi \cdot \frac{\alpha^2}{(\alpha + h)^2}$, wenn g_φ die Grösse der Schwere im Punkte M bezeichnet. Man braucht jetzt nur zu dieser Grösse die Anziehung des Continentes AM'B, deren Richtung, wie wir sehen werden, mit MM' zusammenfällt, zu addiren.

Um diese letzte Anziehung zu finden, bezeichne man durch D' die Dichtigkeit der als homogen anzusehenden Masse des Continents, und durch y und z die Coordinaten eines Punktes P dieser Masse von M' ab gerechnet, parallel mit MM' und senkrecht

auf derselben. Man construire jetzt um MM' als Axe zwei Cylinderflächen, deren Halbmesser respective y und y + dy sind, und theile die zwischen ihnen gelegene elementare Cylinderschicht durch horizontale Ebenen in elementare Ringe. Die Masse des den Punkt K einschliessenden elementaren Ringes wird $dm = 2\pi D' y\, dy\, dz$. Der Abstand jedes Punktes dieses Ringes von M' ist gleich $PM' = \sqrt{y^2 + z^2}$, und die mit MM' parallele Resultante der Anziehung des Ringes auf M' wird folglich (§. 136):

$$km \cdot \frac{z-\zeta}{r^3} dm = \frac{2\pi k\mu D' yz\, dy\, dz}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Weil Alles um MM' symmetrisch ist, wird die Richtung der Anziehung jedes elementaren Ringes auf M' längs MM' fallen, und folglich gleich dieser Componente. Diese elementare Anziehung muss jetzt in Bezug auf y und z integrirt und die Integration auf alle Punkte des anziehenden Continents ausgedehnt werden. Begrenzt man zuerst diesen Continent durch eine mit einem Halbmesser c um MM' construirte Cylinderoberfläche, so kann man hier die Höhe h des Continentes als constant betrachten, und folglich in Bezug auf y von y = o bis y = c, und in Bezug auf z von z = o bis z = h integriren. Man erhält dann die Anziehung gleich:

$$2\pi k\mu D' \int_o^c y dy \int_o^h \frac{zdz}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi k\mu D' \int_o^c y dy \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y^2+h^2}}\right)$$

$$= 2\pi k\mu D' (c + h - \sqrt{c^2 + h^2}).$$

Ist h sehr klein in Bezug auf c, was bei grösseren Continenten immer der Fall ist, so wird dieser Ausdruck gleich:

$$2\pi k\mu D' \left(h - \frac{h^2}{2c}\right) = 2\pi k\mu D' h.$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von c, wenn nur c sehr gross in Bezug auf h ist, und er kann folglich als die ganze Anziehung des Continents betrachtet werden. Dieser Ausdruck, mit der Masse

μ des angezogenen Punktes dividirt und zu $g_\varphi \cdot \frac{\alpha^2}{(\alpha + h)^2}$ addirt, giebt dann die Grösse der Schwere $g_{\varphi,h}$ im Punkte M', und man findet diese gleich:

$$g_{\varphi,h} = g_\varphi \cdot \frac{\alpha^2}{(\alpha + h)^2} + 2\pi k D' h.$$

Der Coefficient k kann, wenn die Masse der Erde oder deren mittlere Dichtigkeit gegeben ist, auf folgende Weise gefunden werden. Es ist die Masse eines Ellipsoids, dessen Dichtigkeit gleich D, Halbaxen gleich a und b und Excentricität $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} = e$ ist:

$$M = \tfrac{4}{3}\pi D a^3 (1 + e^2).$$

Differentiirt man hier in Bezug auf a, so dass man D und e als constante Grössen betrachten kann, und integrirt dann wieder zwischen den Grenzen a = o und a = α, indem man dann D und e als Functionen von a betrachtet, so findet man die Masse der Erde gleich:

$$M = 4\pi \int D a^2 (1 + e^2)\, da = 4\pi P.$$

Substituirt man hier den Werth von P, so findet man:

$$M = \frac{\alpha^2 g_0}{k} \left\{ 1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{2}u \right\},$$

und hieraus:

$$k = \frac{\alpha^2 g_0}{M} \left\{ 1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{2}u \right\}.$$

Bezeichnet man die mittlere Dichtigkeit der Erde durch D'', oder setzt man $M = \frac{4}{3}\pi D'' \alpha^3 (1 + e^2)$, so erhält man:

$$k = \frac{3 g_0}{4\pi D'' \alpha} \left\{ 1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{2}u \right\}.$$

Substituirt man diesen Werth von k, und vernachlässigt die mit ε^4 vergleichbaren kleinen Grössen $\varepsilon^2 \cdot \frac{h}{\alpha}$ und $u \cdot \frac{h}{\alpha}$, so erhält man:

$$g_{\varphi,h} = g_\varphi \cdot \frac{a^2}{(a+h)^2} + \tfrac{3}{2} g_0 \cdot \frac{D'h}{D''a}$$
$$= g_\varphi \left\{ \frac{a^2}{(a+h)^2} + \tfrac{3}{2} \cdot \frac{D'h}{D''a} \right\}.$$

Die mittlere Dichtigkeit der Erde ist 5,44 Mal grösser als die Dichtigkeit des Wassers, und folglich ungefähr gleich der doppelten Dichtigkeit der auf der Erdoberfläche am häufigsten vorkommenden Mineralien gefunden. Setzt man demnach $\frac{D'}{D''} = \frac{1}{2}$, so wird:

$$g_{\varphi,h} = g_\varphi \left\{ \frac{a^2}{(a+h)^2} + \tfrac{3}{4} \cdot \frac{h}{a} \right\}$$
$$= g_\varphi \left\{ 1 - 2 \cdot \frac{h}{a} + \tfrac{3}{4} \frac{h}{a} \right\} = g_\varphi \left\{ 1 - \tfrac{5}{4} \cdot \frac{h}{a} \right\}$$
$$= g_\varphi \cdot \frac{(\tfrac{8}{5}a)^2}{(\tfrac{8}{5}a + h)^2}.$$

d. h. die Anziehung des über die Meeresoberfläche emporragenden ausgedehnten Landstrichs bewirkt, dass die Schwere so abnimmt, als wäre der Halbmesser der Erde $\frac{8}{5}$Mal so gross, als er in der Wirklichkeit ist.

§. 147.

Wir haben bisher nur die Anziehung für den Fall betrachtet, dass der eine der anziehenden Körper als ein materieller Punkt angesehen werden kann. Es seien jetzt aber beide der auf einander wirkenden Massen als ausgedehnt zu betrachten. Bezeichnet man dann durch x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes des ersten Körpers, durch x', y', z' die eines beliebigen Punktes des zweiten Körpers, so braucht man nur im §. 136 statt ξ, η, ζ x', y', z' und statt μ dm' zu setzen. Man erhält dann die Componenten der Anziehung zwischen den zwei respective den Punkten (x, y, z) und (x', y', z') entsprechenden Massenelementen dm und dm' gleich:

$$k \cdot \frac{x'-x}{r^3}\, dm' \cdot dm, \quad k \cdot \frac{y'-y}{r^3}\, dm' \cdot dm, \quad k \cdot \frac{z'-z}{r^3}\, dm' \cdot dm.$$

Alle diese elementaren Anziehungskräfte, zum Anfangspunkt der Coordinaten hingeführt, bilden die drei Componenten der Resultante:

$$X = k \iint \frac{x' - x}{r^3} dm' . dm,$$

$$Y = k \iint \frac{y' - y}{r^3} dm' . dm,$$

$$Z = k \iint \frac{z' - z}{r^3} dm' . dm,$$

und die drei Kräftepaare:

$$L = k \iint \frac{y'z - z'y}{r^3} dm' . dm,$$

$$M = k \iint \frac{z'x - x'z}{r^3} dm' . dm,$$

$$N = k \iint \frac{x'y - y'x}{r^3} dm' . dm.$$

Die Integrationen sind hier auf alle Elemente der Körper auszudehnen. Nur insofern $LX + MY + NZ = o$ ist, wird eine Resultante stattfinden; sonst aber werden die Körper zugleich sich einander zu nähern und zu drehen streben. Die Ausführung jener Integrale ist gewöhnlich sehr schwierig, und wir werden daher hier nur den einfachsten Fall näher betrachten, wenn beide einander anziehenden Körper kugelförmig sind und entweder homogen oder aus homogenen concentrischen Schichten bestehend.

Es sei M die Masse der einen Kugel, C deren Mittelpunkt, M' die Masse der zweiten Kugel und C' deren Mittelpunkt. Die Anziehung der Kugel M auf einen beliebigen Punkt O' der Kugel M' wird dann dieselbe sein, als wäre die ganze Masse M im Mittelpunkte C vereinigt. Diese Anziehung der in C vereinigten Masse M auf alle Elemente O' der Kugel M' ist ferner gleich und entgegengesetzt der Anziehung aller dieser Punkte oder der Kugel M' auf C, und diese Anziehung ist wiederum dieselbe, als wäre die Masse M' im Mittelpunkte C' vereinigt. Die gegenseitige Anziehung der beiden Kugeln wird folglich genau dieselbe, als wären beide

Massen in den respectiven Mittelpunkten vereinigt, und folglich gleich: $\frac{kMM'}{R^2}$, wenn R den Abstand der beiden Mittelpunkte bezeichnet.

Man hat mittelst der Torsionsbalance die Grösse der Anziehung zweier Kugeln, deren Massen und Abstand von einander bekannt waren, beobachtet, und hieraus $k = \frac{320}{10^{10}}$ gefunden, wenn das preussische Pfund und der preussische Fuss als Einheiten angenommen werden.

§. 148.

Tafel
der bei den verschiedenen Körpern stattfindenden Gewichte einer Cubikeinheit.

Name der Körper.	Specifisches Gewicht.	Gewicht eines preuss Cubikfusses in preuss. Pfunden.	Gewicht eines preuss. Cubikzolls in preuss. Pfunden.
Holzarten.			
Eiche (alt)	1,17	77,22	0,0447
Tanne (trocken) / Fichte (trocken)	0,555	36,63	0,0212
Metalle.			
Eisen, gegossen	7,207	475,66	0,2753
geschmiedet	7,788	514,01	0,2974
gewalzt	7,600	501,60	0,2903
Gussstahl	7,919	522,65	0,3025
Eisendraht	7,631	503,65	0,2915
Blei, gegossen	11,389	751,67	0,4350
Zinn, gegossen	7,291	481,21	0,2785
Kupfer, gegossen	8,897	586,98	0,3397
Gold, gegossen	19,258	1271,03	0,7355
gemünzt	19,325	1275,45	0,7381
Silber, gegossen	10,105	666,93	0,3859
gemünzt	10,448	689,57	0,3991
Platin, gemünzt	22,100	1458,60	0,8441
ausgezogen	19,267	1273,82	0,7372
Quecksilber	13,598	897,47	0,5194
Mineralien.			
Basalt	3,310	218,46	0,1264
Granit	3,063	202,16	0,1170
Marmor	2,837	187,24	0,1084
Sandstein	2,700	178,20	0,1031
Flintglas, v. Frauenhofer	3,779	249,41	0,1443
französisches	3,179	209,81	0,1214
englisches	3,442	227,17	0,1315
Flüssigkeiten.			
Destillirtes Wasser	1,000	66,00	0,0382
Schwefelsäure (concentrirte engl.)	1,850	122,10	0,0707
Salpetersäure (concentrirte)	1,522	100,45	0,0581
Meerwasser	1,040	68,64	0,0397
Alcohol, absoluter	0,792	52,27	0,0302
Milch	1,031	68,05	0,0394

Cap. III.

Gesetze des Gleichgewichts fester elastischer Körper.

a) Widerstand der Körper gegen Zerreissen und Zerdrücken.

§. 149.

Betrachten wir einen Körper, von zwei parallelen, ebenen und auf der ihre Schwerpunkte vereinigenden Axe senkrechten Endfläche begrenzt, dessen Seitenfläche so geformt ist, dass der Schwerpunkt jedes mit diesen Endflächen parallelen Querschnittes in dieselbe Axe fällt. Es wirken senkrecht auf jeder der beiden Endflächen gleichmässig vertheilte Kräfte, deren Resultanten folglich längs der Axe fallen werden, und einander das Gleichgewicht halten. Denken wir uns den Körper als aus mit den Endflächen parallelen Schichten von Molekülen bestehend, so werden diese durch die äusseren Kräfte parallel genähert oder von einander entfernt werden. Die hierdurch zwischen je zwei Schichten von Molekülen entwickelten Molekülarkräfte werden dann in jeder Schicht immer eine längs der Axe wirkende Resultante haben. Bezeichnen wir diese durch R, die ursprüngliche Entfernung der Schichten durch r_0, die jetzige durch r, so wird nach §. 132 R eine Function von r sein, welche innerhalb einer gewissen Grenze, der Elasticitätsgrenze, nur mit $r - r_0$ verschwindet. Das Verhältniss, welches zwischen der Aenderung von R und der entsprechenden von r besteht, oder die derivirte Function $d_r R$, wird die **Steifigkeit** des Körpers genannt. Wenn r nur sehr wenig von dem ursprünglichen Werth r_0 verschieden ist, kann man diese Steifigkeit als constant ansehen, und die Erfahrung hat gezeigt, dass die Aenderungen der Steifigkeit innerhalb der Elasticitätsgrenze des Körpers immer nur sehr klein sind. Setzt man folglich innerhalb dieser Grenzen: $d_r R = a$, so wird $R = a\,(r - r_0)$, oder die mit der Axe parallele Resultante der zwischen zwei auf einander

folgenden Schichten wirkenden Molekülarkräfte wird, wenn die Elasticitätsgrenze nicht überschritten ist, annäherungsweise der Veränderung des Abstandes dieser Schichten proportional angenommen werden können. Diese Folgerung wird auch noch gelten, wenn man angenommen hätte, der Wirkungskreis der Molekülarkräfte dehne sich auf mehrere auf einander folgende Schichten aus.

Wenn die Anzahl der in jeder Schicht befindlichen Molekülen sehr gross ist, und der Flächeninhalt der Schicht innerhalb des Wirkungskreises der Molekülarkräfte sich nicht merklich ändert, so wird die Molekülarkraft R auch diesem Flächeninhalte proportional sein. Bezeichnet man den Flächeninhalt eines mit beiden Endflächen parallelen Querschnittes des gegebenen Körpers durch ω, so wird folglich: $R = a\omega\,(r - r_o)$.

Es sei l die ursprüngliche Länge der Axe, $l + \Delta l$ die jetzige, P und $-P$ die Resultanten der auf die beiden Endflächen wirkenden Kräfte, so wird alsdann:

$$P = a\omega(r - r_o) = a'\omega'(r' - r_o') = a''\omega''(r'' - r_o'') \text{ u. s. w.},$$

und folglich:

$$\Sigma(r - r_o) = \Delta l = P\Sigma\left(\frac{1}{a\omega}\right),$$

und:

$$1) \qquad P = \frac{\Delta l}{\Sigma\left(\frac{1}{a\omega}\right)}.$$

Wenn der Körper homogen ist, und folglich $a = a' = a'' = \ldots$, $r_o = r_o' = r_o'' = \ldots$, so wird

$$\Sigma\frac{1}{a\omega} = \frac{1}{a}\,\Sigma\,\frac{1}{\omega}.$$

Bezeichnet man durch x die Entfernung des Querschnittes ω von der einen Endfläche, so kann man den letzten Ausdruck mit $\frac{dx}{r_o}$ multipliciren, und statt des Summationszeichens das Integralzeichen setzen. Man erhält alsdann:

$$\Sigma\frac{1}{a\omega} = \frac{1}{ar_o}\int_o^l\frac{dx}{\omega},$$

wo ω eine Function von x ist. Dies in der Gleichung (1) substituirt, giebt:

$$2)\qquad P = \frac{ar_0 \Delta l}{\int_0^l \frac{dx}{\omega}} = E \cdot \frac{\Delta l}{\int_0^l \frac{dx}{\omega}},$$

wo $E = ar_0$ eine nur von der Materie des Körpers abhängige constante Grösse ist. Dieser Coefficient E wird der **Elasticitätscoefficient** des Körpers genannt. Er ist der Steifigkeit des Körpers proportional.

Beispiele. 1) Es sei der Körper ein gerades Prisma. Es ist alsdann ω constant, und es wird folglich:

$$\int_0^l \frac{dx}{\omega} = \frac{l}{\omega},$$

und

$$P = E\omega \cdot \frac{\Delta l}{l},$$

und

$$\Delta l = \frac{Pl}{E\omega},$$

d. h. die Ausdehnung oder Zusammendrückung des Prismas wird der ursprünglichen Länge und der ausdehnenden oder zusammendrückenden Kraft proportional, und den Querschnitten des Prismas umgekehrt proportional sein. Durch diese Gleichung kann man auch, wenn P, l, ω und Δl durch directe Beobachtungen bekannt sind, den Elasticitätscoefficienten E des Körpers finden. Es wird nämlich $E = \frac{P}{\omega} \cdot \frac{l}{\Delta l}$. Wenn $\omega = 1$ und $\Delta l = l$ wäre, so würde $E = P$ sein, d. h. der Elasticitätscoefficient einer Materie ist der Kraft gleich, welche ein Prisma, dessen Querschnitt die Flächeneinheit ist, zu der doppelten Länge ausziehen würde, wenn die Verlängerungen immer der ausdehnenden Kraft proportional blieben. Da diese letzte Bedingung indessen gar nicht bei solcher Ausdehnung stattfindet, so ist obiger Satz, welcher oft als Definition des Elasticitätscoefficienten gebraucht wird, nur eine Fiction.

2) Es sei der Körper ein parallel abgestumpfter gerader Kegel, R und r die Halbmesser der beiden Grundflächen, l die Höhe. Es ist alsdann:

$$\omega = \pi \left(\frac{lR - x(R - r)}{l} \right)^2,$$

und

$$\int \frac{dx}{\omega} = \frac{l^2}{\pi} \int \frac{dx}{(lR - x(R-r))^2} = \frac{l^2}{\pi(R-r)} \cdot \frac{1}{lR - x(R-r)},$$

$$\int_0^l \frac{dx}{\omega} = \frac{l^2}{\pi(R-r)} \left\{ \frac{1}{lR - l(R-r)} - \frac{1}{lR} \right\}$$

$$= \frac{l^2}{\pi(R-r)} \left\{ \frac{1}{lr} - \frac{1}{lR} \right\} = \frac{l}{\pi Rr},$$

und folglich:

$$P = \pi Rr \,.\, E \,.\, \frac{\Delta l}{l}, \quad \Delta l = \frac{Pl}{\pi Rr\, E}.$$

§. 150.

Besteht der zusammengedrückte oder ausgedehnte Körper aus mehreren Theilen verschiedener Elasticität, so muss man besonders die Grösse der Zusammendrückung oder Ausdehnung jedes einzelnen Theiles berechnen. Hat jeder Theil die im §. 149 beschriebene Form, und fallen die Axen aller Theile in dieselbe Gerade, so dass folglich keine Biegung stattfindet, so wird man leicht die ganze Längenveränderung finden. Es seien $l, l', l'' \ldots$ die Axenlängen der verschiedenen Theile, $\omega, \omega', \omega'' \ldots$ die Querschnitte jedes Theiles in der Entfernung x von dem einen Ende, $E, E', E'' \ldots$ die Elasticitätscoefficienten, so findet man nach dem vorigen Paragraphen:

$$\Delta l = \frac{P}{E} \int_0^l \frac{dx}{\omega}, \quad \Delta l' = \frac{P}{E'} \int_0^{l'} \frac{dx}{\omega'}, \quad \Delta l'' = \frac{E}{E''} \int_0^{l''} \frac{dx}{\omega''}, \ldots$$

und hieraus:

$$\Delta L = \Sigma \Delta l = P \sum \frac{\int_0^l \frac{dx}{\omega}}{E}.$$

§. 151.

Die Mathematiker haben für den Elasticitätscoefficienten Ausdrücke gesucht, in welche die Molekülarkräfte als unbekannte Functionen des Abstandes der Molekülen eintreten. Sie gehen dabei von gewissen Voraussetzungen über die Molekülarkräfte aus. Es liegt ausserhalb des Bereiches des gegenwärtigen Lehrbuchs, diese Untersuchungen wiederzugeben. Ich werde nur das Resultat der Untersuchungen Poissons in seinem „Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques", in den Memoiren der französischen Academie Tome VIII. 1829, hier erwähnen. Bezeichnet N eine constante, auf die Einheit der Oberfläche des Körpers senkrechte Kraft, δ die von ihr bewirkte proportionale lineare Ausdehnung oder Contraction, r den Abstand zweier Molekülen, f(r) die Function, durch welche man das Gesetz der ganzen Molekülarkraft ausgedrückt annimmt, α den mittleren Abstand zweier benachbarten Molekülen, so wird:

$$\frac{N}{\delta} = \frac{2\pi}{3} \sum_{r=\alpha}^{r=\infty} \frac{r^5}{\alpha^5} d_r \left(\frac{1}{r} f(r)\right).$$

Wendet man diese Formel auf ein gerades Prisma an, so wirkt die Kraft an beiden Enden, und wenn man den Querschnitt $\omega = 1$ setzt, so wird nach unserer vorigen Bezeichnungsweise:

$$N = 2P, \; \delta = \frac{\Delta l}{l},$$

folglich

$$\frac{N}{\delta} = 2E,$$

und

$$E = \frac{\pi}{3} \sum_{r=\alpha}^{r=\infty} \frac{r^5}{\alpha^5} d_r \left(\frac{1}{r} f(r)\right).$$

Die Richtigkeit dieser Formel Poisson's ist indessen, wie wir gleich sehen werden, sehr zweifelhaft.

§. 152.

Wenn zwei Schichten von Molekülen parallel einander genähert oder von einander entfernt werden, so werden die zwischen

ihnen entwickelten Molekülarkräfte nicht allein in jeder Schicht eine senkrecht auf die Ebene der Schicht wirkende Resultante haben, sondern es werden auch, in der Ebene der Schichten wirkende Kräfte hervorgebracht, welche die Molekülen in jeder Schicht von einander zu entfernen oder einander zu nähern streben werden, d. h. wenn ein Körper zusammengedrückt wird, so wird auch sein Querschnitt erweitert, und wenn er ausgedehnt wird, so wird der Querschnitt sich zusammenziehen. Poisson hat auch in der erwähnten Abhandlung die Grösse dieser Ausdehnung oder Zusammenziehung des Querschnittes für homogene Körper, deren Elasticität nach allen Richtungen hin als gleich angenommen wird, gesucht, und gefunden, dass diese auf der Flächeneinheit des Querschnittes gleich der Hälfte der auf der Längeneinheit der Axe stattfindenden Zusammendrückung oder Ausdehnung sein soll, d. h. es soll bei einem prismatischen Körper $\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l}$ sein. Ein Prisma, dessen Volumen $l\omega$ wäre, sollte folglich nach einer Ausdehnung das Volumen:

$$(l + \Delta l)(\omega + \Delta\omega) = (l + \Delta l)\left(\omega - \tfrac{1}{2}\omega\frac{\Delta l}{l}\right) = l\omega + \tfrac{1}{2}\omega\Delta l$$

erhalten, und nach einer Zusammendrückung den Kubikinhalt $l - \frac{1}{2}\omega\Delta l$.

Durch directe Beobachtungen über diese Volumenveränderung bei Glas und Messing, welche Wertheim angestellt hat (Annales de chimie et de physique, III. Serie Tome XXIII.), hat derselbe indessen diese gleich $\frac{1}{3}\omega\Delta l$ gefunden, welchem Werthe $\Delta\omega = -\frac{2}{3}\frac{\Delta l}{l}$ entspricht. Diese Abweichung von Poisson's Resultat kann nur dadurch erklärt werden, dass etliche von seinen Voraussetzungen unrichtig sind, und es wird daher auch die im vorigen Paragraphen citirte Formel des Elasticitätscoefficienten zweifelhaft. Es scheint, man müsse annehmen, dass die Molekülen des Körpers, wenn dieser nach einer Richtung zusammengedrückt oder ausgedehnt worden,

neben ihrer Verschiebung sich auch drehen, und dass der Mangel der Berücksichtigung dieser Drehung die Ursache des Fehlers in den Formeln ist.

Es ist noch zu bemerken, dass bei der Zusammendrückung oder Ausdehnung eines Körpers dieser, ausser der nach sehr kurzer Zeit stattfindenden, unter fortgesetzter Einwirkung des Gewichtes noch allmälig eine weitere Ausdehnung oder Zusammendrückung erleidet. Diese wird die elastische Nachwirkung genannt, und ist insbesondere bei Seidenfäden bemerkbar, wo sie $\frac{1}{3}$ der ursprünglichen Wirkung beträgt. Bei Metallen und Holzarten ist sie dagegen sehr klein. Es ist natürlich hier nur die Rede von Veränderungen, welche die Elasticitätsgränze nicht überschreiten.

In der technischen Mechanik braucht man weder auf die Veränderung des Querschnittes noch auf die elastische Nachwirkung Rücksicht zu nehmen.

§. 153.

Bei einem prismatischen Körper, dessen Querschnitt die Flächeneinheit ist, war $P = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$. Derjenige Werth von P, wo die Elasticitätsgränze erreicht wird, und bei dessen Ueberschreiten folglich der Körper nach Aufhören der Kraft P seine ursprüngliche Länge nicht wieder annimmt, wird, wenn es sich um eine Verlängerung des Körpers handelt, der absolute Tragfähigkeitscoefficient des Körpers genannt; wenn es sich um ein Zusammendrücken des Körpers handelt, und der Körper nicht so lang ist, dass eine Biegung stattfinden kann, oder wenn diese auf andere Weise verhindert ist, so wird dieser Werth von P der rückwirkende Tragfähigkeitscoefficient genannt. Wir werden diese beiden Coefficienten fortan respective durch T_a und T_r bezeichnen.

Wird diese Belastung der Flächeneinheit überschritten, so tritt eine fortdauernde Aenderung in der gegenseitigen Lage der Mole-

külen ein. Der Elasticitätscoefficient $E = \frac{P}{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)}$ wird alsdann im Allgemeinen nicht länger als constant angesehen werden können. Doch ist dies bei Metallen der Fall, lange nachdem die Elasticitätsgrenze überschritten ist, wenn man als die Länge l nicht die ursprüngliche, sondern diejenige ansieht, welche der Körper nach Aufhören der Kraft P annimmt.

Den Werth von P, bei welchem der Körper zerrissen oder zerdrückt wird, nennt man den absoluten oder rückwirkenden Festigkeitscoefficienten des Körpers, je nachdem es sich um ein Zerreissen oder Zerdrücken handelt. Wir werden sie respective durch F_a und F_r bezeichnen. Handelt es sich um eine Zusammendrückung, so wird fortwährend vorausgesetzt, dass keine Biegung stattfindet. Dieser letztere Fall wird im folgenden Capitel besonders betrachtet werden.

Wenn ein Körper, wie im §. 149 vorausgesetzt, von zwei parallelen, ebenen, und auf der ihre Schwerpunkte vereinigenden Axe senkrechten Endflächen begrenzt und übrigens so geformt ist, dass der Schwerpunkt jedes mit den Endflächen parallelen Querschnittes in dieselbe Axe fällt, und wird dieser Körper an einer der Endflächen festgehalten und an der andern Endfläche durch eine parallel mit der Axe wirkende Kraft entweder ausgezogen oder zusammengedrückt, so findet man die Tragfähigkeit dieses Körpers, oder die Last, welche er tragen kann, ohne dass irgendwo die Elasticitätsgrenze überschritten wird, wenn man den entsprechenden Tragfähigkeitscoefficienten des Körpers mit dem Flächeninhalt des kleinsten Querschnittes multiplicirt. Ebenso findet man die Festigkeit des Körpers, oder die Last, welche den Körper zerreisst oder zerdrückt, wenn man den entsprechenden Festigkeitscoefficienten mit dem Flächeninhalt des kleinsten Querschnittes multiplicirt.

Was die Tragfähigkeit und Festigkeit anderer Körper betrifft, so kennt man noch nicht die theoretische Ableitung derselben.

Die Erfahrung dagegen hat gezeigt, dass die Tragfähigkeit eines liegenden Cylinders gleich $\frac{1}{3}$ derjenigen des umschriebenen Parallelepipeds ist.

§. 154.

Die zum Zusammendrücken oder Ausdehnen eines prismatischen Körpers angewandte dynamische Arbeit ist:

$$\int P d\,(\Delta l).$$

Substituirt man hier den Werth von

$$P = E\omega\,.\,\frac{\Delta l}{l},$$

so erhält man die dynamische Arbeit gleich:

$$\frac{E\omega}{l}\int \Delta l\,.\,d(\Delta l) = \tfrac{1}{2}E\omega l\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2.$$

Dieser Ausdruck wird auch, wegen seiner Aehnlichkeit mit dem Ausdrucke der lebendigen Kraft eines bewegten Körpers, die lebendige Widerstandskraft des Körpers genannt. In diesem Ausdrucke wird derjenige Werth des Coefficienten

$$\tfrac{1}{2}E\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2,$$

welcher der Elasticitätsgrenze entspricht, und folglich nur von der Materie des Prismas abhängig ist, der Coefficient des lebendigen Elasticitätswiderstandes genannt. Damit keine bleibende Aenderung in der Länge des Prismas stattfinden soll, darf folglich die zur Zusammendrückung oder Ausdehnung angewandte dynamische Arbeit nicht das Produkt dieses Coefficienten in den Kubikinhalt des Prismas überschreiten.

§. 155.

Wenn ein prismatischer Körper an einem Ende aufgehängt und sowohl durch sein eigenes Gewicht wie auch durch ein am freien Ende angebrachtes Gewicht P ausgezogen wird, so wird die Ausdehnung und Tragfähigkeit dieses Körpers auf fol-

gende Weise gefunden. Es sei ω der Querschnitt des Körpers, p das Gewicht einer Kubikeinheit, folglich $p\omega$ das Gewicht einer Längeneinheit, l die ursprüngliche, $l + \Delta l$ die ausgedehnte Länge des Körpers. Bezeichnet man durch x' die Entfernung eines Querschnittes vom unteren Ende, durch x die ursprüngliche Grösse dieser Entfernung, so wird die Spannung in diesem Querschnitte: $p\omega x + P$, und ein Längenelement wird folglich hier im Verhältnisse $1 : 1 + \frac{p\omega x + P}{E\omega}$ ausgedehnt werden, oder es wird:

$$dx' = dx\left(1 + \frac{p\omega x + P}{E\omega}\right),$$

woraus, wenn man integrirt, in Bezug auf x zwischen den Grenzen o und l, und in Bezug auf x' zwischen den Grenzen o und $l + \Delta l$:

$$l + \Delta l = l + \frac{l}{E\omega}(\tfrac{1}{2}p\omega l + P),$$

und hieraus die Ausdehnung:

$$\Delta l = \frac{l}{E\omega}(\tfrac{1}{2}p\omega l + P).$$

Die Hälfte des Gewichts des prismatischen Körpers kann folglich als am unteren Ende wirkend angenommen werden.

Die grösste Spannung wird an dem oberen befestigten Ende stattfinden, und hier gleich $p\omega l + P$ sein. An der Elasticitätsgrenze wird folglich:

$$\omega T_a = p\omega l + P,\ P = \omega(T_a - pl),\ \omega = \frac{P}{T_a - pl},\ l = \frac{\omega T_a - P}{p\omega},$$

wodurch das innerhalb der Elasticitätsgrenze grösste Gewicht P, der kleinste Querschnitt ω und die grösste Länge l, jede Grösse durch die übrigen, bestimmt sind. Eine Stange, deren Länge grösser als $\frac{T_a}{p}$ ist, wird folglich durch ihr eigenes Gewicht die Elasticitätsgrenze überschreiten, und eine, deren Länge $\frac{F_a}{p}$ überschreitet, wird durch ihr eigenes Gewicht gleich zerrissen werden.

Ist der Körper am untersten Ende horizontal unterstützt und sowohl durch sein eigenes Gewicht als durch die Last P zusammengedrückt, so werden die vorigen Formeln auch hier gelten, wenn man nur die Zeichen der Grössen $\triangle l$ und E ändert. Die Zusammendrückung des Körpers wird folglich wie vorher die Ausdehnung

$$\Delta l = \frac{l}{E\omega}(\tfrac{1}{2}p\omega l + P),$$

und man kann folglich fortwährend die Hälfte des Gewichts des Körpers als am freien Ende wirkend annehmen.

Der grösste Druck wird im unteren unterstützten Ende stattfinden und hier gleich $p\omega l + P$ sein. An der Elasticitätsgrenze wird folglich:

$$\omega T_r = p\omega l + P,\ P = \omega(T_r - pl),\ \omega = \frac{P}{T_r - pl},\ l = \frac{\omega T_r - P}{p\omega}.$$

Eine Stange, die höher als $\frac{T_r}{p}$ ist, wird folglich durch ihr eigenes Gewicht die Elasticitätsgrenze überschreiten, und eine, deren Höhe $\frac{F_r}{p}$ überschreitet, wird durch ihr eigenes Gewicht zerquetscht werden. Es ist hier vorausgesetzt, dass die Stange am Biegen verhindert worden ist, welcher Fall im folgenden Capitel behandelt werden wird.

§. 156.

Ist der Körper kein Prisma, und sind folglich die auf der Axe senkrechten Querschnitte des Körpers nicht alle gleich, aber doch so, dass die Axe fortwährend durch ihre Schwerpunkte geht, so wird:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{P + p\int_0^x \omega dx}{E\omega} dx,$$

durch welche Gleichung die Ausdehnung oder Zusammendrückung des Körpers, sowohl durch sein eigenes Gewicht als durch dasje-

nige der Last P, bestimmt wird, wenn ω als Function von x bekannt ist. Die Spannung oder der Druck in der ursprünglichen Entfernung x von dem freien Endpunkte wird:

$$P + p\int_0^x \omega dx.$$

Ist umgekehrt die Ausdehnung oder Zusammendrückung Δl für jeden Werth von l, oder die Spannung oder der Druck in jedem Querschnitte des Körpers gegeben, so kann hierdurch der Flächeninhalt des Querschnittes ω als Function von x gefunden werden.

Man suche z. B. die Form eines an der oberen Endfläche aufgehängten Körpers (Fig. 54), welcher sowohl durch sein eigenes Gewicht, wie durch die Last P ausgedehnt ist, wenn die Spannung in jedem Querschnitte dem Flächeninhalt desselben proportional und folglich auf der Quadrateinheit constant sein soll. Es sei diese constante Spannung auf der Flächeneinheit gleich t, so wird:

$$t\omega = P + p\int_0^x \omega dx,$$

und hieraus durch Differentiation in Bezug auf x:

$$td\omega = p\omega dx,$$

und wieder durch Integration, indem man bemerkt, dass wenn $x = o$, $t\omega = P$ wird:

$$x = \frac{t}{p} \log \text{nat} \left(\frac{t\omega}{P}\right), \ \omega = \frac{P}{t} . e^{\frac{px}{t}}.$$

Es bezeichnet hier x den ursprünglichen Abstand des Querschnittes ω von der belasteten Endfläche, ehe der Körper ausgedehnt worden ist, und durch die obige Gleichung ist daher die Form bestimmt, welche der Körper haben muss, ehe er aufgehängt wird. Will man dagegen die Form des Körpers, nachdem er ausgedehnt worden ist, bestimmt haben, so findet man diese, wenn man bemerkt, dass jene Ausdehnung, weil die Spannung auf jeder Quadrateinheit jedes Querschnittes constant gleich t ist, dieselbe Wir-

kung haben muss, als wäre der Körper unausdehnbar, aber die Schwere jeder Kubikeinheit im Verhältniss $1 : 1 - \frac{t}{E}$ vermindert, wo E den Elasticitätscoefficienten des Körpers bezeichnet. Setzt man folglich in der obigen Formel des Querschnittes $p\left(1 - \frac{t}{E}\right)$ statt p, und x′ statt x, wo x′ den jetzigen Abstand des Querschnittes von der belasteten Endfläche bezeichnet, so findet man die Form des Körpers im ausgedehnten Zustande durch die Gleichung:

$$\omega = \frac{P}{t}\, e^{px'\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{E}\right)}.$$

Ist der Körper an der unteren Endfläche unterstützt (Fig. 55) und sowohl durch sein eigenes Gewicht wie durch eine Last Q zusammengedrückt, so wird die ursprüngliche Form des Körpers, wenn der Druck auf jeder Quadrateinheit jedes Querschnittes, nachdem der Körper aufgestellt und belastet ist, constant gleich t sein soll, genau dieselbe:

$$\omega = \frac{P}{t} \cdot e^{\frac{px}{t}}.$$

Seine Form nach dem Zusammendrücken ist aber darin von der Form des vorigen ausgedehnten Körpers verschieden, dass das Zeichen des Elasticitätscoefficienten E geändert werden muss, dass folglich:

$$\omega = \frac{P}{t} \cdot e^{px'\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{E}\right)}.$$

Die Grösse der Ausdehnung oder Zusammendrückung wird:

$$\Delta l = \frac{tl}{E}.$$

§. 157.

Wir haben §. 27 ff. die Gleichungen des Gleichgewichts eines von willkührlichen Kräften angegriffenen Seilpolygons entwickelt, wenn die Seiten des Polygons alle von unveränderlicher Länge angenommen werden. Um diese Gleichungen auf elastisch dehnbare Polygonseite anzuwenden, braucht man nur in jenen Gleichungen statt der ursprünglichen Länge r irgend einer Polygonseite die Grösse $r\left(1+\frac{t}{E\omega}\right)$ zu setzen, wo t die in der Seite stattfindende Spannung, ω den Querschnitt, und E den entsprechenden Elasticitätscoefficienten bezeichnen. Durch die Gleichungen des §. 28 wird dann die Lage aller Ecken des Polygons bestimmt werden.

Als Beispiel wollen wir die Theorie der Kettenlinie entwickeln, wenn diese als elastisch dehnbar, aber fortwährend als vollkommen biegsam, angenommen wird. Das Längenelement der unausdehnbaren Kettenlinie war nach §. 30:

$$ds = -\frac{X}{k}\cdot\frac{d\Theta}{\sin^2\Theta},$$

wo X (Fig. 8) die horizontale Componente der an jedem Endpunkte der Kettenlinie wirkenden Kraft bezeichnet, k das Gewicht einer Längeneinheit der Kette und Θ den Winkel, welchen das Längenelement ds mit einer vertikalen Axe bildet. Bezeichnet man fortwährend durch t die im Elemente ds stattfindende Spannung, so ist $t = \frac{X}{\sin\Theta}$.

Wenn die Kettenlinie elastisch dehnbar ist, so wird jedes Längenelement im Verhältnisse $1 : 1 + \frac{t}{E\omega}$ ausgedehnt. Bezeichnet man folglich jetzt durch ds das Längenelement dieser dehnbaren Kettenlinie, so wird:

$$ds = -\frac{X}{k}\cdot\frac{d\Theta}{\sin^2\Theta}\cdot\left(1+\frac{t}{E\omega}\right) = -\frac{X}{k}\cdot\left(1+\frac{X}{E\omega\sin\Theta}\right)\cdot\frac{d\Theta}{\sin^2\Theta},$$

und hieraus:

$$dx = \sin\Theta\, ds = -\frac{X}{k}\left(1 + \frac{X}{E\omega \sin\Theta}\right) \cdot \frac{d\Theta}{\sin\Theta},$$

$$dz = \cos\Theta\, ds = -\frac{X}{k}\left(1 + \frac{X}{E\omega \sin\Theta}\right) \cdot \frac{\cos\Theta \,.\, d\Theta}{\sin^2\Theta}.$$

Nimmt man wie vorher den untersten Punkt der Kettenlinie als Anfangspunkt der Coordinaten an, so erhält man durch Integration:

$$x = \frac{X}{k} \log \text{nat} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\Theta + \frac{X^2}{kE\omega} \operatorname{cotg}\Theta,$$

$$z = \frac{X}{k}\left(\frac{1}{\sin\Theta} - 1\right) + \frac{X}{2kE\omega} \operatorname{cotg}\Theta.$$

Eliminirt man Θ zwischen diesen beiden Gleichungen, so erhält man die Gleichung der elastisch dehnbaren Kettenlinie. Wir werden hier diese Elimination für den Fall ausführen, dass der Elasticitätscoefficient sehr gross ist in Bezug auf $\frac{X}{\omega}$, so dass man die höheren Potenzen von $\frac{X}{E\omega}$ vernachlässigen kann, welches in der Anwendung immer der Fall ist.

Man erhält dann aus der ersten der beiden vorigen Gleichungen:

$$e^{\frac{kx}{X} - \frac{X}{E\omega}\operatorname{cotg}\Theta} = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\Theta = \frac{1 + \cos\Theta}{\sin\Theta},$$

$$e^{-\frac{kx}{X} + \frac{X}{E\omega}\operatorname{cotg}\Theta} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Theta = \frac{1 - \cos\Theta}{\sin\Theta},$$

und hieraus durch Addition:

$$e^{\frac{kx}{X} - \frac{X}{E\omega}\operatorname{cotg}\Theta} + e^{-\frac{kx}{X} + \frac{X}{E\omega}\operatorname{cotg}\Theta} = \frac{2}{\sin\Theta}.$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man:

$$\frac{kz + X}{X} - \frac{X}{2E\omega}\operatorname{cotg}^2\Theta = \frac{1}{\sin\Theta},$$

und folglich:

$$\frac{kz+X}{X}-\frac{X}{2E\omega}\cdot\operatorname{cotg}^2\Theta=\tfrac{1}{2}e^{\frac{kx}{X}-\frac{X}{E\omega}\operatorname{cotg}\Theta}+\tfrac{1}{2}e^{-\frac{kx}{X}+\frac{X}{E\omega}\operatorname{cotg}\Theta}.$$

Entwickelt man hier die Exponentialgrössen nach den höheren Potenzen von $\frac{X}{E\omega}$, und vernachlässigt die höheren Potenzen dieser Grössen, so wird:

$$\frac{kz+X}{X}-\frac{X}{2E\omega}\operatorname{cotg}^2\Theta=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{kx}{X}}+e^{-\frac{kx}{X}}\right)-\frac{X}{2E\omega}\left(e^{\frac{kx}{X}}-e^{-\frac{kx}{X}}\right)\operatorname{cotg}\Theta.$$

Es ist ferner:

$$\operatorname{cotg}\Theta=\tfrac{1}{2}(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\Theta-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Theta)=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{kx}{X}-\frac{X}{E\omega}\operatorname{cotg}\Theta}-e^{-\frac{kx}{X}+\frac{X}{E\omega}\operatorname{cotg}\Theta}\right),$$

oder, wenn man nur die von $\frac{X}{E\omega}$ freien Glieder behält:

$$\operatorname{cotg}\Theta=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{kx}{X}}-e^{-\frac{kx}{X}}\right).$$

Substituirt man diesen Werth von cotg Θ in der obigen Gleichung, wo sie nur mit $\frac{X}{E\omega}$ multipicirt vorkommt, so erhält man:

$$\frac{kz+X}{X}-\frac{X}{8E\omega}\left(e^{\frac{kx}{X}}-e^{-\frac{kx}{X}}\right)^2=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{kx}{X}}+e^{-\frac{kx}{X}}\right)-\frac{X}{4E\omega}\left(e^{\frac{kx}{X}}-e^{-\frac{kx}{X}}\right)^2,$$

woraus:

$$z=-\frac{X}{k}+\frac{X}{2k}\left(e^{\frac{kx}{X}}+e^{-\frac{kx}{X}}\right)-\frac{X^2}{8kE\omega}\left(e^{\frac{kx}{X}}-e^{-\frac{kx}{X}}\right)^2,$$

welches dann die Gleichung der elastisch dehnbaren Kettenlinie ist.

Der Winkel Θ, welchen die Tangente des Punktes (x, z) mit der vertikalen zAxe bildet, wird durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$\operatorname{cotang}\Theta=dz=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{kx}{X}}-e^{-\frac{kx}{X}}\right)-\frac{X}{4E\omega}\left(e^{\frac{2kx}{X}}-e^{-\frac{2kx}{X}}\right).$$

Die Spannung t im Punkte (x, z) findet man weiter hieraus:

$$t = \frac{X}{\sin\Theta} = X\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\Theta} = \frac{X}{2}\left(e^{\frac{kx}{X}} + e^{-\frac{kx}{X}}\right) - \frac{X^2}{4E\omega}\left(e^{\frac{kx}{X}} - e^{-\frac{kx}{X}}\right)^2.$$

Diese Spannung wird ein Maximum, wenn x den grössten möglichen Werth hat, folglich in dem höchsten Aufhängepunkte. Bezeichnet man durch $\mathfrak{x}$ die Abscisse dieses Punktes, so findet man das Maximum der Spannung, wenn man in der obigen Formel $\mathfrak{x}$ statt x setzt. Damit die Elasticitätsgrenze nirgends überschritten wird, muss das Product des absoluten Tragfähigkeitscoefficienten mit dem Flächeninhalte des Querschnittes ω gleich oder grösser als dieses Maximum sein. Dies giebt die Bedingungsgleichung:

$$\omega T_a = \text{oder} > \frac{X}{2}\left(e^{\frac{k\mathfrak{x}}{X}} + e^{-\frac{k\mathfrak{x}}{X}}\right) - \frac{X^2}{4E\omega}\left(e^{\frac{k\mathfrak{x}}{X}} - e^{-\frac{k\mathfrak{x}}{X}}\right)^2,$$

woraus man den kleinsten Querschnitt findet, wenn die Elasticitätsgrenze nicht überschritten werden soll:

$$\omega = \frac{X}{2T_a}\left(e^{\frac{k\mathfrak{x}}{X}} + e^{-\frac{k\mathfrak{x}}{X}}\right) - \frac{X}{2E}\cdot\frac{\left(e^{\frac{k\mathfrak{x}}{X}} - e^{-\frac{k\mathfrak{x}}{X}}\right)^2}{\left(e^{\frac{k\mathfrak{x}}{X}} + e^{-\frac{k\mathfrak{x}}{X}}\right)}.$$

Aus der Gleichung:

$$ds = -\frac{X}{k}\left(1 + \frac{X}{E\omega\,.\,\sin\Theta}\right)\cdot\frac{d\Theta}{\sin^2\Theta}$$

findet man durch Integration:

$$s = \frac{X}{k}\operatorname{cotg}\Theta - \frac{X^2}{kE\omega}\left(\frac{\cos\Theta}{2\sin^2\Theta} - \tfrac{1}{2}\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\Theta\right).$$

Es ist nun oben gefunden:

$$\operatorname{cotg}\Theta = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{kx}{X}} - e^{-\frac{kx}{X}}\right) - \frac{X}{4E\omega}\left(e^{\frac{2kx}{X}} - e^{-\frac{2kx}{X}}\right),$$

und, wenn man nur die von $\frac{X}{E\omega}$ freien Glieder behält:

$$\frac{1}{\sin\Theta} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{kx}{X}} - e^{-\frac{kx}{X}}\right), \quad \log \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\Theta = \frac{kx}{X}.$$

Diese Werthe substituirt geben alsdann:

$$s = \frac{X}{2k}\left(e^{\frac{kx}{X}} - e^{-\frac{kx}{X}}\right) + \frac{X^2}{8kE\omega}\left(e^{\frac{2kx}{X}} - e^{-\frac{2kx}{X}}\right) + \frac{Xx}{2E\omega}.$$

Bezeichnet man die ursprüngliche Länge der Kettenlinie, ehe sie durch ihre eigene Schwere ausgedehnt war, durch σ, so wird:

$$\sigma = \frac{X}{2k}\left(e^{\frac{kx}{X}} - e^{-\frac{kx}{X}}\right),$$

und die Ausdehnung der Kettenlinie von dem Scheitelpunkte bis zum Punkte (x, z) wird folglich:

$$s - \sigma = \frac{X^2}{8kE\omega}\left(e^{\frac{2kx}{X}} - e^{-\frac{2kx}{X}}\right) + \frac{Xx}{2E\omega},$$

oder, wenn man bemerkt, dass, wenn die mit $\frac{X}{E\omega}$ multiplicirten Glieder vernachlässigt werden:

$$z + \frac{X}{k} = \tfrac{1}{2}\,\frac{X}{k}\left(e^{\frac{kx}{X}} + e^{-\frac{kx}{X}}\right),$$

und wenn man den obigen Werth von σ benutzt:

$$s - \sigma = \frac{k\sigma}{2E\omega}\left(z + \frac{X}{k}\right) + \frac{Xx}{2E\omega} = \frac{1}{2E\omega}\left(kz\sigma + X(\sigma + x)\right).$$

Diese Ausdehnung der elastisch dehnbaren Kettenlinie kann auch auf eine andere Weise bestimmt werden. Es ist nämlich:

$$ds = d\sigma\left(1 + \frac{t}{E\omega}\right), \quad d\sigma = \frac{ds}{1 + \frac{t}{E\omega}} = ds\left(1 - \frac{t}{E\omega}\right).$$

Es ist jetzt $t = kz + X$, wenn man nur die von $\frac{X}{E\omega}$ freien Glieder behält, und es wird folglich:

$$d\sigma = ds\left(1 - \frac{kz + X}{E\omega}\right)$$

und durch Integration:

$$\sigma = s\left(1 - \frac{X}{E\omega}\right) - \frac{k}{E\omega}\int^s zds.$$

Bezeichnet man jetzt durch h die Höhe des Schwerpunkts des Bogens über dem untersten Punkte der Kettenlinie, so ist:

$$\int_0^s zds = hs,$$

und es wird folglich:

$$\sigma = s\left(1 - \frac{X}{E\omega} - \frac{kh}{E\omega}\right),$$

und die Ausdehnung:

$$s - \sigma = \frac{s}{E\omega}(X + kh).$$

Der unterste Punkt der Kettenlinie ist fortwährend als Anfangspunkt der Coordinaten angenommen.

Diese Theorie der dehnbaren Kettenlinie gilt fortwährend, wenn sie auch nicht aus einer vollkommen biegsamen Schnur besteht, sondern aus einem nach jener Linie geformten krummen festen Körper, dessen Gewicht wie bei der Schnur auf gleichen Bogenlängen überall gleich ist. Die Biegsamkeit hat nämlich, nachdem der Körper erst nach der oben bestimmten Form der Kettenlinie gebogen ist, keinen Einfluss mehr, da kein Streben nach Biegung mehr stattfindet, und es macht folglich keinen Unterschied mehr, ob der Körper vollkommen biegsam oder nur elastisch biegsam ist. Die Spannung oder der Druck wird immer nur in der Längenrichtung des krummen Körpers stattfinden.

§. 158.

Wird die convexe Seite der Kettenlinie nach oben gekehrt, so dass folglich die Schwere der Linie nach der concaven Seite hin wirkt, so werden die Gleichungen des §. 30 fortwährend gel-

ten, wenn man nur das Zeichen der Kräfte X_{I}, Z_{I}, X_{II}, Z_{II} ändert und durch $D = -t$ den im Punkte (x, z) stattfindenden Druck bezeichnet. Dieser Gleichgewichtszustand (Fig. 56) würde aber bei einem vollkommen biegsamen Körper ein unstetiger sein, indem die kleinste Störung ihn aufheben und der Körper dann eine neue durch §. 30 bestimmte Form annehmen würde, in welcher die convexe Seite der Bogen in die Richtung der Kräfte fällt. Ist dagegen der Körper nicht vollkommen, sondern nur elastisch biegsam, so wird diese Elasticität einen gewissen Widerstand gegen jene Störungen leisten, und das Gleichgewicht wird folglich ein innerhalb gewisser Grenzen stetiges sein.

Dies ist der Fall, wenn ein fester krummer Körper, dessen Gewicht auf gleichen Bogenlängen überall gleich ist, nach einer solchen durch den Schwerpunkt jedes Querschnittes gehenden Linie geformt ist. Sind hier wie vorher beide Endpunkte fest, so wird der Körper auch in einer aufwärts gekehrten convexen Stellung (Fig. 57), im Gleichgewichte sein, ohne dass er im geringsten gebogen wird. Der Widerstand des Körpers gegen Biegung hat hier keine andere Wirkung, als jenes Gleichgewicht innerhalb gewisser Grenzen stetig zu machen. Die Gleichung der durch die Schwerpunkte der Querschnitte gehenden Mittellinie wird hier dieselbe wie im vorigen Paragraphen, wenn man nur das Zeichen der Ordinate z und der Kraft X ändert, weil hier die Ordinate als positiv nach unten und die Kraft X nach innen wirkt. Dies wird dieselbe Wirkung hervorbringen, als wenn man nur das Zeichen des Elasticitätscoefficienten E geändert hätte. Es wird folglich die Gleichung der Mittellinie:

$$z = -\frac{X}{k} + \frac{X}{2k}\left(e^{\frac{kx}{X}} + e^{-\frac{kx}{X}}\right) + \frac{X^2}{8kE\omega}\left(e^{\frac{kx}{X}} - e^{-\frac{kx}{X}}\right)^2.$$

Der Druck im Punkte (x, z), welcher in der Richtung der krummen Linie stattfindet, wird:

$$D = -t = \frac{X}{2}\left(e^{\frac{kx}{X}} + e^{-\frac{kx}{X}}\right) + \frac{X^2}{4E\omega}\left(e^{\frac{kx}{X}} - e^{-\frac{kx}{X}}\right)^2,$$

und das Minimum des Querschnittes, wenn die Elasticitätsgrenze nirgends überschritten werden soll, wird:

$$\omega = \frac{X}{T_r}\left(e^{\frac{kr}{X}} + e^{-\frac{kr}{X}}\right) + \frac{X}{E} \cdot \frac{\left(e^{\frac{kr}{X}} - e^{-\frac{kr}{X}}\right)^2}{\left(e^{\frac{kr}{X}} + e^{-\frac{kr}{X}}\right)}.$$

Die Verkürzung der Mittellinie wird:

$$\sigma - s = \frac{1}{2E\omega}\left(k\sigma z + X(\sigma + x)\right) = \frac{s}{E\omega}(X + kh),$$

wo h die Tiefe des Schwerpunkts des Bogens s unter der Scheitellinie der Mittellinie bezeichnet.

§. 159.

Wenn ein fester elastischer Körper so geformt ist, dass er durch die auf ihn wirkende Belastung nur zusammengedrückt oder ausgedehnt wird, aber nicht seine Form zu ändern strebt, so wird die durch die Schwerpunkte der Querschnitte gehende mittlere Axenschicht nach den **Elasticitätsbogen der Belastung** geformt genannt. Wenn die Belastung so vertheilt ist, dass auf gleiche Bogenlängen der mittleren Axenschicht auch gleiche Last kommt, so wird, wie in den zwei vorigen Paragraphen gezeigt, der Elasticitätsbogen die ausgedehnte oder zusammengedrückte Kettenlinie sein. Wir werden hier die allgemeine Form des Elasticitätsbogens einer beliebigen Belastung suchen, indem wir immer annehmen, dass die auf jeden Querschnitt des Körpers wirkende Belastung auf diesem so vertheilt ist, dass ihre Resultante durch den Schwerpunkt geht, und die Belastung folglich als auf die durch jenen Schwerpunkt gehende mittlere Axenschicht unmittelbar wirkend angenommen werden kann.

Es sei AMC (Fig. 58) die mittlere Axenschicht des Körpers. Der Körper sei in A festgehalten und sowohl am freien Endpunkte von einer in der Richtung der Tangente wirkenden Kraft Q, wie auch in jedem Punkte von einer Kraft, welche wir auf die Längeneinheit des Bogens reducirt durch k bezeichnen werden. Damit hier Gleichgewicht stattfinden soll, ohne dass der Körper gebogen wird, muss alsdann der Druck oder die Spannung in jedem Punkte M der mittleren Axenschicht der Resultante aller auf den Bogen MC wirkenden Kräfte gleich aber entgegengesetzt sein. Dies ist nach §. 27, I. Abschnitt, auch das Gesetz des Gleichgewichts eines vollkommen biegsamen Systems. Die mittlere Axenschicht wird folglich, wenn sie nach den Elasticitätsbogen des Körpers geformt sein soll, genau dieselbe Form haben müssen, als eine von denselben Kräften angegriffene biegsame Schnur, und die Formeln der §§. 27—35 sind folglich auch hier anwendbar. Dies geht auch unmittelbar daraus hervor, dass hier ja keine Biegung des festen Körpers stattfinden soll, und es folglich einerlei ist, ob der Körper vollkommen oder nur elastisch biegsam ist.

Nehmen wir einen beliebigen Punkt O als Anfangspunkt der Coordinaten an, bezeichnen durch x, y, z die Coordinaten eines Punktes M der mittleren Axenschicht, durch S die Länge des ganzen Bogens AMC, durch s diejenige des Bogens AM. Es sei M' ein zwischen M und C gelegener Punkt der mittleren Axenschicht; bezeichnen wir durch s' die Länge des Bogens AMM', und durch α, β, γ die Winkel, welche die auf das Element ds' wirkende Kraft kds' mit den drei Coordinatenaxen bildet. Bezeichnen wir ferner durch t die im Punkte M in der Richtung der Tangente stattfindende Spannung, wo das positive t eine Ausdehnung, das negative eine Zusammendrückung bezeichnet. Die Componenten der Spannung t längs der drei Coordinatenaxen werden dann: td_sx, td_sy, td_sz; die Summen der Componenten der auf MC wirkenden Kräfte k werden:

$$\int_s^S k \cos\alpha \, ds', \quad \int_s^S k \cos\beta \, ds', \quad \int_s^S k \cos\gamma \, ds',$$

und die Componenten der auf den Endpunkt C wirkenden Kraft Q endlich werden wir durch X, Y, Z bezeichnen. Die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts, durch welche auch die Form des Elasticitätsbogens bestimmt ist, werden dann:

$$t d_s x = X + \int_s^S k \cos\alpha \, ds',$$

$$t d_s y = Y + \int_s^S k \cos\beta \, ds',$$

$$t d_s z = Z + \int_s^S k \cos\gamma \, ds'.$$

Differentiirt man diese Gleichungen in Bezug auf s, multiplicirt dann die erste mit $d_s x$, die zweite mit $d_s y$, die dritte mit $d_s z$ und bemerkt, dass:

$$(d_s x)^2 + (d_s y)^2 + (d_s z)^2 = 1,$$

und folglich:

$$d_s x \,.\, d_s{}^2 x + d_s y \,.\, d_s{}^2 y + d_s z \,.\, d_s{}^2 z = o,$$

so findet man:

$$d_s t = - k (\cos\alpha \, d_s x + \cos\beta \, d_s y + \cos\gamma \, d_s z),$$

und hieraus durch Integration:

$$t = - \int k (\cos\alpha \, d_s x + \cos\beta \, d_s y + \cos\gamma \, d_s z) \, ds,$$

wo die Constante des Integrals so zu bestimmen ist, dass wenn $s = S$, auch $t = Q$ wird.

Bezeichnet man durch ω den Flächeninhalt des Querschnittes des Körpers, als Function der Bogenlänge s oder der Coordinaten x, y, z ausgedrückt, so wird die Ausdehnung des Elementes ds gleich $\frac{t ds}{E\omega}$ sein, und folglich die ganze Ausdehnung der nach den Elasticitätsbogen geformten mittleren Axenschicht:

$$\Delta S = \frac{1}{E}\int_{o}^{S} \frac{t ds}{\omega},$$

wo ein negativer Werth von $\triangle S$ ein Zusammendrücken bezeichnet.

Damit die Elasticitätsgrenze nirgends überschritten werde, darf der positive Werth von t, oder die Spannung, nirgends die Grösse ωT_a überschreiten, und der negative Werth von t, oder der Druck, nirgends die Grenze ωT_r, wo T_a und T_r den absoluten und den rückwirkenden Tragfähigkeitscoefficienten des Körpers bezeichnen.

§. 160.

Wir haben in den §§. 139 und 140 schon den Fall betrachtet, wo k ursprünglich constant war. Wir werden hier noch etliche andere Fälle untersuchen, indem wir der Einfachheit wegen annehmen werden, dass alle auf den Körper wirkenden Kräfte in einer Ebene, der (x,y)Ebene, sind, in welche dann auch die nach dem Elasticitätsbogen geformte mittlere Axenschicht fallen muss. Es wird dann $\cos\beta = \sin\alpha$, und die Gleichungen des Gleichgewichts werden:

$$t d_s x = X + \int_s^S k \cos\alpha \, ds', \quad t d_s y = Y + \int_s^S k \sin\alpha \, ds'.$$

Die Spannung t wird durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$d_s t = -k\,(\cos\alpha\, d_s x + \sin\alpha\, d_s y).$$

Es seien jetzt als erstes Beispiel alle die auf den Bogen wirkenden Kräfte k in der Richtung der Normalen auswärts gerichtet. Es wird alsdann:

$$\sin\alpha = d_s x, \quad \cos\alpha = -d_s y.$$

Substituirt man dies in der obigen Gleichung der Spannung, so erhält man:

$$d_s t = o,$$

woraus:

$$t = \text{Const},$$

und, weil im äussersten freien Endpunkte die Spannung gleich Q sein muss, so wird auch überall:

$$t = Q.$$

Differentiirt man jetzt die zwei obigen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts in Bezug auf s, so erhält man:

$$t d_s^2 x = - k \cos \alpha, \quad t d_s^2 y = - k \sin \alpha.$$

Es ist nun, wenn man den Krümmungshalbmesser durch ϱ bezeichnet:

$$\varrho = - \frac{1}{d_s \alpha} = \frac{d_s y}{d_s^2 x} = \frac{d_s x}{d_s^2 y},$$

und man erhält folglich auf zwei Weisen, wenn man die Werthe von $d_s y$ und $d_s^2 x$, oder von $d_s x$ und $d_s^2 y$ substituirt:

$$\varrho = \frac{t}{k} = \frac{Q}{k}.$$

Der Krümmungshalbmesser ist folglich in jedem Punkte umgekehrt proportional mit der auf die Längeneinheit der Bogen normal wirkenden Kraft k. Alles dies ist mit dem §. 32 genau übereinstimmend.

Ist die Kraft k constant, so wird auch ϱ constant sein, und die mittlere Axenschicht muss folglich ein Kreisbogen sein, dessen Halbmesser dem Verhältniss zwischen der am freien Ende tangentiell wirkenden Kraft Q und der auf jede Längeneinheit des Bogens normal wirkenden Kraft k gleich ist.

Die Ausdehnung des Kreisbogens wird:

$$\Delta S = \frac{1}{E} \int_0^S \frac{t ds}{\omega} = \frac{t S}{E \omega} = \frac{k \varrho S}{E \omega},$$

wo ω den Querschnitt des Körpers bezeichnet, welchen wir als constant annehmen. Ist der Körper ein ganzer Ring, so wird $S = 2\pi\varrho$, und die Ausdehnung wird gleich:

$$\frac{2\pi k \varrho^2}{E\omega}.$$

An der Elasticitätsgrenze wird $t = \omega T_a$, woraus:

$$\varrho = \frac{\omega T_a}{k},\ \omega = \frac{t}{T_a} = \frac{k\varrho}{T_a}.$$

§. 161.

Es seien als zweites Beispiel alle die auf den Bogen der mittleren Axenschicht wirkenden Kräfte k mit der einen Coordinatenaxe parallel und den mit dieser Axe parallelen Coordinaten proportional. Dies wird der Fall sein, wenn der krumme feste Körper eine bis zu einer horizontalen Ebene aufgefüllte gleichförmige Belastung trägt (Fig. 59) und man das Gewicht des Körpers vernachlässigen kann. Nehmen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in der oberen horizontalen Grenzlinie der Belastung an, und zwar in O senkrecht über dem Scheitelpunkt B des Bogens der mittleren Axenschicht ABC. Die xAxe horizontal, die yAxe vertical nach unten. Man muss alsdann in den allgemeinen Formeln $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $kds' = pydx$ setzen, wo p das Gewicht so vieler Kubikeinheiten der Belastung bezeichnet, als die auf der (x,y)Ebene senkrechte Breite Längeneinheiten enthält. Die Gleichungen des Gleichgewichts werden alsdann:

$$td_s x = X,$$

$$td_s y = Y + p\int_x^{\mathfrak{x}} ydx,$$

wo $\mathfrak{x}$ die Abscisse des Endpunktes C ist. Hieraus findet man:

$$d_x y = \frac{Y + p\int_x^{\mathfrak{x}} ydx}{X},$$

und durch Differentiation in Bezug auf x:

$$d_x^2 y = -\frac{py}{X}.$$

Das vollständige Integral dieser Differentialgleichung ist:

$$y = A \sin\left(x\sqrt{\frac{p}{X}}\right) + B \cos\left(x\sqrt{\frac{p}{X}}\right).$$

Bezeichnet man durch a die Ordinate OB des Scheitelpunktes B, so sind die Constanten A und B so zu bestimmen, dass, wenn $x = o$, $y = a$ und $d_x y = o$ wird, dies ergiebt $B = a$, $A = o$, und folglich die Gleichung der Elasticitätsbogen

$$y = a \cos\left(x\sqrt{\frac{p}{X}}\right)$$

Hieraus findet man dann ferner:

$$ds = dx\sqrt{1 + (d_x y)^2} = dx\sqrt{1 + \frac{pa^2}{X}\sin^2\left(x\sqrt{\frac{p}{X}}\right)},$$

$$t = \frac{X}{d_s x} = X\sqrt{1 + \frac{pa^2}{X}\sin^2\left(x\sqrt{\frac{p}{X}}\right)}$$

$$= \sqrt{X\left(X + pa^2 \sin^2\left(x\sqrt{\frac{p}{X}}\right)\right)}.$$

Die Spannung wird folglich am grössten, wenn x am grössten ist, folglich in dem niedrigsten Endpunkte des Bogens. Es sei C dieser Endpunkt, und dessen Abscisse $\mathfrak{x}$, so wird folglich das Maximum der Spannung gleich

$$t = \sqrt{X\left(X + pa^2 \sin^2\left(\mathfrak{x}\sqrt{\frac{p}{X}}\right)\right)}.$$

Bezeichnet man wie vorher durch ω den Flächeninhalt des Querschnittes der krummen Körper, so muss folglich, damit die Elasticitätsgrenze nicht überschritten werden soll, ω wenigstens gleich

$$\omega = \frac{1}{T_r}\sqrt{X\left(X + pa^2 \sin^2\left(\mathfrak{x}\sqrt{\frac{p}{X}}\right)\right)}$$

sein.

Die Zusammendrückung der krummen Körper, von B bis C gerechnet, wird, wenn ω constant ist:

$$\Delta S = \frac{1}{E\omega}\int_o^S t ds = \frac{1}{E\omega}\int_o^{\mathfrak{x}}\left(X + pa^2 \sin^2\left(x\sqrt{\frac{p}{X}}\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{E\omega}\left[(X + \tfrac{1}{2}pa^2)\,\mathfrak{x} - \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{pX}\,.\,\sin\left(2\mathfrak{x}\sqrt{\frac{p}{X}}\right)\right].$$

§. 162.

Tafel

der bei verschiedenen Körpern stattfindenden Werthe des Elasticitätscoefficienten E, der absoluten und rückwirkenden Tragfähigkeitscoefficienten T_a und T_r, und der absoluten und rückwirkenden Festigkeitscoefficienten F_a und F_r. — Als Flächeneinheit des Querschnittes ist der preuss. Quadratzoll und als Gewichtseinheit das preuss. Pfund angenommen.

Name der Körper.	Elasticitäts-coefficient E	Absoluter Tragfähigkeitscoefficient T_a	Rückwirkender Tragfähigkeitscoeff. T_r	Absoluter Festigkeitscoefficient F_a	Rückwirkender Festigkeitscoefficient F_r
Holzarten.					
Eiche	1500000 bis 2000000	2000 bis 2800	300 bis 450	9000 bis 12000	3000 bis 6000
Tanne	1200000 bis 1900000	2400 bis 3800	150 bis 250	12000 bis 13000	2000 bis 3000
Fichte	2000000 bis 2600000	2400 bis 3800	550 bis 700	11000 bis 12000	6000 bis 8000
Metalle.					
Eisen, gegossen	14000000 bis 17500000	6000 bis 10000	29200	7000 bis 16500	8200 bis 11500
ausgezogen	30600000	14600	—	89000 bis 95000	—
geschmiedet	28000000	8900	13700	53000 bis 61000	—
gewalzt a) in der Richtung der Walze	—	10200	—	37000 bis 42000	28000 bis 30000
b) in einer darauf senkrechten Richt.	—	8800	—	—	—
Eisenketten, gewöhnl.	—	29200	—	—	—
mit untergestützten Gliedern	—	43800	—	—	—
Gussstahl, ausgezogen	28600000	80000	—	122000	—
angelassen	28600000	—	—	96000	—
Klavierdraht	—	65000	—	100000 bis 145000	—
Kanonenmetall	—	18000	—	—	—
Blei, gegossen	2600000	—	—	1800 bis 3200	—
ausgezogen	2600000	—	—	3000 bis 3500	—
angelassen	2500000	140	—	2600 bis 3000	—

Name der Körper.	Elasticitäts-coefficient E	Absoluter Tragfähigkeitscoefficient T_a	Rückwirkender Tragfähigkeitscoeff. T_r	Absoluter Festigkeitscoefficient F_a	Rückwirkender Festigkeitscoefficient F_r
Zinn, gegossen	6100000	240	—	4000	15000
ausgezogen	5600000	280	—	3600 bis 4400	—
angelassen	5400000	280	—	2500 bis 5300	—
Zink, gegossen	13200000	—	—	6600 bis 8800	—
ausgezogen	12800000	—	—	19000 bis 23000	—
angelassen	14100000	—	—	21000	—
Kupfer, gegossen	—	960	—	18000	110000
ausgezogen	18200000	1800	—	60000	—
angelassen	15400000	—	—	45000	—
gewalzt	—	—	—	32000	—
Gold, ausgezogen	11900000	19000	—	39000 bis 45000	—
angelassen	9300000	3000	—	16000	—
Silber, ausgezogen	10800000	6500	—	42000 bis 44000	—
angelassen	10400000	2000	—	22000 bis 24000	—
Platin, ausgezogen	24900000	15000	—	50000	—
angelassen	22700000	15000	—	34000 bis 40000	—
Verschiedene Körper.					
Hanfseile, trocken	—	1800	—	—	—
nass	—	1200	—	—	—
getheert	—	1400	—	—	—
Leder	—	360	—	—	—
Mauerstein, sehr hart	—	29	175	—	800 bis 1000
gewöhnlich	—	—	68	—	500
Kalkstein, hart	—	88	730	—	—
gewöhnlich	—	—	440	—	—
Mörtel, bester Art	—	13	58	—	500
gewöhnlich	—	4	36	—	—
Basalt	—	—	2900	—	—
Granit, hart	—	—	1000	—	—
gewöhnlich	—	—	580	—	—
Marmor, hart	—	—	1400	—	—
Sandstein, hart	—	—	1300	—	—
weich	—	—	6	—	—
Glas, nach Savart	8600000	—	—	—	—
nach Colladon und Sturm	13700000	—	—	—	—

b) Widerstand der Körper gegen Biegung.

§. 163.

Betrachten wir einen an dem einen Ende befestigten horizontalen prismatischen Körper, welcher durch eine am freien Ende wirkende Kraft gebogen wird. Die an der convexen Seite des Körpers liegenden Schichten werden dann verlängert, die an der concaven Seite werden verkürzt. In der Mitte des Körpers wird eine gewisse Schicht unveränderlicher Länge bleiben. Wenn die Biegung in einer verticalen Ebene stattfindet, so wird diese Schicht eine horizontale Cylinderfläche bilden müssen. Sie wird die neutrale Axenschicht genannt.

Es sei (Fig. 60) der horizontale Cylinder ABCD die Lage der neutralen Axenschicht. Betrachten wir einen Querschnitt ma′na des gegebenen prismatischen Körpers. Der Durchschnitt mit der neutralen Axenschicht wird die horizontale gerade Linie aa′. Die unter aa′ liegenden Schichten sind zusammengedrückt, die über aa′ liegenden ausgedehnt. Es werden hierdurch im Querschnitte ma′na Molekülarkräfte hervorgerufen, welche unterhalb der Linie a′a die Molekülen von einander zu entfernen, oberhalb derselben sie einander zu nähern streben. Diese Kräfte können in horizontale und verticale zerlegt werden. Es werden auch in ma′na andere in dieser Ebene selbst stattfindende Widerstandskräfte hervorgerufen, welche der Abreissung des Körpers in diesem Querschnitte entgegenstehen werden. Diese können ebenfalls in horizontale und verticale Kräfte zerlegt werden. Damit alle diese Molekülarkräfte mit der gegebenen Kraft P im Gleichgewicht sein können, ist es nothwendig, dass die Summe der verticalen Widerstandskräfte gleich P sei, dass die Summe der horizontalen Widerstandskräfte gleich Null sei, und dass die Summe der Momente jener verticalen und horizontalen Widerstandskräfte und desjenigen der gegebenen Kraft P in Bezug auf die Linie aa′ Null sei.

Wir werden fortwährend durch E den Elasticitätscoefficienten der Materie bezeichnen; durch ϱ den Krümmungshalbmesser des horizontalen Cylinders im Querschnitte aa'; durch u und v die Abscisse und Ordinate irgend eines Punktes p im Querschnitte ma'na, längs aa' und senkrecht auf derselben von a als Anfangspunkt gerechnet; durch 0 und b die Grenzwerthe von u; durch $f_1(u)$ und $f_2(u)$ die Grenzwerthe von v oberhalb und unterhalb der Linie aa'; durch x den Abstand des Querschnittes von dem befestigten Ende des Prismas AB; endlich durch a den Abstand des Gewichtes P von demselben Ende, welche Grösse, so lange die Biegung nicht gross ist, nur wenig von der Länge des gegebenen prismatischen Körpers verschieden ist.

Wenn man jetzt nur die durch den Punkt p gehende elementare Faser betrachtet, so wird du dv ihr Querschnitt sein; ein Längenelement dieser Faser, dessen ursprüngliche Länge dx ist, wird in $dx \cdot \frac{v}{\varrho}$ verlängert sein, folglich die Faser im Punkte p im Verhältnisse $dx \cdot \frac{v}{\varrho} : dx = \frac{v}{\varrho}$ verlängert. Die durch diese Verlängerung hervorgerufene Widerstandskraft wird $E du \cdot dv \cdot \frac{v}{\varrho}$, und ihr Moment in Bezug auf die Linie aa' wird $E du . dv . \frac{v}{\varrho} . v = E du . dv . \frac{v^2}{\varrho}$. Die Summen der im Querschnitte ma'na durch die Verlängerung und Zusammendrückung der Faser oder Schichten hervorgerufenen Widerstandskräfte werden folglich respective:

$$\frac{E}{\varrho}\int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v dv$$

und

$$\frac{E}{\varrho}\int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v dv.$$

Die Summe der Momente dieser Kräfte in Bezug auf aa' wird:

$$\frac{E}{\varrho}\left(\int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v^2 dv + \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v^2 dv\right).$$

Das Moment der Kraft P in Bezug auf dieselbe Axe ist P(a — x). Die in der Ebene ma'na selbst hervorgerufenen Widerstandskräfte gegen die Abreissung in diesem Querschnitte werden, wenn die Biegung des Prismas nicht gross ist, beinahe vertical, und ihre horizontalen Componenten können daher vernachlässigt werden. Da diese Kräfte in der Ebene ma'na stattfinden, werden ihre Momente in Bezug auf die Axe aa' gleich Null. Die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts werden folglich:

$$\int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v dv = \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v dv,$$

$$\frac{E}{\varrho}\left(\int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v^2 dv + \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v^2 dv\right) = P(a - x).$$

Die dritte Bedingungsgleichung, welche ausdrücken sollte, dass die Summe der verticalen Widerstandskräfte gleich P wäre, hier darzustellen ist unnöthig.

Die erste der obigen Gleichungen dient dazu, die Lage der Linie aa' zu bestimmen, und zeigt, dass sie durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht. Diese Gleichung ist, wie eben bemerkt, auf die Voraussetzung gegründet, dass die Biegung des Körpers nicht gross ist. Wird diese Voraussetzung nicht erfüllt, so hört die Gleichung auf genau zu sein, und die Erfahrung zeigt auch, dass alsdann die Linie aa' tiefer als der Schwerpunkt und näher an der concaven Seite des Prismas gelegen ist.

§. 164.

In der zweiten der obigen Gleichungen ist:

$$E\left[\int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v^2 dv + \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v^2 dv\right]$$

von der Grösse der Biegung unabhängig, und hängt nur von dem Elasticitätscoefficienten der Materie und von der Form des Querschnittes des prismatischen Körpers ab. (Es wird hier fortwährend vorausgesetzt, dass die Biegung nicht so gross wird, dass die Linie aa' ihre Lage mit der Biegung merklich ändert.)

Jener Ausdruck wird das Biegungsmoment des prismatischen Körpers in Bezug auf die Linie aa' genannt. Wir werden es fortwährend durch ε bezeichnen, wo folglich:

$$\varepsilon = E\left[\int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v^2 dv + \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v^2 dv\right].$$

Kennt man das Biegungsmoment eines prismatischen Körpers in Bezug auf eine Linie ausserhalb des Schwerpunktes des Querschnittes, so lässt sich leicht das Moment in Bezug auf eine damit parallele durch den Schwerpunkt gehende Axe finden, und umgekehrt. Es sei (Fig. 61) S der Schwerpunkt des Querschnittes und Cd parallel mit ASB. Es sei der Abstand SG der beiden parallelen Axen gleich a; Sp = u, pm = v die Coordinaten irgend eines Punktes m in Bezug auf den Anfangspunkt S, Gn = u, nm = v + a die Coordinaten desselben Punktes in Bezug auf den Anfangspunkt G. Es ist alsdann, wenn man das Biegungsmoment in Bezug auf AB durch ε', in Bezug auf CD wie früher durch ε bezeichnet:

$$\varepsilon' = E\int du \int (v + a)^2\, dv = E\int du \int v^2 dv + 2Ea\int du \int v dv$$
$$+ Ea^2 \int du \int dv.$$

Es ist aber

$$\int du \int v dv = 0,$$

weil S der Schwerpunkt ist, und

$$\int du \int dv = F$$

gleich dem Flächeninhalte des Querschnittes. Es ist endlich

$$E\int du\int v^2 dv = \varepsilon$$

gleich dem Biegungsmoment des Körpers in Bezug auf CD. Es ist folglich

$$\varepsilon' = \varepsilon + Ea^2F,$$

und

$$\varepsilon = \varepsilon' - Ea^2F.$$

§. 165.

Beispiele der Berechnung des Biegungsmomentes.

1) Es sei der Querschnitt des prismatischen Körpers ein Rechteck (Fig. 62), dessen eine Seite gleich b, die andere gleich h, und es bilde die letztere mit der durch den Schwerpunkt gehenden Linie der neutralen Axenschicht FI den Winkel φ. Um den Werth des Integrals

$$\int du\int v^2 dv$$

in Bezug auf die Fläche ABIG zu erhalten, suche man erst den Werth in Bezug auf BHI. Wenn I als Anfangspunkt angesehen wird, so wird dieses Integral:

$$\int_0^{HI} du\int_0^{u\,\mathrm{tang}\,\varphi} v^2 dv = \tfrac{1}{3}\int_0^{HI} u^3\,\mathrm{tang}^3\,\varphi\,du = \tfrac{1}{12}HI^4\,\mathrm{tang}^3\,\varphi = \tfrac{1}{12}HI\,.\,BH^3.$$

Ebenso findet man dasselbe Integral in Bezug auf FBH gleich $\frac{1}{12}FH\,.\,BH^3$, und folglich in Bezug auf das ganze Dreieck FAG gleich $\frac{1}{12}FG\,.\,AL^3$. Das Integral

$$\int du\int v^2 dv$$

in Bezug auf ABIG wird folglich:

$$\tfrac{1}{12}FI\,.\,BH^3 - \tfrac{1}{12}FG\,.\,AL^3.$$

Es ist nun:

$$FI = \frac{\frac{1}{2}h}{\cos\varphi} + \frac{\frac{1}{2}b}{\sin\varphi},\ BH = \tfrac{1}{2}h\sin\varphi + \tfrac{1}{2}b\cos\varphi,$$

$$FG = \frac{\frac{1}{2}h}{\cos\varphi} - \frac{\frac{1}{2}b}{\sin\varphi},\ AL = \tfrac{1}{2}h \sin\varphi - \tfrac{1}{2}b \cos\varphi.$$

Diese Werthe substituirt und gehörig reducirt, findet man das gesuchte Integral in Bezug auf die Fläche ABIG gleich:

$$\tfrac{1}{24}bh\,(h^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi).$$

Der Werth desselben Integrals in Bezug auf IDCG muss ein gleicher sein wegen der Congruenz dieser Flächen. Es wird folglich das *Biegungsmoment*:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{12}Ebh\,(h^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi).$$

Wenn $h > b$ angenommen wird, so wird ε am grössten, wenn $\varphi = 90^0$ (Fig. 63) und das Biegungsmoment wird folglich:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{12}Ebh^3.$$

Wenn $h = b$, d. h. wenn der Querschnitt ein Quadrat ist, dessen Seite gleich b, so wird bei jeder Stellung des Querschnittes:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{12}Eb^4.$$

2) Es sei der Querschnitt ein Dreieck (Fig. 64), dessen Grundlinie $BC = b$ der Linie der neutralen Axenschicht parallel ist. Es sei die Höhe AE gleich h und folglich der Abstand des Schwerpunktes von der Grundlinie gleich $\frac{1}{3}h$. Das Biegungsmoment in Bezug auf BC wird alsdann nach dem im vorigen Beispiele Entwickelten gleich $\frac{1}{12}Ebh^3$. Das Biegungsmoment in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Linie der neutralen Axenschicht wird folglich nach dem vorigen Paragraphen gleich:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{12}Ebh^3 - E\,.\,(\tfrac{1}{3}h)^2\,.\,\tfrac{1}{2}bh = \tfrac{1}{36}Ebh^3,$$

folglich gleich einem Drittel des Biegungsmomentes eines rechtwinkligen parallelepipedischen Balkens derselben Breite und Höhe.

3) Es sei der Querschnitt des Körpers ein rechtwinkliger Ring oder ein auf beiden Seiten verstärktes Rechteck (Fig. 65 und 66). Bezeichnen wir durch h die auswendige Höhe, durch h′ die inwendige; durch b die auswendige Breite, durch b′ die inwendige, oder diejenige der beiden Rippen. Es sei ferner die durch den Schwerpunkt gehende Linie der neutralen Axenschicht parallel mit der Breite des Querschnittes. Es ist alsdann das Bie-

gungsmoment des auswendigen Parallelepipeds gleich $\frac{1}{12}Ebh^3$ und dasjenige des ausgeschnittenen Theils gleich $\frac{1}{12}Eb'h'^3$; folglich wird dasjenige des prismatischen Körpers:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{12}E\,(bh^3 - b'h'^3).$$

4) Es sei der Querschnitt nur die Hälfte der im vorigen Beispiel angeführten Figur (Fig. 67 und 68). Man bezeichne durch b und h die auswendige Breite und Höhe, durch b' und h' die Höhe und gesammte Breite der am Rechteck bh fehlenden kleineren Rechtecke. Das Biegungsmoment in Bezug auf AB wird alsdann gleich:

$$\tfrac{1}{3}E\,(bh^3 - b'h'^3).$$

Den Abstand des Schwerpunktes C von AB findet man, indem man den Flächeninhalt und den Schwerpunkt jedes Theiles der Figur sucht, gleich:

$$\frac{1}{2}\,\frac{bh^2 - b'h'^2}{bh - b'h'}.$$

Es wird folglich nach dem vorigen Paragraphen das Biegungsmoment in Bezug auf die mit AB parallele Linie der neutralen Axenschicht:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{3}E\,(bh^3 - b'h'^3) - E\,(bh - b'h')\,.\,\tfrac{1}{4}\left(\frac{bh^2 - b'h'^2}{bh - b'h'}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{12}E\left[4\,(bh^3 - b'h'^3) - \frac{3\,(bh^2 - b'h'^2)^2}{bh - b'h'}\right].$$

5) Es sei der Querschnitt ein Kreis, dessen Halbmesser gleich r. Es ist alsdann:

$$v = \sqrt{r^2 - u^2},$$

und

$$\int_{-r}^{+r} du \int_{0}^{\sqrt{r^2-u^2}} v^2 dv = \tfrac{1}{3}\int_{-r}^{+r} (r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}\,du = \tfrac{2}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^4 \sin^4 x dx = \frac{\pi r^4}{8},$$

wo: $u = r\,.\cos x$, $r^2 - u^2 = r^2 \sin^2 x$. Das Biegungsmoment eines kreisförmigen Cylinders wird folglich:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}E\pi r^4.$$

6) Das Biegungsmoment eines concentrisch kreisförmigen cylindrischen Rohres, dessen äusserer Halbmesser r, der innere r' ist, wird:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}E\pi\,(r^4 - r'^4).$$

7) Es sei der Körper ein Cylinder mit elliptischem Querschnitte, dessen Halbaxen a und b sind; es sei ferner a parallel mit der Linie der neutralen Axenschicht und b senkrecht auf derselben. Es wird alsdann:

$$\int_{-a}^{+a} du \int_{0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-u^2}} v^2 dv = \frac{1}{3}\,\frac{b^3}{a^3}\int_{-a}^{+a}(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}\,du = \frac{b^3}{a^3}\cdot\frac{\pi a^4}{8} = \frac{1}{8}\,\pi ab^3$$

und folglich das Biegungsmoment:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{8}Eab^3.$$

§. 166.

Die Biegung, welche ein prismatischer Körper vertragen kann, ohne dass die Verlängerung oder Verkürzung irgend einer Faser die Elasticitätsgrenze überschreitet, wird auf folgende Weise gefunden. Bezeichnen wir durch c den Abstand der von der neutralen Axenschicht am meisten entfernten Faser der concaven oder convexen Seite des gebogenen Körpers und durch ϱ den Krümmungshalbmesser der neutralen Axenschicht, so ist $\frac{c}{\varrho}$ die Ausdehnung oder Verkürzung einer Längeneinheit dieser Faser. Bezeichnet man ferner wie vorher durch T den Tragfähigkeitscoefficienten und durch $\frac{\Delta l}{l}$ das der Elasticitätsgrenze entsprechende Verhältniss der Längenausdehnung, wo folglich:

$$T = E\,.\,\frac{\Delta l}{l},$$

so ist alsdann an der Elasticitätsgrenze:

$$\frac{c}{\varrho} = \frac{\Delta l}{l},$$

und folglich:

$$T = \frac{c}{\varrho} . E,$$

oder:

$$\varrho = \frac{E}{T} c.$$

Dieser Werth ist alsdann der kleinste, welchen der Krümmungshalbmesser haben kann, ohne dass die Elasticitätsgrenze bei der Biegung überschritten wird. Da der Tragfähigkeitscoefficient verschieden ist für die Ausdehnung oder Zusammendrückung, so folgt hieraus, dass man den Werth von $\frac{E}{T} . c$ sowohl für die concave als für die convexe Seite berechnen muss, indem man für diese den absoluten, für jene den rückwirkenden Tragfähigkeitscoefficienten anwendet. Der Krümmungshalbmesser darf alsdann nicht kleiner als der grösste dieser Werthe sein.

Setzt man statt des Tragfähigkeitscoefficienten T den Festigkeitscoefficienten F, so wird:

$$\varrho = \frac{E}{F} . c$$

die Grenze der Biegung angeben, wo der Körper gleich brechen wird.

§. 167.

Wir werden jetzt mehrere Fälle der Biegung besonders untersuchen. Wir werden erst den Körper fortwährend an einem Ende horizontal befestigt annehmen und durch eine am anderen Ende vertical wirkende Kraft gebogen, und dann die Grösse der Biegung und die Form des gebogenen prismatischen Körpers suchen. Bezeichnen wir (Fig. 69) durch x die horizontale Abscisse AP, durch y die verticale Ordinate PM eines Punktes M der neutralen Axenschicht, durch ϱ den Krümmungshalbmesser der krummen Linie im Punkte M, durch a und f die Abscisse und Ordinate des Endpunktes C, durch s die Länge AMC des Körpers, durch φ den Winkel, welchen die Tangente im Endpunkte C mit dem Horizonte bildet, durch P die im Endpunkte C vertical wirkende

Kraft, und endlich durch ε das Biegungsmoment des Körpers. Es ist alsdann nach §. 163:

$$\frac{\varepsilon}{\varrho} = P(a - x),$$

oder, wenn man den Werth von ϱ:

$$\varrho = \frac{\left(1 + (d_x y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{d_x^2 y}$$

substituirt:

$$\frac{\varepsilon d_x^2 y}{\left(1 + (d_x y)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = P(a - x).$$

Wenn die Biegung sehr klein ist, was hier immer angenommen ist, so wird auch das Differentialverhältniss $d_x y$ sehr klein, und das Quadrat $(d_x y)^2$ kann dann vernachlässigt werden. Man erhält dann:

$$\varepsilon d_x^2 y = P(a - x),$$

und durch Integration, indem man berücksichtigt, dass, wenn $x = o$, auch $y = o$ und $d_x y = o$ wird:

$$d_x y = \frac{P}{\varepsilon} (ax - \tfrac{1}{2}x^2,$$

$$y = \frac{P}{\varepsilon} \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Die letzte Gleichung ist dann diejenige der neutralen Axenschicht. Setzt man in den Gleichungen $x = a$, so wird $y = f$ und $d_x y = \tan \varphi$, und man erhält folglich:

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3},$$

$$\tan \varphi = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^2}{2} = \tfrac{3}{2} \cdot \frac{f}{a}.$$

Die Länge s wird gefunden durch das Integral:

$$s = \int_o^a \sqrt{(1 + d_x y)^2)}\, dx = \int_o^a \left(1 + \tfrac{1}{2}(d_x y)^2\right) dx$$

$$= a + \frac{P^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{a^5}{15} = a + \tfrac{3}{5} \cdot \frac{f^2}{a},$$

und hieraus annäherungsweise, indem man die höheren Potenzen der kleinen Grösse $\frac{f}{s}$ vernachlässigt:

$$a = s - \frac{P^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{s^5}{15} = s - \tfrac{3}{5} \cdot \frac{f^2}{s}.$$

Den Krümmungshalbmesser findet man aus der ersten Gleichung dieses Paragraphen:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{P(a - x)}.$$

Dieser Werth wird ein Minimum, wenn $x = o$. Die Biegung ist folglich am stärksten am eingemauerten Ende, und der Körper wird hier zuerst brechen. Der Krümmungshalbmesser wird hier:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{Pa}.$$

Damit die Elasticitätsgrenze nicht überschritten werde, darf aber nach dem vorigen Paragraphen der Krümmungshalbmesser nicht kleiner sein, als:

$$\varrho = \frac{E}{T} \cdot c,$$

und es wird folglich an dieser Grenze:

$$\frac{E}{T} \cdot c = \frac{\varepsilon}{Pa}$$

und hieraus:

$$P = \frac{T\varepsilon}{Eac}.$$

Dieser Werth von P darf nicht überschritten werden, wenn der eingemauerte prismatische Körper die Last mit Sicherheit tragen soll. Wenn

$$P = \frac{F\varepsilon}{Eac},$$

so wird der Körper gleich am eingemauerten Ende abgebrochen werden.

Es sei der Körper ein rechteckiges Parallelepiped, die eine Seite des Rechtecks horizontal und gleich b, die andere vertical und gleich h. Es ist alsdann:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{12}Ebh^3,\ c = \tfrac{1}{2}h,$$

und folglich die grösste Belastung, wenn die Elasticitätsgrenze nicht überschritten werden soll:

$$P = \tfrac{1}{6}T \cdot \frac{bh^2}{a},$$

wo der kleinste Werth von T angewendet werden muss.

Die Belastung, welche die unmittelbare Brechung hervorbringen wird, ist:

$$P = \tfrac{1}{6}F \cdot \frac{bh^2}{a}.$$

Werden die im §. 162 angegebenen Werthe von T angewendet, so muss man b, h und a in Zollen, P in Pfunden angeben.

Es sei der Querschnitt ein Dreieck, dessen Grundlinie horizontal und gleich b, die Höhe gleich h. Es ist alsdann nach §. 165 No. 2:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{36}Ebh^3.$$

Der Abstand der horizontalen Grundlinie von der neutralen Axenschicht ist $\frac{1}{3}$h, derjenige der entgegengesetzten Kante $\frac{2}{3}$h. Um jetzt die grösste Belastung innerhalb der Elasticitätsgrenze zu finden, muss man besonders die zwei Fälle betrachten, wenn die horizontale Grundlinie sich oben oder unten gekehrt befindet.

Im ersten Fall wird die grösste Belastung durch den kleinsten der folgenden Werthe ausgedrückt sein:

$$P = \tfrac{1}{36}bh^3 \cdot \frac{T_r}{\frac{1}{3}ha} = \tfrac{1}{12}T_r \cdot \frac{bh^2}{a},$$

$$P = \tfrac{1}{36}bh^3 \cdot \frac{T_a}{\frac{2}{3}ha} = \tfrac{1}{24}T_a \cdot \frac{bh^2}{a}.$$

Der erste Werth muss folglich angewendet werden, wenn der absolute Tragfähigkeitscoefficient mehr als das doppelte des rückwirkenden ist, der letzte, wenn er kleiner als das doppelte desselben ist.

Wenn der Körper z. B. von Holz ist, wird folglich:

$$P = \tfrac{1}{12} T_r \frac{bh^2}{a}$$

und die grösste Belastung folglich die Hälfte derjenigen eines rechtwinkligen prismatischen Balkens von derselben Breite und Höhe. Wenn der Körper dagegen von gegossenem Eisen ist, so wird:

$$P = \tfrac{1}{24} T_a \,.\, \frac{bh^2}{a},$$

und die Belastung folglich nur das Viertel derjenigen eines rechtwinkligen prismatischen Balkens von derselben Breite und Höhe.

Liegt dagegen die horizontale Grundlinie des dreieckigen Querschnittes unten und die Kante oben, so wird die grösste Belastung innerhalb der Elasticitätsgrenze der kleinste der beiden folgenden Werthe von P sein:

$$P = \tfrac{1}{36} bh^3 \,.\, \frac{T_r}{\tfrac{2}{3}h} = \tfrac{1}{24} T_r \,.\, \frac{bh^2}{a},$$

$$P = \tfrac{1}{36} bh^3 \,.\, \frac{T_a}{\tfrac{1}{3}h} = \tfrac{1}{12} T_a \,.\, \frac{bh^2}{a}.$$

Hier wird folglich der erste Werth anzuwenden sein, wenn der rückwirkende Tragfähigkeitscoefficient nicht grösser als das doppelte des absoluten ist, der letzte, wenn er dieses überschreitet. Es wird folglich in dieser Stellung für Holz:

$$P = \tfrac{1}{24} T_r \,.\, \frac{bh^2}{a},$$

für gegossenes Eisen:

$$P = \tfrac{1}{12} T_a \,.\, \frac{bh^2}{a}.$$

Ein dreieckiger horizontal eingemauerter Holzbalken trägt folglich am freien Ende, ohne die Elasticitätsgrenze zu überschreiten, das doppelte, wenn die horizontale Grundfläche oben liegt, gegen das, was er in der umgekehrten Stellung trägt. Dagegen trägt eine gegossene Eisenstange von derselben Form in der ersten Stellung nur die Hälfte von dem, was sie in der letzten Stellung tragen kann.

§. 168.

Es sei jetzt der prismatische Körper nicht nur am freien Ende von einer vertical wirkenden Kraft gebogen, sondern in jedem Punkte seiner ganzen Länge nach mit auf irgend eine Weise vertheilten Gewichten belastet. Wir werden (Fig. 70) dieselben Bezeichnungen wie im vorigen Paragraphen benutzen, und ausserdem durch x′ die Abscisse AP′ und durch P′M′ die Ordinate irgend eines zwischen M und E gelegenen Punktes der neutralen Axenschicht bezeichnen, und endlich durch p die im Punkte M′ vertical wirkende Belastung, auf die Längeneinheit der Abscisse zurückgeführt, so dass folglich pdx′ das von dem Elemente der Axenschicht, dessen horizontale Projection dx′ ist, getragene Gewicht wird, und p eine Function von x′. Die Summe der Momente des auf das Stück MC vertheilten Gewichtes wird dann:

$$\int_x^a (x' - x)\, p dx',$$

und die Gleichung des Gleichgewichts wird folglich:

$$\frac{\varepsilon}{\varrho} = \int_x^a (x' - x)\, p dx',$$

oder, wenn die Biegung so klein ist, dass man die höheren Potenzen von $d_x y$ vernachlässigen kann:

$$\varepsilon d_x{}^2 y = \int_x^a (x' - x)\, p dx',$$

und hieraus durch Integration:

$$\varepsilon d_x y = \int_0^x dx \int_x^a (x' - x)\, p dx',$$

$$\varepsilon y = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_x^a (x' - x)\, p dx'.$$

Sind die Gewichte über die ganze Länge des prismatischen Körpers gleich vertheilt, so ist $pdx' = ads$, wo a eine constante Grösse ist; es wird folglich

$$p = a\sqrt{1 + (d_x y)^2},$$

und weil das Quadrat von $d_x y$ vernachlässigt werden kann, wird man auch p als eine constante Grösse ansehen können. Man erhält dann:

$$\varepsilon d_x^2 y = p\,\frac{(a-x)^2}{2} = p\left(\frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon d_x y = p\left(\frac{a^2 x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right),$$

$$\varepsilon y = p\left(\frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right).$$

Setzt man hier $x = a$, so erhält man:

$$f = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a^4}{8} = \frac{pa}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{8},$$

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{pa}{\varepsilon} \cdot \frac{a^2}{6} = \frac{4f}{3a}.$$

Der prismatische Körper wird also in diesem Falle weniger gebogen, als wenn die ganze Belastung pa am Endpunkte angebracht wäre, und zwar im Verhältniss von 3 zu 8.

Wäre der Körper sowohl seiner ganzen Länge nach gleichförmig, auf jeder Längeneinheit durch p, belastet, sowie auch am freien Endpunkte durch ein Gewicht P heruntergebogen, so würde:

$$\varepsilon d_x^2 y = p\int_x^a (x' - x)\,dx + P(a - x)$$

$$= p\left(\frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}\right) + P(a - x),$$

$$\varepsilon d_x y = p\left(\frac{a^2 x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{2}\right) + P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon y = p\left(\frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Setzt man hier $x = a$, so erhält man:

$$f = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a^4}{8} + \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{(P + \frac{3}{8}pa)}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3}$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{6} + \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{(P + \frac{1}{3}pa)}{\varepsilon} \cdot \frac{a^2}{2}.$$

Der Pfeil des Herunterbiegens wird folglich derselbe, als wäre der Körper am freien Ende ausser durch das Gewicht P noch durch ein Gewicht gleich $\frac{3}{8}$ der gleichmässigen Belastung ap heruntergebogen. Der Winkel, welchen das freie Ende des Körpers mit dem Horizonte bildet, wird dagegen derselbe, als wäre der Körper an diesem freien Ende ausser durch das Gewicht P noch durch ein Gewicht gleich $\frac{1}{3}$ der gleichmässigen Belastung ap heruntergebogen.

In diesem letzten Falle, welcher den vorigen einschliesst, findet man:

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + (d_x y)^2}\, dx = \int_0^a \left(1 + \tfrac{1}{2}(d_x y)^2\right) dx$$

$$= a + \frac{a^5}{\varepsilon^2}\left(\frac{p^2 a^2}{112} + \frac{7Ppa}{144} + \frac{P^2}{15}\right),$$

und hieraus wieder annäherungsweise:

$$a = s - \frac{s^5}{\varepsilon^2}\left(\frac{p^2 s^2}{112} + \frac{7Pps}{144} + \frac{P^2}{15}\right).$$

Den Krümmungshalbmesser findet man:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{p\left(\frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}\right) + P(a - x)}$$

$$= \frac{\varepsilon}{(a - x)\left(P + \frac{1}{2}p(a - x)\right)}.$$

Dieser Werth wird am kleinsten, wenn $x = 0$, und es wird folglich der Körper zuerst am eingemauerten Ende brechen. Es wird hier:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{(P + \frac{1}{2}pa)\, a}.$$

An der Elasticitätsgrenze ist:

$$\varrho = \frac{E}{T} \cdot c,$$

und es wird folglich:

$$\frac{E}{T} \cdot c = \frac{\varepsilon}{(P + \frac{1}{2}pa)\, a},$$

und hieraus:

$$P + \tfrac{1}{2}pa = \frac{T\varepsilon}{Eac}.$$

Um die grösste Belastung innerhalb der Elasticitätsgrenze zu finden, kann man folglich die Hälfte der gleichförmigen Belastung als am Ende wirkend annehmen.

Diese Formeln werden angewendet, wenn man die Schwere des eingemauerten prismatischen Körpers berücksichtigen will.

§. 169.

Wenn die Belastung p discontinuirlich ist, so muss man besonders die Form jedes Theils des gebogenen Körpers suchen. Es sei z. B. (Fig. 71) der Körper gleichmässig auf jeder Längeneinheit durch p belastet, von F bis G ausserdem auf jeder Längeneinheit durch p′ und am Endpunkte noch durch das Gewicht P. Es seien a′ und f′ die Abscisse und Ordinate des Punktes F, a″ und f″ diejenigen des Punktes G, a und f die des Endpunktes C. Die Tangente in F bilde mit der horizontalen Abscissenaxe den Winkel φ', in G den Winkel φ'' und in C den Winkel φ. Man muss jetzt besonders die krummen Linien AF, FG und GC untersuchen; man hat dann erstens für die Linie AF, d. h. wenn $x < a'$:

$$\varepsilon d_x{}^2 y = p \int_x^a (x' - x)\, dx' + p' \int_{a'}^{a''} (x' - x)\, dx' + P\,(a - x)$$

$$= p \left(\frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}\right) + p'\,(a'' - a')\left(\tfrac{1}{2}\,(a'' + a') - x\right) + P(a - x).$$

Integrirt man hier, so dass, wenn $x = o$, auch $d_x y = o$ und $y = o$,

so erhält man:

$$\varepsilon d_x y = p\left(\frac{a^2x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + p'(a'' - a')\left((a'' + a')\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\right)$$
$$+ P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right).$$

$$\varepsilon y = p\left(\frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + p'(a'' - a')\left((a'' + a')\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6}\right)$$
$$+ P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Setzt man hier $x = a'$, so wird $d_x y = \tang \varphi'$ und $y = f'$, und man findet:

$$\varepsilon \tang \varphi' = p\left(\frac{a^2a'}{2} - \frac{aa'^2}{2} + \frac{a'^3}{6}\right) + p'\frac{a''a'(a'' - a')}{2}$$
$$+ P\left(aa' - \frac{a'^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon f' = p\left(\frac{a^2a'^2}{4} - \frac{aa'^3}{6} + \frac{a'^4}{24}\right) + p'(a'' - a')\left(\frac{a''a'^2}{4} + \frac{a'^3}{12}\right)$$
$$+ P\left(\frac{aa'^2}{2} - \frac{a'^3}{6}\right).$$

Betrachten wir jetzt FG. Es ist hier $x > a'$ und $x < a''$; man hat hier die Differentialgleichung:

$$\varepsilon d_x^2 y = p\int_x^a (x' - x)\,dx' + p'\int_x^{a''} (x' - x)\,dx' + P(a - x)$$
$$= p\left(\frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}\right) + p'\left(\frac{a''^2}{2} - a''x + \frac{x^2}{2}\right) + P(a - x).$$

Integrirt man hier zweimal und bemerkt, dass, wenn $x = a'$, auch $d_x y = \tang \varphi'$ und $y = f'$ sein soll, so erhält man:

$$\varepsilon d_x y = p\left(\frac{a^2x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + p'\left(\frac{a''^2x}{2} - \frac{a''x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{a'^3}{6}\right)$$
$$+ P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon y = p\left(\frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + p'\left(\frac{a''^2x^2}{4} - \frac{a''x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{a'^3x}{6} + \frac{a'^4}{24}\right)$$
$$+ P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Setzt man nun hier $x = a''$, so wird $d_x y = \tang \varphi''$ und $y = f''$, und man findet:

$$\varepsilon \tang \varphi'' = \left(\frac{a^2 a''}{2} - \frac{aa''^2}{2} + \frac{a''^3}{6}\right) + p' \frac{(a''^3 - a'^3)}{6}$$
$$+ P\left(aa'' - \frac{a''^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon f'' = p\left(\frac{a^2 a''^2}{4} - \frac{aa''^3}{6} + \frac{a''^4}{24}\right) + p'\left(\frac{a''^4}{8} - \frac{a'^3 a''}{6} + \frac{a'^4}{24}\right)$$
$$+ P\left(\frac{aa''^2}{2} - \frac{a''^3}{6}\right).$$

Betrachten wir jetzt das Stück GC. Man hat hier:

$$\varepsilon d_x{}^2 y = p\int_x^a (x' - x)\,dx + P(a - x)$$

$$= p\left(\frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}\right) + P(a - x).$$

Integrirt man hier zweimal und bemerkt, dass, wenn $x = a''$, auch $d_x y = \tang \varphi''$ und $y = f''$, so erhält man:

$$\varepsilon d_x y = p\left(\frac{a^2 x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + p' \frac{(a''^3 - a'^3)}{6}$$
$$+ P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon y = p\left(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + p'\left(\frac{(a''^3 - a'^3)x}{6} - \frac{(a''^4 - a'^4)}{24}\right)$$
$$+ P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Setzt man hier $x = a$, so wird $d_x y = \tang \varphi$ und $y = f$, und man erhält:

$$\varepsilon \tang \varphi = \frac{pa^3}{6} + \frac{p'(a''^3 - a'^3)}{6} + \frac{Pa^2}{2},$$

$$\varepsilon f = \frac{pa^4}{8} + p'\left(\frac{(a''^3 - a'^3)\,a}{6} - \frac{(a''^4 - a'^4)}{24}\right) + \frac{Pa^3}{3}.$$

Um die grösstmögliche Belastung zu finden, muss man den Krümmungshalbmesser jedes der Stücke AF, FG und GC besonders suchen. Es ist alsdann in AF oder wenn $x < a'$:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}p(a-x)^2 + p'(a''-a')\left(\frac{1}{2}(a''+a')-x\right) + P(a-x)}.$$

Dieser Werth wird am kleinsten, wenn $x = o$, folglich im Punkte A, und es ist hier:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}pa^2 + \frac{1}{2}p'(a''^2 - a'^2) + Pa}.$$

In Bezug auf das Stück FG, oder wenn $x =$ oder $> a'$, aber $< a''$, hat man:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}p(a-x)^2 + \frac{1}{2}p'(a''-x)^2 + P(a-x)}.$$

Dieser Werth wird desto kleiner, je kleiner x ist, folglich zwischen den obigen Grenzen von x am kleinsten, wenn $x = a'$, oder im Punkte F, und es ist hier:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}p(a-a')^2 + \frac{1}{2}p'(a''-a')^2 + P(a-a')}.$$

Endlich ist in Bezug auf das Stück GC, wo folglich $x =$ oder $> a''$ und $x < a$:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}p(a-x)^2 + P(a-x)}.$$

Dieser Ausdruck wird am kleinsten, wenn x zwischen den obigen Grenzen den kleinsten Werth hat, folglich wenn $x = a''$, oder in G, und man hat hier:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}p(a-a'')^2 + P(a-a'')}.$$

Unter diesen drei Minima ist das erste das kleinste. Der Körper wird folglich fortwährend am eingemauerten Ende A am stärksten gebogen und wird hier zuerst brechen.

An der Elasticitätsgrenze ist:

$$\varrho = \frac{E}{T}c,$$

und es ist folglich an dieser Grenze:

$$\frac{E}{T}\,c = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}pa^2 + \frac{1}{2}p'(a''^2 - a'^2) + Pa},$$

und folglich:

$$P + \tfrac{1}{2}pa + \tfrac{1}{2}p'\,\frac{(a''^2 - a'^2)}{a} = \frac{T\varepsilon}{Eac}.$$

§. 170.

Die Differentialgleichungen der vorigen Paragraphen finden fortwährend statt, wenn auch der prismatische Körper nicht genau horizontal eingemauert ist; nur dass er so wenig davon abweicht, dass die Querschnitte fortwährend als vertical angesehen werden können. Bezeichnet man den kleinen Winkel, welchen die Tangente am Endpunkte mit dem Horizonte bildet, durch ω, so muss die Integration so ausgeführt werden, dass, wenn $x = o$, auch $y = o$, aber $d_x y = \pm \operatorname{tang}\omega$ wird, wo das obere Zeichen anzuwenden ist, wenn der Körper ein wenig schräg nach unten (Fig. 72), das obere, wenn er ein wenig schräg nach oben (Fig. 73) eingemauert ist. Nehmen wir z. B. die Belastung so an, dass der Körper sowohl durch eine gleichmässige Belastung auf jeder Längeneinheit p, wie auch am freien Ende durch eine Last P gebogen ist, so wird:

$$\varepsilon d_x{}^2 y = p\left(\frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}\right) + P(a - x),$$

$$\varepsilon d_x y = p\left(\frac{a^2x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) \pm \varepsilon \operatorname{tang}\omega,$$

$$\varepsilon y = p\left(\frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \pm \varepsilon x \operatorname{tang}\omega,$$

$$f = \frac{(P + \frac{3}{8}pa)}{\varepsilon}\cdot\frac{a^3}{3} \pm a \operatorname{tang}\omega.$$

§. 171.

Betrachten wir jetzt die Biegung eines horizontalen und an beiden Enden unterstützten prismatischen Körpers (Fig. 74). Es sei der Balken durch ein irgendwo in D angebrachtes Gewicht Q gebogen. Nehmen wir diesen Punkt als Anfangspunkt der Coordinaten

an, die Abscissenaxe horizontal, die Ordinatenaxe vertical. Die unterstützten Punkte A und B sind in einer horizontalen Linie AB angenommen, deren Länge wir durch l bezeichnen werden. Es sei E der Mittelpunkt dieser Linie und EGC vertical durch diesen Mittelpunkt gezogen. Der Punkt C wird dann annäherungsweise in der Mitte des Balkens liegen. Bezeichnen wir durch z die Abscisse GD dieses Mittelpunktes, und durch ω den Winkel, welchen die Tangente der neutralen Axenschicht im Anfangspunkte D mit der horizontalen Abscissenaxe bildet. Decomponirt man die Kraft Q in zwei andere parallele in A und B wirkende Kräfte, so findet man den Druck des Körpers auf jeden dieser Unterstützungspunkte respective gleich:

$$Q \frac{(\frac{1}{2}l - z)}{l}$$

und

$$Q \frac{(\frac{1}{2}l + z)}{l}.$$

Statt der festen Unterstützungspunkte können wir jetzt jenem Drücken gleiche aber entgegengesetzte Kräfte annehmen, wodurch nichts im Gleichgewichtszustande verändert wird. Denken wir uns jetzt den Balken in D festgeklemmt, so wird die Biegung jedes Theiles DA und DB die eines in einem Endpunkte schräg eingemauerten Körpers sein, dessen freier Endpunkt von der Kraft

$$Q \frac{(\frac{1}{2}l - z)}{l}$$

oder

$$Q \frac{(\frac{1}{2}l + z)}{l}$$

gebogen wird. Nach dem vorigen Paragraphen findet man dann die Gleichungen jedes dieser Theile der neutralen Axenschicht, wenn man p = o setzt und für DB:

$$P = Q \frac{(\frac{1}{2}l + z)}{l},\ a = \tfrac{1}{2}l - z,$$

für DA:

$$P = Q\,\frac{(\frac{1}{2}l - z)}{l},\quad a = \tfrac{1}{2}l + z$$

setzt. Für DB ist ferner das obere, für DA das untere Zeichen anzuwenden. Man hat alsdann für DB:

$$y = \frac{Q}{\varepsilon}\cdot\frac{(\frac{1}{2}l + z)}{l}\left((\tfrac{1}{2}l - z)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + x \operatorname{tang}\omega,$$

$$BH = \frac{Q}{\varepsilon}\cdot\frac{(\frac{1}{2}l + z)}{l}\,\frac{(\frac{1}{2}l - z)^3}{3} + (\tfrac{1}{2}l - z)\operatorname{tang}\omega.$$

Für den Bogen DA wird:

$$y = \frac{Q}{\varepsilon}\cdot\frac{(\frac{1}{2}l - z)}{l}\left((\tfrac{1}{2}l + z)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - x \operatorname{tang}\omega,$$

$$AI = \frac{Q}{\varepsilon}\cdot\frac{(\frac{1}{2}l - z)}{l}\cdot\frac{(\frac{1}{2}l + z)^3}{3} - (\tfrac{1}{2}l + z)\operatorname{tang}\omega.$$

Da die Unterstützungspunkte A und B in derselben horizontalen Linie liegen, so muss BH = AI sein. Man erhält hierdurch die Bedingungsgleichung:

$$\frac{Q}{\varepsilon}\cdot\frac{(\frac{1}{2}l + z)}{l}\cdot\frac{(\frac{1}{2}l - z)^3}{3} + (\tfrac{1}{2}l - z)\operatorname{tang}\omega$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon}\cdot\frac{(\frac{1}{2}l - z)}{l}\cdot\frac{(\frac{1}{2}l + z)^3}{3} - (\tfrac{1}{2}l + z)\operatorname{tang}\omega,$$

und hieraus:

$$l\,.\operatorname{tang}\omega = \frac{Q}{\varepsilon}\cdot\frac{(\frac{1}{2}l + z)\,.\,(\frac{1}{2}l - z)}{3l}\left[(\tfrac{1}{2}l + z)^2 - (\tfrac{1}{2}l - z)^2\right]$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon}\cdot\frac{(\frac{1}{4}l^2 - z^2)}{3l}\cdot 2lz,$$

oder:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{Q}{\varepsilon}\cdot\frac{2(\frac{1}{4}l^2 - z^2)z}{3l},$$

durch welche Gleichung die bisher unbekannte Grösse tang ω bestimmt wird. Substituirt man diesen Werth von tang ω, so erhält man die Gleichung der Linie DB:

$$y = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{(\frac{1}{2}l + z)}{l}\left[\tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}l - z)\, zx + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}l - z)\, x^2 - \tfrac{1}{6}x^3\right],$$

und diejenige der Linie DA:

$$y = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{(\frac{1}{2}l - z)}{l}\left[- \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}l + z)\, zx + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}l + z)x^2 - \tfrac{1}{6}x^3\right].$$

Ferner findet man:

$$BH = AI = KL = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{(\frac{1}{4}l^2 - z^2)^2}{3l}.$$

Der kleinste Werth von y, welcher dem tiefsten Punkte der krummen Linie entspricht, wird gefunden, wenn man die Gleichung von DA differentiirt und $d_x y = o$ setzt. Man erhält dann die Abscisse dieses Punktes:

$$x = \tfrac{1}{2}l + z - \sqrt{(\tfrac{1}{2}l + z)(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{3}z)}.$$

Substituirt man diesen Werth von x, so findet man:

$$y = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{(\frac{1}{2}l - z)}{3l}\left\{(\tfrac{1}{2}l + z)^2 (\tfrac{1}{2}l - z) - ((\tfrac{1}{2}l + z)(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{3}z))^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{(\frac{1}{2}l - z)}{3l} \cdot (\tfrac{1}{2}l + z)^{\frac{3}{2}} \left((\tfrac{1}{2}l + z)(\tfrac{1}{2}l - z)^2 - (\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{3}z)^3\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= - \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{(\frac{1}{2}l - z)}{3l} \cdot (\tfrac{1}{2}l + z)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{18l - 28z}{27}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot z,$$

welcher Ausdruck immer negativ ist, weil $z < \frac{1}{2}l$, ausgenommen wenn $z = o$, da auch x und y gleich Null werden. Dies folgt auch unmittelbar daraus, dass M der tiefste Punkt der neutralen Axenschicht ist und folglich immer tiefer als der Wirkungspunkt der Last liegt, ausgenommen wenn dieser in der Mitte des Balkens angebracht ist, da er selbst der tiefste Punkt ist. Man hat folglich:

$$LM = - y = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{(\frac{1}{2}l - z)}{3l} \cdot ((\tfrac{1}{2}l + z)(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{3}z))^{\frac{3}{2}} - \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{(\frac{1}{4}l^2 - z\)^2}{3l}.$$

Addirt man diesen Werth zu dem vorher gefundenen von KL, so findet man den Pfeil des Bogens:

$$f = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{(\frac{1}{2}l - z)}{3l} \cdot ((\tfrac{1}{2}l + z)(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{3}z))^{\frac{3}{2}}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird

$$\varrho = \frac{1 + (d_x y)^2}{d_x^2 y} \text{ oder } = \frac{1}{d_x^2 y},$$

weil das Quadrat von $d_x y$ vernachlässigt wird. Es wird folglich für DB:

$$\varrho = \frac{l\varepsilon}{Q(\frac{1}{2}l + z)(\frac{1}{2}l - z - x)},$$

und für DA:

$$\varrho = \frac{l\varepsilon}{Q(\frac{1}{2}l - z)(\frac{1}{2}l + z - x)}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird folglich am kleinsten, wenn $x = o$, d. h. der Balken ist am stärksten gebogen im Belastungspunkte D, und es ist hier:

$$\varrho = \frac{l\varepsilon}{Q(\frac{1}{4}l^2 - z^2)}.$$

Damit die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, muss am wenigsten

$$\varrho = \frac{E}{T}\, c;$$

es wird folglich an der Elasticitätsgrenze:

$$\frac{E}{T} \cdot c = \frac{l\varepsilon}{Q(\frac{1}{4}l^2 - z^2)},$$

und hieraus:

$$Q = \frac{Tl\varepsilon}{E(\frac{1}{4}l^2 - z^2)c}.$$

§. 172.

Wenn $z = o$, d. h. wenn die Last Q in der Mitte zwischen den beiden Unterstützungspunkten wirkt (Fig. 75), so wird:

$$y = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{x^2}{4} \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{x}{3}\right),$$

$$f = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{l}{48}.$$

Die Länge ACB der neutralen Axenschicht zwischen den beiden Unterstützungspunkten, welche wir mit s bezeichnen werden, wird gefunden, wenn man aus dem §. 167 die Länge von CB berechnet und diese verdoppelt. Man findet dann, weil hier $P = \frac{1}{2}Q$ und $a = \frac{1}{2}l$ ist:

$$s = l + \frac{Q^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{l^5}{960},$$

und hieraus wieder

$$l = s - \frac{Q^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{s^5}{960}.$$

Die grösste Belastung an der Elasticitätsgrenze findet man aus dem vorigen Paragraphen, indem man $z = o$ setzt:

$$Q = \frac{4T\varepsilon}{Elc}.$$

Wenn der Querschnitt ein Rechteck ist, dessen eine Seite horizontal und gleich b, die andere vertical und gleich h ist, so wird:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{12}Ebh^3,\ e = \tfrac{1}{2}h,$$

und folglich die grösste Belastung innerhalb der Elasticitätsgrenze:

$$Q = \tfrac{2}{3}\,\frac{bh^2}{l} \cdot T,$$

wo der kleinste Werth von T anzunehmen ist.

§. 173.

Es sei der prismatische Balken ausser durch das Gewicht Q noch durch eine gleichförmige Belastung, auf jeder Längeneinheit p, gebogen. Die ganze gleichförmige Belastung wird dann pl, welche, mit der Kraft Q vereinigt, wenn wir fortwährend von den Bezeichnungen des §. 171 Gebrauch machen, im Unterstützungspunkte B (Fig. 74) einen Druck gleich

$$\frac{Q\,(\frac{1}{2}l + z)}{l} + \tfrac{1}{2}pl,$$

und in A einen Druck gleich

$$\frac{Q(\frac{1}{2}l - z)}{l} + \frac{1}{2}pl$$

hervorbringt. Statt der beiden Unterstützungspunkte kann man dann zwei jenen Druckkräften gleiche aber entgegengesetzte Kräfte wirkend annehmen. Denken wir uns jetzt den Körper in D festgeklemmt, so wird folglich die Biegung jedes Theiles DB und DA die eines in einem Endpunkte schräg eingemauerten Körpers sein, welcher aufwärts durch die Kraft

$$\frac{Q(\frac{1}{2}l + z)}{l} + \frac{1}{2}pl$$

oder

$$\frac{Q(\frac{1}{2}l - z)}{l} + \frac{1}{2}pl$$

gebogen ist, und nach unten durch die gleichförmige Belastung der respectiven Theile. Es wird alsdann für den Bogen DB:

$$\varepsilon d_x^2 y = \left(Q \cdot \frac{(\frac{1}{2}l + z)}{l} + \frac{1}{2}pl\right)(\tfrac{1}{2}l - z - x) - \tfrac{1}{2}p(\tfrac{1}{2}l - z - x)^2.$$

$$y = \left(\frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{(\frac{1}{2}l + z)}{l} + \frac{\frac{1}{2}pl}{\varepsilon}\right)\left((\tfrac{1}{2}l - z)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$
$$- \frac{p}{\varepsilon}\left((\tfrac{1}{2}l - z)^2 \frac{x^2}{4} - (\tfrac{1}{2}l - z)\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + x \operatorname{tang} \omega.$$

$$BH = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{(\frac{1}{2}l + z)}{l} \cdot \frac{(\frac{1}{2}l - z)^3}{3}$$
$$+ \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{5l}{48} + \frac{z}{8}\right)(\tfrac{1}{2}l - z)^3 + (\tfrac{1}{2}l - z) \operatorname{tang} \omega.$$

Für den Bogen DA wird:

$$\varepsilon d_x^2 y = \left(Q \cdot \frac{(\frac{1}{2}l - z)}{l} + \frac{1}{2}pl\right)(\tfrac{1}{2}l + z - x) - \tfrac{1}{2}p(\tfrac{1}{2}l + z - x)^2.$$

$$y = \left(\frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{(\frac{1}{2}l - z)}{l} + \frac{1}{2}pl\right)\left((\tfrac{1}{2}l + z)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$
$$- \frac{p}{\varepsilon}\left((\tfrac{1}{2}l + z)^2 \frac{x^2}{4} - (\tfrac{1}{2}l + z)\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - x \operatorname{tang} \omega.$$

$$AI = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{(\tfrac{1}{2}l - z)}{l} \cdot \frac{(\tfrac{1}{2}l + z)^3}{3}$$
$$+ \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{5l}{48} - \frac{z}{8}\right)(\tfrac{1}{2}l + z)^3 - (\tfrac{1}{2}l + z)\,\mathrm{tang}\,\omega.$$

Da nun BH = AI sein soll, so findet man hieraus:

$$l\,.\,\mathrm{tang}\,\omega = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{(\tfrac{1}{4}l^2 - z^2)}{3l}\Big((\tfrac{1}{2}l + z)^2 - (\tfrac{1}{2}l - z)^2\Big)$$
$$+ \frac{p}{\varepsilon}\left[\left(\frac{5l}{48} - \frac{z}{8}\right)(\tfrac{1}{2}l + z)^3 - \left(\frac{5l}{48} + \frac{z}{8}\right)(\tfrac{1}{2}l - z)^3\right],$$

und durch Reduction:

$$\mathrm{tang}\,\omega = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{2z(\tfrac{1}{4}l^2 - z^2)}{3l} + \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{z}{2}(\tfrac{1}{4}l^2 - \tfrac{1}{3}z^2).$$

Substituirt man diesen Werth, so erhält man die Gleichung des Bogens DB:

$$y = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{\tfrac{1}{2}l + z}{l}\left[\tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}l - z)\,zx + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}l - z)\,x^2 - \tfrac{1}{6}x^3\right]$$
$$+ \frac{p}{\varepsilon}\left[\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}l^2 - \tfrac{1}{3}z^2)\,zx + \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4}l^2 - z^2)\,x^2 - \tfrac{1}{6}zx^3 - \tfrac{1}{24}x^4\right],$$

und die Gleichung des Bogens DA:

$$y = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{\tfrac{1}{2}l - z}{l}\left[-\tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}l + z)\,zx + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}l + z)\,x^2 - \tfrac{1}{6}x^3\right]$$
$$+ \frac{p}{\varepsilon}\left[-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}l^2 - \tfrac{1}{3}z^2)\,zx + \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4}l^2 - z^2)\,x^2 + \tfrac{1}{6}zx^3 - \tfrac{1}{24}x^4\right].$$

Es wird ferner:

$$BH = AI = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{(\tfrac{1}{4}l^2 - z^2)^2}{3l} + \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{(\tfrac{1}{4}l^2 - z^2)}{24}(\tfrac{5}{4}l^2 - z^2).$$

Den tiefsten Punkt der neutralen Axenschicht und den Pfeil des Herunterbiegens findet man auf dieselbe Weise, wie im §. 161. Die entsprechende Abscisse wird hier durch eine Gleichung dritten Grades bestimmt werden.

Der Krümmungshalbmesser des Bogens DB wird:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\left(Q \cdot \frac{(\tfrac{1}{2}l + z)}{l} + \tfrac{1}{2}pl\right)(\tfrac{1}{2}l - z - x) - \tfrac{1}{2}p(\tfrac{1}{2}l + z - x)^2}$$

Dieser Ausdruck wird ein Minimum, wenn $x = o$. Der Krümmungshalbmesser des Bogens DB wird folglich am kleinsten in D, und es wird hier:

$$\varrho_1 = \frac{l\varepsilon}{(Q + \frac{1}{2}pl)(\frac{1}{4}l^2 - z^2)}.$$

Der Krümmungshalbmesser des Bogens DA wird:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\left(Q \cdot \frac{(\frac{1}{2}l - z)}{l} + \frac{1}{2}pl\right)(\frac{1}{2}l + z - x) - \frac{1}{2}p(\frac{1}{2}l + z - x)^2}.$$

Dieser Ausdruck wird ein Minimum, wenn:

$$x = z - \frac{Q(\frac{1}{2}l - z)}{pl},$$

sofern dieser Ausdruck positiv ist, d. h. wenn

$$Q < \frac{plz}{\frac{1}{2}l - z}.$$

Ist dagegen:

$$Q = \text{oder} > \frac{plz}{\frac{1}{2}l - z},$$

so wird der Krümmungshalbmesser ein Minimum, wenn $x = o$. Im ersten Falle wird der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho_2 = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}Q(\frac{1}{2}l - z) + \frac{Q^2(\frac{1}{2}l - z)^2}{2pl^2} + \frac{1}{8}pl^2},$$

und dieser Werth muss, eben weil er ein Minimum ist, kleiner sein als der für den Bogen DB und DA gemeinschaftliche Halbmesser im Punkte D : ϱ_1. Es sind folglich zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Wenn

$$Q = \text{oder} > \frac{plz}{\frac{1}{2}l - z}.$$

Es wird alsdann der Körper zuerst in D brechen und die grösste Belastung innerhalb der Elasticitätsgrenze wird durch die Gleichung:

$$\varrho_1 = \frac{E}{T} \cdot c$$

bestimmt sein, woraus:

$$Q + \tfrac{1}{2}pl = \frac{Tl\varepsilon}{E(\tfrac{1}{4}l^2 - z^2)c}.$$

2) Wenn

$$Q < \frac{plz}{\tfrac{1}{2}l - z}.$$

Der Körper wird alsdann zuerst in einem zwischen D und C gelegenen Punkte, dessen Abscisse

$$x = z - \frac{Q(\tfrac{1}{2}l - z)}{pl}$$

ist, brechen. Die grösste Belastung innerhalb der Elasticitätsgrenze wird durch die Gleichung

$$\varrho_2 = \frac{E}{T} \cdot c$$

bestimmt werden, woraus:

$$Q(\tfrac{1}{2}l - z) + \frac{Q^2(\tfrac{1}{2}l - z)^2}{pl^2} + \tfrac{1}{4}pl^2 = \frac{2T\varepsilon}{Ec}.$$

§. 174.

Wenn $z = o$, d. h. wenn die Last Q in der Mitte des Balkens angebracht ist (Fig. 75), so wird die Gleichung jeder der beiden Hälften der neutralen Axenschicht, CA und CB:

$$y = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{x^2}{4}(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{3}x) - \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{x^2}{8}(\tfrac{1}{2}l^2 - \tfrac{1}{3}x^2).$$

Weil hier der Anfangspunkt der Coordinaten in der Mitte liegt und selbst der tiefste Punkt ist, so wird, wenn $x = \tfrac{1}{2}l$, $y = f$, und folglich:

$$f = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{l^3}{48} + \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{5l^4}{384}.$$

Die Länge der neutralen Axenschicht zwischen den beiden Unterstützungspunkten wird:

$$s = 2\int_0^{\frac{1}{2}l} \sqrt{1 + (d_x y)^2}\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}l} \left(1 + \tfrac{1}{2}(d_x y)^2\right) dx.$$

Es ist jetzt:

$$d_x y = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{x}{4}(l - x) - \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{x}{2}(\tfrac{1}{4}l^2 - \tfrac{1}{3}x^2).$$

Substituirt man diesen Werth und integrirt, so findet man:

$$s = l + \frac{Q^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{l^5}{960} - \frac{Qp}{\varepsilon^2} \cdot \frac{61\, l^6}{46080} + \frac{p^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{17 l^7}{40320},$$

und hieraus wieder:

$$l = s - \frac{Q^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{s^5}{960} + \frac{Qp}{\varepsilon^2} \cdot \frac{61\, s^6}{46080} - \frac{p^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{17 s^7}{40320}.$$

Die grösste Belastung an der Elasticitätsgrenze wird durch die Gleichung:

$$Q + \tfrac{1}{2}pl = \frac{4T\varepsilon}{Elc}$$

bestimmt. Man kann folglich die Hälfte der gleichförmigen Belastung als in der Mitte angebracht annehmen.

§. 175.

Wir wollen jetzt den prismatischen Körper als an dem einen Ende horizontal eingemauert, an dem anderen in derselben horizontalen Lage unterstützt annehmen. Es sei (Fig. 76) der Körper, sowohl seiner ganzen Länge nach von einem gleichförmigen Gewicht, auf jeder Längeneinheit p, wie auch in einem beliebigen Punkte D durch ein Gewicht Q gebogen. Es sei AB = l, AF = z, und der Anfangspunkt der Coordinaten in A angenommen. Bezeichnen wir ferner durch Π den Druck auf den Unterstützungspunkt B, so können wir statt dieser Unterstützung eine aufwärts wirkende Kraft annehmen. Der Körper ist alsdann als an einem Ende horizontal eingemauert, am anderen als frei anzusehen, und durch die gleichförmige Belastung, durch die Last Q und durch die aufwärts gerichtete Kraft Π gebogen. Man wird alsdann die

Methode des §. 168 anwenden müssen und besonders die Bogen AD und DB betrachten.

In Bezug auf AD wird:

$$\varepsilon d_x{}^2 y = Q(z - x) + \tfrac{1}{2}p(l - x)^2 - \Pi(l - x),$$

und wenn man so integrirt, dass für $z = o$ auch $y = o$ und $d_x y = o$, so findet man:

$$\varepsilon d_x y = Q\left(zx - \frac{x^2}{2}\right) + p\left(\frac{l^2 x}{2} - \frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \Pi\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$y = \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{zx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{l^2x^2}{4} - \frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{\Pi}{\varepsilon}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Setzt man hier $x = z$, so findet man:

$$FD = \frac{Q}{\varepsilon}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{l^2z^2}{4} - \frac{lz^3}{6} + \frac{z^4}{24}\right) - \frac{\Pi}{\varepsilon}\left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right),$$

und wenn man durch φ den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente in D mit der horizontalen Abscissenaxe bildet:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{Q}{\varepsilon}\cdot\frac{z^2}{2} + \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{l^2z}{2} - \frac{lz^2}{2} + \frac{z^3}{6}\right) - \frac{\Pi}{\varepsilon}\left(lz - \frac{z^2}{2}\right).$$

In Bezug auf DB wird:

$$\varepsilon d_x{}^2 y = \tfrac{1}{2}p(l - x)^2 - \Pi(l - x).$$

Integrirt man hier, so dass, wenn $x = z$, auch $y = FD$ und $d_x y = \operatorname{tang}\varphi$ wird, so erhält man:

$$d_x y = \frac{Q}{\varepsilon}\cdot\frac{z^2}{2} + \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{l^2x}{2} - \frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \frac{\Pi}{\varepsilon}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$y = \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{z^2x}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{l^2x^2}{4} - \frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{\Pi}{\varepsilon}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Da der unterstützte Endpunkt B in der horizontalen Abscissenaxe liegt, so muss $y = o$ sein, wenn $x = l$ ist. Daraus ergiebt sich die folgende Bedingungsgleichung:

$$o = \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{z^2 l}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + \frac{p}{\varepsilon}\cdot\frac{l^4}{8} - \frac{\Pi}{\varepsilon}\cdot\frac{l^3}{3}.$$

Hieraus findet man dann den bisher unbekannten Druck Π auf den Unterstützungspunkt B:

$$\Pi = \frac{Qz^2(3l-z)}{2l^3} + \frac{3pl}{8}.$$

Dieser Werth von Π substituirt giebt die Gleichung des Bogens AD:

$$y = \frac{Q}{\varepsilon}\left\{\frac{x^2(3z-x)}{6} - \frac{z^2x^2(3l-x)(3l-z)}{12l^3}\right\}$$
$$+ \frac{p}{\varepsilon}\cdot\frac{x^2(3l-2x)(l-x)}{48},$$

und die Gleichung des Bogens DB:

$$y = \frac{Q}{\varepsilon}\left\{\frac{z^2(3x-z)}{6} - \frac{z^2x^2(3l-x)(3l-z)}{12l^3}\right\}$$
$$+ \frac{p}{\varepsilon}\cdot\frac{x^2(3l-2x)(l-x)}{48}.$$

Die grösste Ordinate der neutralen Axenschicht oder den Pfeil des Herunterbiegens findet man auf die gewöhnliche Weise. Die entsprechende Abscisse wird durch eine Gleichung dritten Grades bestimmt.

Der Krümmungshalbmesser des Bogens AD, oder wenn $x < z$, wird:

$$\varrho = \frac{\pm\varepsilon}{Q(z-x) + \frac{1}{2}p(l-x)^2 - \Pi(l-x)},$$

und derjenige des Bogens DB, oder wenn $x > z$, wird:

$$\varrho = \frac{\pm\varepsilon}{\frac{1}{2}p(l-x)^2 - \Pi(l-x)}.$$

Die krumme Linie der neutralen Axenschicht hat offenbar einen und nur einen Wendepunkt. Um diesen Punkt zu finden, muss man die Werthe von x suchen, welche die beiden obigen Ausdrücke der Krümmungshalbmesser unendlich gross machen, und folglich respective den folgenden Gleichungen entsprechen:

$$Q(z-x) + \frac{1}{2}p(l-x)^2 - \Pi(l-x) = 0,$$
$$\frac{1}{2}p(l-x)^2 - \Pi(l-x) = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen giebt, weil $x < l$ sein soll, nur einen Werth von x:

$$x_1 = l + \frac{Q - \Pi}{p} - \sqrt{\left(\frac{Q - \Pi}{p}\right)^2 + 2\,\frac{Q}{p}\,(l - z)}.$$

Die zweite Gleichung giebt ebenfalls nur einen Werth:

$$x_2 = l - \frac{2\Pi}{p},$$

Es ist jetzt zu bemerken, dass die Abscisse x_1 nur in AD einem Wendepunkte entspricht und folglich nur, wenn $x_1 < z$; ebenso entspricht die Abscisse x_2 nur in dem Bogen DB einem Wendepunkt, und folglich nur, wenn $x_2 > z$. Es ist jetzt leicht einzusehen, dass es unmöglich ist, dass auf einmal $z > x_1$ und $< x_2$ sein kann. Es ist nämlich

$$Q(z - x_1) + \tfrac{1}{2}p\,(l - x_1)^2 - \Pi(l - x_1) = 0$$

und folglich, wenn $z > x_1$:

$$\tfrac{1}{2}p\,(l - x_1)^2 < \Pi(l - x_1),$$

woraus:

$$x_1 > l - \frac{2\Pi}{p},$$

oder $x_1 > x_2$. Umgekehrt findet man auf dieselbe Weise, dass, wenn $z < x_1$, auch $x_1 < x_2$ ist. Es sind folglich nur zwei Fälle möglich:

1) Wenn $z > x_1$ (Fig. 76).

Es ist alsdann auch $z > x_2$, und folglich kann der Krümmungshalbmesser nur in dem Bogen AD unendlich werden, und auch nur hier ein Wendepunkt W stattfinden, dessen Abscisse gleich x_1 ist.

2) Wenn $z < x_1$ (Fig. 77).

Es ist alsdann auch $z < x_2$, und folglich kann der Krümmungshalbmesser nur in dem Bogen DB unendlich werden, und auch nur hier ein Wendepunkt W stattfinden, dessen Abscisse gleich x_2 ist.

Um den kleinsten Krümmungshalbmesser und hieraus die grösste Belastung zu finden, muss man besonders die zwei obigen Fälle betrachten. Es finde der erste Fall statt, dass $z > x_1$

und folglich der Wendepunkt W in AD gelegen ist. Die Krümmung des Bogens AW ist dann nach unten, diejenige des Bogens WD nach oben gekehrt. In AW, wo $x < x_1$, wird folglich der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{Q(z-x) + \frac{1}{2}p(l-x)^2 - \Pi(l-x)}.$$

Dieser Ausdruck wird zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = x_1$ am kleinsten, wenn $x = o$, oder in A, und gleich:

$$\varrho_1 = \frac{\varepsilon}{Qz + \frac{1}{2}pl^2 - \Pi l}.$$

In dem Bogen WD, oder, wenn $x > x_1$, aber $< z$ ist, wird:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\Pi(l-x) - \frac{1}{2}p(l-x)^2 - Q(z-x)}.$$

Dieser Krümmungshalbmesser wird ein Minimum, wenn:

$$x = l - \frac{\Pi - Q}{p},$$

sofern dieser Werth gleich oder kleiner als z ist. Wenn folglich (Fig. 78):

$$z > l - \frac{\Pi - Q}{p},$$

oder

$$z > \tfrac{5}{8}l + \frac{Q}{p} \cdot \frac{(2l^3 - 3lz^2 + z^3)}{2l^3},$$

woraus:

$$Q < \frac{pl^3(8z - 5l)}{4(2l^3 - 3lz^2 + z^3)},$$

so wird der Krümmungshalbmesser ein Minimum im Punkte M, dessen Abscisse AK den oben angegebenen Werth hat. Es wird dann hier:

$$\varrho_2 = \frac{\varepsilon}{Q(l-z) + \frac{(\Pi - Q)^2}{2p}}.$$

Aus der Grenze der Last Q sieht man, dass, damit dieses Minimum stattfinden soll, nothwendig $z > \frac{5}{8}l$ sein muss. Ueber-

schreitet Q die obige Grenze, oder ist $z =$ oder $< l - \frac{\Pi - Q}{p}$ (Fig. 76), so ist der Krümmungshalbmesser des Bogens WD am kleinsten, wenn x am grössten ist, d. h. in D, wo $x = z$ ist. Es wird dann hier:

$$\varrho_3 = \frac{\varepsilon}{\Pi(l-z) - \frac{1}{2}p\,(l-z)^2}.$$

In dem Bogen DB, oder wenn $x > z$, wird der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\Pi(l-x) - \frac{1}{2}p\,(l-x)^2}.$$

Dieser Ausdruck wird ein Minimum, wenn

$$x = l - \frac{\Pi}{p},$$

insofern dieser Werth grösser als z ist. Wenn folglich (Fig. 76):

$$z < l - \frac{\Pi}{p}$$

oder

$$z < \frac{5l}{8} - \frac{Q}{p} \cdot \frac{z^2\,(3l-z)}{2l^3},$$

woraus:

$$Q < \frac{pl^3\,(5l-8z)}{4z^2\,(3l-z)},$$

so wird der Krümmungshalbmesser ein Minimum im Punkte M sein, dessen Abscisse AK den oben angegebenen Werth hat, und es wird hier der Krümmungshalbmesser

$$\varrho_4 = \frac{2p\varepsilon}{\Pi^2}.$$

Aus dem Werthe der Grenze der Last Q sieht man ferner, dass es nothwendig ist, dass $z < \frac{5}{8}l$ ist. Die Minima ϱ_4 und ϱ_2 können folglich nie zu derselben Zeit stattfinden. Ist $z =$ oder $> l - \frac{\Pi}{p}$ (Fig. 76), so wird der Krümmungshalbmesser des Bogens DB am

kleinsten, wenn x den möglichst kleinsten Werth hat, folglich in D, wo der Krümmungshalbmesser gleich ϱ_3 wird. Weil der Krümmungshalbmesser ϱ_3 des Punktes D für den Bogen WD und DB gemeinschaftlich ist, so wird, wenn:

$$z > l - \frac{\Pi - Q}{p},$$

auch $\varrho_3 > \varrho_2$, und wenn:

$$z < l - \frac{\Pi - Q}{p},$$

auch $\varrho_3 < \varrho_4$. In dem ganzen Bogen WB wird folglich immer nur ein Minimum der Krümmungshalbmesser stattfinden, nämlich

ϱ_2, wenn $\quad z > l - \frac{\Pi - Q}{p},$

woraus:

$$Q > \frac{pl^3\,(8z - 5l)}{4\,(2l^3 - 3lz^2 + z^3)},$$

$$\text{und } z > \tfrac{5}{8}l;$$

ϱ_3, wenn $\quad z = \text{oder} < l - \frac{\Pi - Q}{p}, \text{ aber} > \text{oder} = l - \frac{\Pi}{p},$

woraus:

$$Q = \text{oder} > \frac{pl^3\,(8z - 5l)}{4\,(2l^3 - 3lz^2 + z^3)},$$

$$\text{wenn } z > \tfrac{5}{8}l, \text{ und}$$

$$Q = \text{oder} > \frac{pl^3\,(5l - 8z)}{4z^2\,(3l - z)},$$

$$\text{wenn } z = \text{oder} < \tfrac{5}{8}l;$$

ϱ_4, wenn $\quad z < l - \frac{\Pi}{p},$

woraus:

$$Q < \frac{pl^3\,(5l - 8z)}{4z^2\,(3l - z)}$$

$$\text{und } z < \tfrac{5}{8}l.$$

Der so bestimmte kleinste Halbmesser des Bogens WB

muss mit ϱ verglichen werden, und der kleinste unter ihnen ist alsdann das absolute Minimum der Halbmesser der ganzen neutralen Axenschicht.

Betrachten wir jetzt den zweiten Fall, wenn der Wendepunkt ausserhalb der Last fällt, folglich $z < x_2$, oder (Fig. 77):

$$z < l - \frac{2\Pi}{p}.$$

Man muss dann besonders die drei Bogen AD, DW und WB betrachten. In AD wird der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{Q(z-x)+\frac{1}{2}p(l-x)^2-\Pi(l-x)}.$$

Weil nun hier $x < z$, und

$$z < l - \frac{2\Pi}{p},$$

folglich um so mehr:

$$z < l - \frac{\Pi - Q}{p},$$

so wird auch

$$x < l - \frac{\Pi - Q}{p}.$$

Der obige Ausdruck des Krümmungshalbmessers wird folglich ein Minimum, wenn $x = o$, oder in A, und der Krümmungshalbmesser wird hier gleich ϱ_1. In dem Bogen DW wird der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}p(l-x)^2 - \Pi(l-x)}.$$

Da hier

$$x < x_2 = l - \frac{2\Pi}{p},$$

und folglich um so mehr

$$x < l - \frac{\Pi}{p}$$

ist, so wird der obige Ausdruck zwischen den Grenzen $x = z$

und $x = x_2$ am kleinsten, wenn $x = z$, oder in D und es wird hier der Krümmungshalbmesser gleich ϱ_3. Weil der Krümmungshalbmesser im Punkte D für den Bogen AD und DW gemeinschaftlich ist, und weil ϱ_1 ein Minimum der Halbmesser des Bogens AD ist, so muss folglich $\varrho_3 < \varrho_1$ sein. Im Bogen WD wird der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\Pi(l-z) - \frac{1}{2}p(l-z)^2}.$$

Dieser Ausdruck wird am kleinsten, wenn

$$x = l - \frac{\Pi}{p}.$$

Der Krümmungshalbmesser des Bogens WB wird folglich ein Minimum in einem Punkte M, dessen Abscisse

$$AK = l - \frac{\Pi}{p}$$

ist, und er wird hier gleich ϱ_4. Der Krümmungshalbmesser der neutralen Axenschicht AWB hat folglich in dem hier betrachteten Falle zwei Minima, eines in A, wo er gleich ϱ_1 ist, und ein anderes in M, wo er gleich ϱ_4 ist. Weil jetzt

$$z < l - \frac{2\Pi}{p}$$

ist, so wird:

$$\frac{\Pi}{p} < \frac{l-z}{2},$$

und

$$\frac{\Pi^2}{2p} < \frac{\Pi(l-z)}{4}.$$

Es ist aber, wenn man den Werth von Π substituirt:

$$\frac{\Pi(l-z)}{4} = \frac{Qz^2(\frac{3}{4}l - \frac{1}{4}z)(l-z)}{2l^3} + \frac{3}{32}pl(l-z).$$

Dieser Ausdruck ist augenscheinlich kleiner als:

$$Qz + \frac{1}{2}pl^2 - \Pi l = \frac{Qz(2l-z)(l-z)}{2l^2} + \frac{1}{8}pl^2,$$

und es wird folglich:

$$\frac{\Pi^2}{2p} < Qz + \tfrac{1}{2}pl^2 - \Pi l,$$

und

$$\frac{2p\varepsilon}{\Pi^2} > \frac{\varepsilon}{Qz + \frac{1}{2}pl^2 - \Pi l},$$

oder: $\varrho_4 > \varrho_1$.

Der Halbmesser ϱ_1 in A ist folglich in diesem Falle das absolute Minimum der Krümmungshalbmesser.

Wenn auf diese Weise in jedem Falle der kleinste Krümmungshalbmesser der neutralen Axenschicht gefunden ist, so wird die grösste Belastung innerhalb der Elasticitätsgrenze durch die Formel:

$$\varrho = \frac{Ec}{T}$$

bestimmt.

§. 176.

Nehmen wir $Q = o$ an, dass also der Körper nur durch die gleichförmige Belastung gebogen wird (Fig. 79). Der Druck auf den Unterstützungspunkt B wird alsdann:

$$\Pi = \tfrac{3}{8}pl,$$

d. h. gleich $\frac{3}{8}$ der ganzen gleichförmig vertheilten Last. Die Gleichung der mittleren Axenschicht wird ferner aus dem vorigen Paragraphen gefunden:

$$y = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{x^2 (3l - 2x)(l - x)}{48}.$$

Die Abscisse des Wendepunktes wird:

$$x_1 = \tfrac{1}{4}l.$$

Der tiefste Punkt der neutralen Axenschicht wird in C gefunden, dessen Abscisse:

$$AF = \frac{15 - \sqrt{33}}{16} l = 0{,}57847 \,.\, l.$$

Dieser Werth in der obigen Gleichung der neutralen Axenschicht substituirt, giebt den Pfeil des Herunterbiegens:

$$f = FC = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{39 + 55\sqrt{33}}{16^4} \cdot l^4 = 0{,}005416 \cdot \frac{pl^4}{\varepsilon}.$$

Die Länge der neutralen Axenschicht AWCB wird:

$$s = \int_0^l \left(1 + \tfrac{1}{2}(d_x y)^2\right) dx.$$

Wenn man hier den Werth von $d_x y$:

$$d_x y = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{l^2 x}{8} - \frac{5lx^2}{16} + \frac{x^3}{6}\right)$$

substituirt, und die Integration ausführt, erhält man:

$$s = l + \frac{p^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{l^7}{13440},$$

und hieraus wieder:

$$l = s - \frac{p^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{s^7}{13440}.$$

Der Krümmungshalbmesser wird in AW, wo $x < \frac{1}{4}l$, gleich:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{8}p\,(l - x)\,(l - 4x)},$$

und in WB, wo $x > \frac{1}{4}l$, wird:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{8}p\,(l - x)\,(4x - l)}.$$

Der erste Ausdruck wird ein Minimum, wenn $x = o$, folglich in A, und es wird hier:

$$\varrho_1 = \frac{8\varepsilon}{pl^2}.$$

Der zweite Ausdruck wird ein Minimum, wenn $x = \frac{5}{8}l$, in N, und es wird hier:

$$\varrho_4 = \frac{128\varepsilon}{9pl^2}.$$

Dieses zweite Minimum ist, wie man sieht, bedeutend grösser als das erste. Der Körper wird folglich zuerst in A brechen. An

der Elasticitätsgrenze wird:

$$\varrho_1 = \frac{8\varepsilon}{pl^2} = \frac{Ec}{T},$$

und hieraus:

$$p = \frac{8T\varepsilon}{El^2c}.$$

Die grösste gleichmässige Belastung innerhalb der Elasticitätsgrenze wird folglich in dem hier betrachteten Falle genau dieselbe, als wäre der Balken an beiden Enden frei aufgelegt.

§. 177.

Es sei der prismatische Körper an beiden Enden horizontal eingemauert, doch so, dass er an einem oder beiden Enden frei horizontal gleiten kann, und dass folglich keine Ausdehnung der neutralen Axenschicht stattfindet. Es sei der Körper (Fig. 80) sowohl durch eine gleichförmige Belastung, auf jeder Längeneinheit p, wie auch im Punkte D von einem Gewichte Q gebogen. Nehmen wir A als Anfangspunkt der Coordinaten an, die Abscissenaxe horizontal, die Ordinatenaxe vertical, und setzen dann AB = l, AF = z. Die Wirkung des Einmauerns in B ist, die Tangente in diesem Punkte horizontal zu machen. Dies kann nur dadurch bewirkt werden, dass der Körper um ein Stück BC in die Mauer hinein verlängert ist. Der Körper wird alsdann in B einen Druck nach unten, in C einen Druck nach oben ausüben. Wir können uns folglich den Körper statt mit dem kleinen Stück BC eingemauert, hier frei denken, jedoch von zwei diesen Druckkräften gleichen aber entgegengesetzten Kräften Π in B und Π' in der Verlängerung in C so gebogen, dass B in derselben horizontalen Linie mit A liegt, und dass die Tangente in diesem Punkte horizontal wird (Fig. 81). Bezeichnen wir durch a die Abscisse AE des Wirkungspunktes der Kraft Π'; es wird alsdann die Gleichung des Bogens AD:

$$\varepsilon d_x{}^2 y = Q(z - x) + \tfrac{1}{2}p\,(l - x)^2 - \Pi\,(l - x) + \Pi'(a - x),$$

$$\varepsilon d_x y = Q\left(zx - \frac{x^2}{2}\right) + p\left(\frac{l^2x}{2} - \frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \Pi\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)$$
$$+ \Pi'\left(ax - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$y = \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{zx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{l^2x^2}{4} - \frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{\Pi}{\varepsilon}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$
$$+ \frac{\Pi'}{\varepsilon}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Die Gleichung des Bogens DB wird:

$$\varepsilon d_x{}^2 y = \tfrac{1}{2}p\,(l - x)^2 - \Pi(l - x) + \Pi'(a - x).$$

Hier muss jetzt so integrirt werden, dass, wenn $x = z$ gesetzt wird, $d_x y$ und y denselben Werth, wie in den vorigen Gleichungen des Bogens AD erhalten. Man erhält alsdann:

$$\varepsilon d_x y = Q\,.\,\frac{z^2}{2} + p\left(\frac{l^2x}{2} - \frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \Pi\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)$$
$$+ \Pi'\left(ax - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$y = \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{z^2x}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{l^2x}{4} - \frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{\Pi}{\varepsilon}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$
$$+ \frac{\Pi'}{\varepsilon}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Setzt man hier $x = l$, so soll $d_x y = o$ und $y = o$ werden. Dies giebt dann folgende zwei Bedingungsgleichungen:

$$o = Q\,.\,\frac{z^2}{2} + \frac{pl^3}{6} - \frac{\Pi l^2}{2} + \Pi'\left(al - \frac{l^2}{2}\right),$$

$$o = Q\left(\frac{z^2l}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + \frac{pl^4}{8} - \frac{\Pi l^3}{3} + \Pi'\left(\frac{al^2}{2} - \frac{l^3}{6}\right).$$

Hieraus findet man dann:

$$\Pi' = \frac{Qz^2\,(l - z) + \frac{1}{12}pl^4}{l^2\,(a - l)},$$

$$\Pi = \frac{Qz^2\,(3al - 2az + lz - 2l^2) + \frac{1}{12}pl^4\,(6a - 5l)}{l^3\,(a - l)}.$$

Substituirt man diese Werthe, so findet man die Gleichung des Bogens AD:

$$y = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{x^2 (l-z)^2}{l^3} \left(\frac{lz}{z} - \frac{(l+2z)x}{6} \right) + \frac{p}{\varepsilon} (l-x)^2.$$

und diejenige des Bogens DB:

$$y = \frac{Q}{\varepsilon} \cdot \frac{z^2}{6} \left[(3x - z) + \frac{x^2[(3l-2z)x - 3(2l-z)l]}{l^3} \right] + \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{(l-x)^2 x^2}{24}.$$

Der Krümmungshalbmesser des Bogens AD, wo $x < z$, wird:

$$\varrho = \frac{\pm \varepsilon}{Q(z-x) + \frac{1}{2}p(l-x)^2 - \Pi(l-x) + \Pi'(a-x)},$$

und derjenige des Bogens DB, oder wenn $x > z$:

$$\varrho = \frac{\pm \varepsilon}{\frac{1}{2}p(l-x)^2 - \Pi(l-x) + \Pi'(a-x)}.$$

Die krumme Linie der neutralen Axenschicht hat hier zwei Wendepunkte. Um diese zu finden, muss man die Werthe von x suchen, welche die beiden obigen Werthe der Krümmungshalbmesser unendlich machen, und folglich die beiden Gleichungen:

$$Q(z-x) + \tfrac{1}{2}p(l-x)^2 - \Pi(l-x) + \Pi'(a-x) = o,$$
$$\tfrac{1}{2}p(l-x)^2 - \Pi(l-x) + \Pi'(a-x) = o$$

auflösen. Die erste dieser Gleichungen giebt:

$$x_1 = l - \frac{\Pi - \Pi' - Q}{p} - \sqrt{\left\{ \left(\frac{\Pi - \Pi' - Q}{p} \right)^2 - \frac{2\Pi'(a-l)}{p} + \frac{2Q(l-z)}{p} \right\}},$$

$$x_2 = l - \frac{\Pi - \Pi' - Q}{p} + \sqrt{\left\{ \left(\frac{\Pi - \Pi' - Q}{p} \right)^2 - \frac{2\Pi'(a-l)}{p} + \frac{2Q(l-z)}{p} \right\}},$$

$$x_3 = l - \frac{\Pi - \Pi'}{p} - \sqrt{\left\{ \left(\frac{\Pi - \Pi'}{p} \right)^2 - \frac{2\Pi'(a-l)}{p} \right\}},$$

$$x_4 = l - \frac{\Pi - \Pi'}{p} + \sqrt{\left\{ \left(\frac{\Pi - \Pi'}{p} \right)^2 - \frac{2\Pi'(a-l)}{p} \right\}}.$$

Die Abscissen x_1 und x_2 entsprechen hier Wendepunkten, insofern sie kleiner als z sind; x_3 und x_4 sind Abscissen der Wendepunkte, insofern sie grösser als z sind. Es ist jetzt leicht zu sehen, dass unter diesen vier Abscissen nur zwei auf einmal Wendepunkten entsprechen können.

Setzen wir erst der Kürze wegen:

$$\left(\frac{\Pi-\Pi'}{p}\right)^2-\frac{2\Pi'(a-l)}{p}=M,$$

$$\left(\frac{\Pi-\Pi'-Q}{p}\right)^2-\frac{2\Pi'(a-l)}{p}+\frac{2Q(l-z)}{p}=N.$$

Wenn wir nun die Werthe von Π und Π' substituiren, finden wir:

$$M=\tfrac{1}{12}l^2+\frac{Q}{p}\cdot\frac{z^2}{l}+\frac{Q^2}{p^2}\cdot\frac{z^4(3l-2z)^2}{l^6},$$

$$N=\tfrac{1}{12}l^2+\frac{Q}{p}\cdot\frac{(l-z)^2}{l}+\frac{Q^2}{p^2}\cdot\frac{(l-z)^4(l+2z)^2}{l^6}.$$

Man sieht hieraus, dass

$$\sqrt{M}>\frac{Q}{p}\cdot\frac{z^2(3l-2z)}{l^3},\ \text{und}\ \sqrt{N}>\frac{Q}{p}\cdot\frac{(l-z)^2(l+2z)}{l^3},$$

woraus durch Addition:

$$\sqrt{M}+\sqrt{N}>\frac{Q}{p}.$$

Es ist ferner:

$$Q(z-x_1)+\tfrac{1}{2}p(l-x_1)^2-\Pi(l-x_1)+\Pi'(a-x_1)=o,$$
$$\tfrac{1}{2}p(l-x_3)^2-\Pi(l-x_3)+\Pi'(a-x_3)=o.$$

Setzt man diese zwei Ausdrücke einander gleich und reducirt, so findet man:

$$Q.(z-x_1)=\tfrac{1}{2}p(x_3-x_1)^2-pl(x_3-x_1)+(\Pi-\Pi')(x_3-x_1),$$

und hieraus:

$$Q\cdot\frac{z-x_1}{x_3-x_1}=\tfrac{1}{2}p(x_3+x_1)-pl+\Pi-\Pi'.$$

Substituirt man hier auf der rechten Seite die Werthe von x_3 und x_1, so erhält man:

$$Q\cdot\frac{z-x_1}{x_3-x_1}=\tfrac{1}{2}Q-\tfrac{1}{2}p(\sqrt{M}+\sqrt{N}).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist immer negativ, weil, wie oben bewiesen, immer

$$\sqrt{M}+\sqrt{N}>\frac{Q}{p}.$$

Wenn folglich $z > x_1$, so ist $x_1 > x_3$, und folglich auch $z > x_3$, und wenn $z < x_1$, so ist $x_1 < x_3$, und folglich auch $z < x_3$.

Auf dieselbe Weise findet man:

$$Q \cdot \frac{z - x_2}{x_4 - x_2} = \tfrac{1}{2}Q + \tfrac{1}{2}p\,(\sqrt{M} + \sqrt{N}),$$

woraus, weil

$$\sqrt{M} + \sqrt{N} > \frac{Q}{p},$$

$$Q \cdot \frac{z - x_2}{x_4 - x_2} > Q.$$

Wenn $z > x_2$, so ist auch $z > x_4$, und wenn $z < x_2$, so ist auch $z < x_4$.

Es können jetzt nur drei Fälle stattfinden. Im ersten Falle (Fig. 82) ist $z > x_2$ und folglich auch $z > x_1$. Es ist dann, wie oben bewiesen, auch $z > x_4$, und folglich um so mehr $z > x_3$. Die Abscissen x_3 und x_4 entsprechen folglich in diesem Falle keinen Wendepunkten, dagegen sind x_1 und x_2 in diesem Falle die Abscissen der zwei Wendepunkte W_1 und W_2, welche beide in AD fallen.

Im zweiten Falle (Fig. 80) ist $z < x_2$, aber $z > x_1$. Es ist alsdann, wie oben gezeigt, auch $z < x_4$, aber $z > x_3$. Die Abscissen x_1 und x_4 entsprechen dann allein zwei Wendepunkten der neutralen Axenschicht, W_1 und W_2, von denen der erste in AD, der andere in DB fällt.

Im dritten Falle ist $z < x_1$ und folglich auch $z < x_2$. Es ist alsdann auch $z < x_3$ und $z < x_4$. Die Abscissen x_3 und x_4 entsprechen dann allein zwei Wendepunkten, welche beide in DB fallen werden. Dieser Fall wird folglich mit dem ersten zusammenfallen, wenn man A und B vertauscht, weil der Körper auf dieselbe Weise in beiden Enden eingemauert ist. Wir werden daher fortan nur die Fälle Fig. 80 und Fig. 82 betrachten.

Um den kleinsten Krümmungshalbmesser der neutralen Axenschicht zu finden, muss man diese zwei Fälle einzeln betrachten.

Es finde der Fall (Fig. 82), wenn $z > x_2$, statt. Der Krümmungshalbmesser des Bogens AW_1, wo $x < x_1$, wird:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{Q(z-x) + \frac{1}{2}p(l-x)^2 - \Pi(l-x) + \Pi'(a-x)}.$$

Dieser Ausdruck wird zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = x_1$ am kleinsten, wenn $x = o$, oder in A, und es wird hier:

$$\varrho_1 = \frac{\varepsilon}{Qz + \frac{1}{2}pl^2 - \Pi l + \Pi' a}$$

$$= \frac{\varepsilon}{Qz \cdot \frac{(l-z)^2}{l^2} + \frac{1}{12}pl^2}.$$

In dem Bogen W_1W_2, oder wenn $x > x_1$, aber $x < x_2$, wird der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\Pi(l-x) - \Pi'(a-x) - Q(z-x) - \frac{1}{2}p(l-x)^2}.$$

Dieser Ausdruck wird am kleinsten, wenn:

$$x = l - \frac{\Pi - \Pi' - Q}{p} = \frac{1}{2}l + \frac{Q}{p} \cdot \frac{(l-z)^2(l+2z)}{l^3},$$

welcher Ausdruck kleiner als x_2 und folglich auch kleiner als z ist; und es wird hier:

$$\varrho_2 = \frac{\varepsilon}{\frac{(\Pi - \Pi' - Q)^2}{2p} - \Pi'(a-l) + Q(l-z)}$$

$$= \frac{\varepsilon}{Q \cdot \frac{(l-z)^2}{2l} + \frac{Q^2}{p} \cdot \frac{(l-z)^4(l+2z)^2}{2l^6} + \frac{1}{24}pl^2}.$$

In dem Bogen W_2D, oder wenn $x > x_2$, aber $x < z$, wird der Krümmungshalbmesser wieder:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{Q(z-x) + \frac{1}{2}p(l-x)^2 - \Pi(l-x) + \Pi'(a-x)}.$$

Dieser Ausdruck wird zwischen den Grenzen $x = x_2$ und $x = z$ am kleinsten, wenn $x = z$, und wird hier:

$$\varrho_3 = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}p\,(l-z)^2 - \Pi(l-z) + \Pi'(a-z)}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\frac{1}{12}pl^2 - \frac{1}{2}pz\,(l-z) - 2Q\,.\,\frac{z^2\,(l-z)^2}{l^3}}.$$

In DB wird der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}p\,(l-x)^2 - \Pi(l-x) + \Pi'(a-x)}.$$

Dieser Ausdruck wird zwischen den Grenzen $x = z$ und $x = l$ am kleinsten, wenn $x = l$, oder in B, und es wird hier der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho_4 = \frac{\varepsilon}{\Pi'(a-l)} = \frac{\varepsilon}{Q\,.\,\frac{z^2(l-z)}{l^2} + \frac{1}{12}pl^2}.$$

Es ist hier $\varrho_4 < \varrho_3$ und, weil $z > \frac{1}{2}l$, auch $\varrho_4 < \varrho_1$. Es kann ferner auch bewiesen werden, dass $\varrho_4 < \varrho_2$ ist. Die Abscisse des ϱ_2 entsprechenden Punktes

$$x = \tfrac{1}{2}l + \frac{Q}{p}\,.\,\frac{(l-z)^2\,(l+2z)}{l^3}$$

ist nämlich immer kleiner als x_2. Hieraus folgt dann;

$$\frac{Q}{p}\,.\,\frac{(l-z)^2\,(l+2z)}{l^3} < z - \tfrac{1}{2}l,$$

und durch gleiche Multiplication auf beiden Seiten:

$$\frac{Q^2}{p}\,.\,\frac{(l-z)^4\,(l+2z)^2}{l^6} < Q\,.\,\frac{(z-\frac{1}{2}l)\,(l-z)^2\,(2z+l)}{l^3},$$

und wenn man auf beiden Seiten

$$Q\,.\,\frac{(l-z)^2}{l}$$

addirt:

$$Q\,.\,\frac{(l-z)^2}{l} + \frac{Q^2}{p}\,.\,\frac{(l-z)^4\,(l+2z)^2}{l^6} < Q\,.\,\frac{(l-z)^2\,(4z^2+l^2)}{2l^3}.$$

Es ist jetzt, wie man leicht sieht, weil $z > \frac{1}{2}l$:

$$\frac{(l-z)^2\,(4z^2+l^2)}{2l^3} < \frac{2z^2\,(l-z)}{l^2},$$

und folglich:

$$Q \cdot \frac{(l-z)^2}{l} + \frac{Q^2}{p} \cdot \frac{(l-z)^4 (l+2z)^2}{l^6} < 2Q \cdot \frac{z^2(l-z)}{l^2},$$

woraus hervorgeht, dass $\varrho_4 < \varrho_2$. Der Körper wird folglich in diesem Falle zuerst in B brechen.

Es finde jetzt der Fall (Fig. 80) statt, wenn $z > x_1$, aber $< x_2$ ist. Die Last Q befindet sich alsdann zwischen beiden Wendepunkten.

Der Krümmungshalbmesser des Bogens AW_1 wird fortwährend der kleinste in A sein und ist hier gleich ϱ_1.

Der Krümmungshalbmesser des Bogens W_1D ist, wie vorher, am kleinsten in einem Punkte, dessen Abscisse

$$x = l - \frac{\Pi - \Pi' - Q}{p} = \tfrac{1}{2}l + \frac{Q}{p} \cdot \frac{(l-z)^2 (l+2z)}{l^3},$$

insofern dieser Werth kleiner als z ist, und der Krümmungshalbmesser wird hier gleich ϱ_2. Ist jener Ausdruck dagegen grösser als z, so ist der Krümmungshalbmesser am kleinsten in D und wird hier gleich $-\varrho_3$, weil ϱ_3 in diesem Falle negativ wird.

In dem Bogen DW_2 wird der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{\Pi(l-x) - \Pi'(a-x) - \frac{1}{2}p(l-x)^2}.$$

Dieser Ausdruck wird am kleinsten, wenn:

$$x = l - \frac{\Pi - \Pi'}{p} = \tfrac{1}{2}l - \frac{Q}{p} \cdot \frac{z^2 (3l - 2z)}{l^3},$$

insofern dieser Werth grösser als z ist. Es wird hier alsdann der Krümmungshalbmesser gleich:

$$\varrho_5 = \frac{\varepsilon}{\frac{(\Pi - \Pi')^2}{2p} - \Pi'(a-l)}$$

$$= \frac{\varepsilon}{Q \cdot \frac{z^2}{2l} + \frac{Q^2}{p} \cdot \frac{z^4 (3l - 2z)^2}{2l^6} + \frac{1}{24}pl^2}.$$

Ist dagegen:

$$z > \tfrac{1}{2}l - \frac{Q}{p} \cdot \frac{z^2(3l - 2z)}{l^3},$$

so ist der Krümmungshalbmesser dieses Bogens am kleinsten in D, und hier gleich ϱ_3.

In dem Bogen W_2B ist endlich der Krümmungshalbmesser am kleinsten in B, und hier gleich ϱ_4.

Es ist jetzt, wenn $z < \tfrac{1}{2}l$, auch, wie man leicht sieht, $\varrho_1 < \varrho_3$ und $\varrho_1 < \varrho_4$. Ist

$$z < \tfrac{1}{2}l - \frac{Q}{p} \cdot \frac{z^2(3l - 2z)}{l^3},$$

so wird:

$$\frac{Q}{p} \cdot \frac{z^2(3l-2z)}{l^3} < \frac{l - 2z}{2},$$

und hieraus durch Multiplication auf beiden Seiten mit

$$\frac{z^2(3l - 2z)}{2l^3}$$

und Addition von

$$Q \cdot \frac{z^2}{4l}:$$

$$Q \cdot \frac{z^2}{4l} + \frac{Q}{p} \cdot \frac{z^4(3l - 2z)^2}{2l^6} < Q \cdot \frac{z(l - z)^2}{l^2} \cdot \frac{z}{l} < \frac{Qz(l - z)^2}{2l^2}.$$

Es ist ferner, weil $z < l - z$, und $l - z > \tfrac{1}{2}l$:

$$Q \cdot \frac{z^2}{4l} < \frac{Qz(l - z)}{4l} < Q \cdot \frac{z(l - z)^2}{2l^2}.$$

Addirt man hier, so findet man gleich $\varrho_1 < \varrho_5$.

Ist dagegen $z =$ oder $> \tfrac{1}{2}l$, so ist, wie man leicht sieht, $\varrho_4 =$ oder $< \varrho_1$ und $\varrho_4 < -\varrho_3$, und wenn:

$$z > \tfrac{1}{2}l + \frac{Q}{p} \cdot \frac{(l - z)^2(l + 2z)}{l^3},$$

so ist vorher bewiesen, dass $\varrho_4 < \varrho_2$. Nur wenn $p = o$ und $z = \tfrac{1}{2}l$, würde $\varrho_1 = \varrho_3 = \varrho_4$ und folglich der Balken in der Mitte und an beiden Enden gleich gebogen sein. Dieser Fall kann

indessen nicht stattfinden, da niemals das Gewicht des Balkens als gleichförmige Belastung vorhanden ist.

Im Allgemeinen wird folglich, wenn $z < \frac{1}{2}l$, der Körper am stärksten in A gebogen sein, wenn $z > \frac{1}{2}l$, dagegen in B. Ist $z = \frac{1}{2}l$, wird der Balken gleich stark in A und B gebogen, und zwar stärker als in jedem anderen Punkte.

Die grösste Belastung innerhalb der Elasticitätsgrenze wird durch die Gleichung:

$$\varrho = \frac{Ec}{T}$$

bestimmt, wo ϱ der kleinste Krümmungshalbmesser der neutralen Axenschicht ist. Wenn folglich $z < \frac{1}{2}l$ ist, wird an dieser Grenze:

$$\tfrac{1}{12}pl^2 + Q \cdot \frac{z(l-z)^2}{l^2} = \frac{T \cdot \varepsilon}{E \cdot c},$$

und wenn $z > \frac{1}{2}l$, durch die Gleichung:

$$\tfrac{1}{12}pl^2 + Q \cdot \frac{z^2(l-z)}{l^2} = \frac{T \cdot \varepsilon}{E \cdot c}.$$

Diese beiden Gleichungen können durch eine einzige ausgedrückt werden, nämlich, wenn man durch k den Abstand der Last Q von dem nächsten eingemauerten Endpunkte, durch h den Abstand von dem entfernteren bezeichnet:

$$\tfrac{1}{12}pl^2 + Q \cdot \frac{kh^2}{l} = \frac{T \cdot \varepsilon}{E \cdot c}.$$

§. 178.

Setzen wir $Q = o$, so dass der Körper nur durch die gleichförmige Belastung gebogen ist (Fig. 83). Es wird alsdann die Gleichung der neutralen Axenschicht:

$$y = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{x^2(l-x)^2}{24}.$$

Der tiefste Punkt wird in der Mitte C sein, und den Pfeil des Herunterbiegens findet man, indem man in dieser Gleichung $x = \frac{1}{2}l$ setzt:

$$f = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{l^4}{384},$$

folglich nur $\frac{1}{5}$ des Pfeils, wenn der Balken in beiden Endpunkten nur unterstüzt wäre.

Die Ordinaten der Wendepunkte W_1 und W_2 werden:

$$x_1 = \tfrac{1}{6} l \,(3 - \sqrt{3}),$$

$$x_2 = \tfrac{1}{6} l \,(3 + \sqrt{3}).$$

Der Krümmungshalbmesser wird am kleinsten in beiden Endpunkten A und B, und hier gleich:

$$\varrho = \frac{12\varepsilon}{p l^2},$$

und die grösste Belastung innerhalb der Elasticitätsgrenze wird durch die Gleichung:

$$p = \frac{12\,T \,.\, \varepsilon}{E l^2 \,.\, c}$$

bestimmt. Die gleichförmige Belastung kann folglich um die Hälfte grösser sein, als wenn der Balken an beiden Enden nur frei aufgelegt ist.

Die Länge der neutralen Axenschicht zwischen den beiden eingemauerten Enden wird:

$$s = \int_0^l \sqrt{1 + (d_x y)^2}\; dx = \int_0^l \left(1 + \tfrac{1}{2} (d_x y)^2\right) dx.$$

Es ist jetzt:

$$d_x y = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{l^2 x - 3 l x^2 + 2 x^3}{12}.$$

Substituirt man diesen Werth und integrirt, so findet man:

$$s = l + \frac{p^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{l^7}{60480},$$

und hieraus wieder:

$$l = s - \frac{p^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{s^7}{60480},$$

durch welche Gleichungen die Länge des Balkens zwischen beiden

Mauern und der Abstand der Mauern gegenseitig durch einander bestimmt werden, so dass keine Längenausdehnung der neutralen Axenschicht stattfindet.

§. 179.

Es sei ein prismatischer Balken in mehr als zwei Punkten horizontal unterstützt. Wenn der Balken absolut unbiegsam wäre, so würde nach §. 26 der Druck auf jeden Unterstützungspunkt zwischen gewissen Grenzen unbestimmt sein. Ist dagegen der Körper elastisch, so kann der Druck auf jeden Unterstützungspunkt immer bestimmt werden.

Betrachten wir, um hier nur ein einfaches Beispiel anzugeben (Fig. 84), einen prismatischen Körper, an vier in gleichem Abstand gelegenen Punkten unterstützt und nur von einer gleichmässigen Belastung gebogen. Es sei die Entfernung der Unterstützungspunkte gleich l, und die Belastung auf jeder Längeneinheit gleich p. Bezeichnen wir durch Π, Π', Π'' und Π''' die Druckkräfte respective in A, B, C und D. Diese müssen dann nach §. 26 die Bedingungen erfüllen, dass ihre Summe gleich der ganzen Belastung ist, und die Summe ihrer Momente in Bezug auf einen beliebigen Punkt, z. B. C, gleich dem Momente der ganzen Belastung in Bezug auf denselben Punkt. Man hat demnach die zwei folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\Pi + \Pi' + \Pi'' + \Pi''' = 3pl,$$
$$2\Pi + \Pi' - \Pi''' = \tfrac{3}{2}pl.$$

Betrachten wir jetzt die Form der neutralen Axenschicht. Nehmen wir B als Anfangspunkt der Coordinaten an, und bezeichnen wir durch φ den Winkel, welchen die Tangente mit der horizontalen Abscissenaxe bildet, und zwar so, dass wir diesen Winkel als positiv, wenn die Tangente an der linken Seite nach unten gekehrt ist, als negativ betrachten, wenn sie an dieser Seite nach oben gekehrt sein sollte.

Die Gleichung des Bogens AB ist alsdann:

$$\varepsilon d_x^2 y = \tfrac{1}{2}p(l-x)^2 - \Pi(l-x),$$

$$\varepsilon d_x y = p\left(\frac{l^2x}{2} - \frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \Pi\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + \varepsilon \operatorname{tang}\omega,$$

$$y = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{l^2x^2}{4} - \frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{\Pi}{\varepsilon}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + x \operatorname{tang}\omega.$$

Es soll hier $y = o$ sein, wenn $x = l$, was die Bedingungsgleichung

$$o = \frac{pl^4}{8} - \frac{\Pi l^3}{3} + l\varepsilon \operatorname{tang}\omega$$

giebt, oder:

$$\Pi - \frac{3\varepsilon \operatorname{tang}\omega}{l^2} = \tfrac{3}{8}pl.$$

Die Gleichung des Bogens BC wird:

$$\varepsilon d_x^2 y = \tfrac{1}{2}p(2l-x)^2 - \Pi''(l-x) - \Pi'''(2l-x),$$

$$\varepsilon d_x y = p\left(2l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{6}\right) - \Pi''\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$- \Pi'''\left(2lx - \frac{x^2}{2}\right) - \varepsilon \operatorname{tang}\omega,$$

$$y = \frac{p}{\varepsilon}\left(l^2x^2 - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{\Pi''}{\varepsilon}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

$$- \frac{\Pi'''}{\varepsilon}\left(lx^2 - \frac{x^3}{6}\right) - x \operatorname{tang}\omega.$$

Setzt man hier $x = l$, so wird $y = o$, und man erhält folglich:

$$o = \tfrac{17}{24}pl^4 - \tfrac{1}{3}\Pi''l^3 - \tfrac{5}{6}\Pi'''l^3 - l\varepsilon \operatorname{tang}\omega,$$

und hieraus:

$$2\Pi'' + 5\Pi''' + \frac{6\varepsilon \operatorname{tang}\omega}{l^2} = \tfrac{17}{4}pl.$$

Es wird endlich die Differentialgleichung des Bogens CD:

$$\varepsilon d_x^2 y = \tfrac{1}{2}p(2l-x)^2 - \Pi'''(2l-x).$$

Man muss hier so integriren, dass, wenn $x = l$, $\varepsilon d_x y$ und y denselben Werth wie in dem Bogen BC erhalten, nämlich dass:

$$\varepsilon d_x y = \tfrac{7}{6}pl^3 - \tfrac{1}{2}\Pi''l^2 - \tfrac{3}{2}\Pi'''l^2 - \varepsilon \operatorname{tang}\omega,$$

und $y = o$ wird. Man erhält dann:

$$\varepsilon d_x y = p\left(2l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{6}\right) - \Pi''\frac{l^2}{2}$$
$$-\Pi'''\left(2lx - \frac{x^2}{2}\right) - \varepsilon \operatorname{tang}\omega,$$

$$y = \frac{p}{\varepsilon}\left(l^2x^2 - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{\Pi''}{\varepsilon}\left(\frac{l^3}{6} - \frac{l^2x}{2}\right)$$
$$-\frac{\Pi'''}{\varepsilon}\left(lx^2 - \frac{x^3}{6}\right) - x \operatorname{tang}\omega.$$

Setzt man hier $x = 2l$, so soll $y = o$ sein, was die folgende Bedingungsgleichung giebt:

$$o = 2pl^4 - \tfrac{5}{6}\Pi''l^3 - \tfrac{8}{3}\Pi'''l^3 - 2l\varepsilon \operatorname{tang}\omega,$$

oder:

$$5\Pi'' + 16\Pi''' + \frac{12\,\varepsilon \operatorname{tang}\omega}{l^2} = 12pl.$$

Um die fünf unbekannten Grössen, Π, Π', Π'', Π''' und $\operatorname{tang}\omega$ zu bestimmen, hat man also die folgenden fünf Gleichungen:

$$\Pi + \Pi' + \Pi'' + \Pi''' = 3pl,$$
$$2\Pi + \Pi' - \Pi''' = \tfrac{3}{2}pl,$$
$$\Pi - \frac{3\varepsilon \operatorname{tang}\omega}{l^2} = \tfrac{3}{8}pl,$$
$$2\Pi'' + 5\Pi''' + \frac{6\varepsilon \operatorname{tang}\omega}{l^2} = \tfrac{17}{4}pl,$$
$$5\Pi'' + 16\Pi''' + \frac{12\varepsilon \operatorname{tang}\omega}{l^2} = 12pl,$$

Hieraus findet man dann leicht:

$$\operatorname{tang}\omega = \tfrac{1}{120}\frac{pl^3}{\varepsilon},$$
$$\Pi = \Pi''' = \tfrac{2}{5}pl,\ \Pi' = \Pi'' = \tfrac{11}{10}pl,$$

durch welche letzten Gleichungen die bei unbiegsamen Körpern unbestimmten Druckkräfte auf die Unterlagen hier bei einem elastischen Körper bestimmt sind. Substituirt man diese Werthe, so erhält man die Gleichung des Bogens AB:

$$y = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{l^3x}{120} + \frac{l^2x^2}{20} - \frac{lx^3}{10} + \frac{x^4}{24}\right),$$

die Gleichung des Bogens BC:

$$y = \frac{p}{\varepsilon}\left(-\frac{l^3x}{120} + \frac{l^2x^2}{20} - \frac{lx^3}{12} + \frac{x^4}{24}\right),$$

und die Gleichung des Bogens CD:

$$y = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{11l^4}{60} - \frac{67l^2x}{120} + \frac{3l^2x^2}{5} - \frac{4lx^3}{15} + \frac{x^4}{24}\right).$$

Es ist hier fortwährend B als Anfangspunkt der Coordinaten angesehen. Setzt man in der letzten Gleichung $l + x$ statt x, so erhält man dieselbe Gleichung, wie die des Bogens AB, woraus hervorgeht, dass der Bogen CD genau dieselbe Form wie der Bogen AB hat, welches man auch vorher wissen konnte, da der Balken symmetrisch von beiden Endpunkten an unterstützt ist.

Die Abscisse des tiefsten Punktes des Bogens AB wird gefunden durch die Gleichung $d_x y = o$, oder:

$$x^3 - \tfrac{9}{5}lx^2 + \tfrac{3}{5}l^2x + \tfrac{1}{20}l^3 = o.$$

Diese Gleichung hat drei reelle Wurzeln, nämlich wenn $\cos a = \frac{11}{64}$ gesetzt wird:

$$x_1 = \tfrac{3}{5}l + \tfrac{8}{10}l\cos\frac{a}{3},$$

$$x_2 = \tfrac{3}{5}l + \tfrac{8}{10}l\cos\left(\frac{\pi - a}{3}\right),$$

$$x_3 = \tfrac{3}{5}l + \tfrac{8}{10}l\cos\left(\frac{\pi + a}{3}\right),$$

wovon nur der letzte zwischen o und l liegt, und gleich

$$x = 0{,}5493\,l$$

ist. Die dieser Abscisse entsprechende Ordinate oder der Pfeil des Bogens AB wird:

$$f_1 = 0{,}00688\frac{pl^4}{\varepsilon}.$$

Die Abscisse des tiefsten Punktes des Bogens BC wird $x = \frac{1}{2}l$, und es wird der Pfeil dieses Bogens:

$$f_2 = \tfrac{1}{1920}\cdot\frac{pl^4}{\varepsilon} = 0{,}000521\,.\,\frac{pl^4}{\varepsilon}.$$

Der Pfeil des Bogens CD wird gleich demjenigen des Bogens AB.

Der Krümmungshalbmesser des Bogens AB ist:

$$\varrho = \frac{\pm \varepsilon}{\frac{1}{2}p(l-x)^2 - \Pi(l-x)} = \frac{\pm 10\,\varepsilon}{p(l-x)(l-5x)}.$$

Es geht hieraus hervor, dass der Bogen AB einen Wendepunkt in W_1 hat, dessen Abscisse BT_1 gleich $\frac{1}{5}l$ ist. Der Krümmungshalbmesser des Bogens AW_1 wird dann am kleinsten im Punkte M, dessen Abscisse $BK = \frac{3}{5}l$ ist, und es wird hier der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho_1 = \frac{25\varepsilon}{2pl^2}.$$

Der Krümmungshalbmesser des Bogens W_1B wird am kleinsten in B, wo $x = o$, und er wird hier:

$$\varrho_2 = \frac{10\varepsilon}{pl^2}.$$

In dem Bogen BC wird der Krümmungshalbmesser:

$$\varrho = \frac{\pm \varepsilon}{\frac{1}{2}p(2l-x)^2 - \Pi''(l+x) - \Pi'''(2l-x)}$$

$$= \frac{\pm \varepsilon}{\frac{1}{2}p(x^2 - lx + \frac{1}{5}l^2)}.$$

Dieser Werth wird unendlich gross und BC hat folglich einen Wendepunkt:

in W_2, wenn:

$$x = BP_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}.\,l,$$

in W_3, wenn:

$$x = BP_3 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}.\,l.$$

Der Krümmungshalbmesser des Bogens BW_2 wird ein Minimum in B, und hier gleich ϱ_2. Derjenige des Bogens W_2W_3 wird ein Minimum in der Mitte, in M_2, wenn $BP_2 = \frac{1}{2}l$, und er wird hier gleich:

$$\varrho_3 = \frac{40\varepsilon}{pl^2}.$$

Der Krümmungshalbmesser des Bogens W_3C wird am kleinsten in C und gleich ϱ_2. In dem Bogen CD werden endlich die Krümmungshalbmesser gleich denjenigen des Bogens AB.

Unter diesen drei Minima der Krümmungshalbmesser ist ϱ_2 das kleinste. Der Balken wird folglich zuerst in den mittleren Unterstützungspunkten B und C brechen.

An der Elasticitätsgrenze wird:

$$\varrho_2 = \frac{10\varepsilon}{pl^2} = \frac{Ec}{T},$$

woraus:

$$p = \frac{10.T.\varepsilon}{El^2c},$$

oder die gleichförmige Belastung kann, wenn der Balken auf die hier betrachtete Weise unterstützt ist, $11\frac{1}{4}$ Mal so gross sein, als wäre derselbe Balken nur an den beiden Enden A und D unterstüzt.

Um die Länge der ganzen neutralen Axenschicht zu finden, muss man besonders die Längen der Bogen AB, BC und CD suchen. Es ist alsdann:

$$AB = \int_0^l \sqrt{(1 + (d_xy)^2)}\, dx = \int_0^l \left(1 + \tfrac{1}{2}(d_xy)^2\right) dx.$$

Nun ist hier:

$$d_xy = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{l^3}{120} + \frac{l^2x}{10} - \frac{3lx^2}{10} + \frac{x^3}{6}\right),$$

substituirt man diesen Werth und integrirt, so findet man:

$$AB = l + \frac{p^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{117\, l^7}{1008000}.$$

In Bezug auf den Bogen BC ist:

$$d_xy = \frac{p}{\varepsilon}\left(-\frac{l^3}{120} + \frac{l^2x}{10} - \frac{lx^2}{4} + \frac{x^3}{6}\right),$$

woraus:

$$BC = l + \frac{p^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{l^7}{200600}.$$

Der Bogen CD wird gleich AB. Die ganze Länge der neutralen Axenschicht wird folglich:

$$ABCD = s = 3l + \frac{p^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{239 l^7}{1008000},$$

woraus wieder:

$$3l = s - \frac{p^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{239 l^7}{1008000}.$$

§. 180.

Es sei ferner wieder der prismatische Körper an einem Ende fest eingemauert und am freien Ende von einer Kraft gebogen, die jetzt aber nicht senkrecht auf der Tangente des befestigten Endes sei. Decomponiren wir alsdann diese Kraft P in zwei Kräfte X und Y, von denen die erstere parallel mit jener Tangente, die zweite senkrecht auf derselben ist. Ausser der durch die Biegung des Körpers hervorgerufenen Ausdehnung der convexen und Zusammendrückung der concaven Seite des Balkens wird dieser noch durch die Kraft X ausgedehnt oder zusammengedrückt werden. Die neutrale Axenschicht, deren Molekülen ihren Abstand nicht geändert haben, wird dann nicht länger durch die Schwerpunkte aller senkrechten Querschnitte gehen; ja, es kann sein, dass gar keine neutrale Axenschicht im Körper mehr stattfindet. Dagegen wird fortwährend der Molekülarabstand der durch die Schwerpunkte der Querschnitte gehenden cylindrischen Schicht durch die Biegung nicht verändert sein, sondern nur durch die Ausdehnung oder das Zusammendrücken der Kraft X. Die Schicht wird dann hier die mittlere Axenschicht des Körpers genannt.

Nehmen wir fortwährend diese Kraft P als vertical an; der Körper sei aber nicht horizontal, sondern schräg eingemauert. Es sind alsdann zwei Fälle besonders zu untersuchen, wenn der Körper schräg aufwärts, und wenn er schräg nach unten befestigt ist.

Wir werden zunächst den ersten Fall betrachten. Es sei (Fig. 85) ω der Winkel, welchen die Tangente am festen Ende mit dem Horizonte bildet. Man nehme diese Tangente als Abscissenaxe an, und darauf senkrecht die Ordinaten. Es seien $AB = a$, und $BC = f$ die Abscisse und Ordinate des freien Endes; $AP = x$ und $PM = y$ die Coordinaten irgend eines Punktes der mittleren Axenschicht; $X = P \sin \omega$ und $Y = P \cos \omega$ die Componenten der Kraft P längs der beiden Coordinatenaxen, ε das Biegungsmoment des prismatischen Körpers. Die Differentialgleichung des Gleichgewichts wird alsdann:

$$\varepsilon d_x{}^2 y = Y(a - x) + X(f - y).$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$y = f + A \sin\left((x + B)\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right) + \frac{Y}{X}(a - x),$$

woraus man wieder findet:

$$d_x y = A\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}} \cos\left((x + B)\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right) - \frac{Y}{X}.$$

Hier sind A und B zwei unbestimmte Constanten, welche, sowie der Pfeil der Biegung f, dadurch bestimmt werden, dass, wenn $x = o$, auch $y = o$ und $d_x y = o$, und dass, wenn $x = a$, $y = f$ ist. Man erhält hierdurch die drei Gleichungen:

$$o = f + A \sin\left(B\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right) + \frac{Y}{X} a,$$

$$o = A\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}} \cos\left(B\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right) - \frac{Y}{X},$$

$$f = f + A \sin\left((a + B)\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right).$$

Aus der letzten Gleichung findet man:

$$(a + B)\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}} = n\pi,$$

und folglich:

$$\sin\left(B\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right) = \pm \sin\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right),$$

$$\cos\left(B\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right) = \mp \cos\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right).$$

Substituirt man diese Werthe in die beiden ersten der obigen Gleichungen, so erhält man:

$$A = \mp \frac{Y}{X\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\cos\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)},$$

$$f = \frac{Y}{X}\left(\frac{\operatorname{tang}\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)}{\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - a\right).$$

Substituirt man die so gefundenen Werthe von A, B und f, so erhält man:

$$y = \frac{Y}{X\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}\left\{\frac{\sin\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right) - \sin\left((a-x)\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)}{\cos\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)} - x\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right\},$$

als die Gleichung der mittleren Axenschicht. Bezeichnet man wie vorher durch φ den Winkel, welchen die Tangente am freien Ende mit derjenigen am eingemauerten Ende bildet, so wird:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{Y}{X\cos\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)} - \frac{Y}{X}$$

$$= \frac{Y}{X}\cdot\frac{1-\cos\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)}{\cos\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)}.$$

Die Länge der gebogenen mittleren Axenschicht findet man durch die Formel:

$$\int_0^a \left(1 + \tfrac{1}{2}(d_x y)^2\right) dx$$

$$= a + \frac{aY^2}{2X^2}\left\{\frac{1}{2\cos^2\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)} - \frac{3\,\mathrm{tang}\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)}{2a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + 1\right\}.$$

Da die mittlere Axenschicht durch die Kraft X zusammengedrückt ist, so wird folglich ihre ursprüngliche Länge s gefunden, wenn man zu dem obigen Ausdruck die durch X hervorgebrachte Verkürzung

$$\frac{s\,.\,X}{E\,.\,F},$$

oder, was davon sehr wenig verschieden ist,

$$\frac{a\,.\,X}{E\,.\,F}$$

addirt, wo F den Flächeninhalt des Querschnittes bezeichnet. Man hat folglich:

$$s = a + \frac{aY^2}{2X^2}\left\{\frac{1}{2\cos^2\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)} - \frac{3\,\mathrm{tang}\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)}{2a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + 1\right\} + \frac{aX}{EF}.$$

Hieraus erhält man wieder annäherungsweise, weil die Biegung als klein vorausgesetzt ist:

$$a = s - \frac{sY^2}{2X^2}\left\{\frac{1}{2\cos^2\left(s\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)} - \frac{3\,\mathrm{tang}\left(s\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)}{2s\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + 1\right\} + \frac{sX}{EF}.$$

Der Krümmungshalbmesser der mittleren Axenschicht wird:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{Y(a-x) + X(f-y)}.$$

Dieser Werth wird am kleinsten, wenn x und y = o sind. Der Körper ist folglich am stärksten am eingemauerten Ende gebogen, und es wird hier:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{Ya + Xf},$$

oder, wenn man den Werth von f substituirt,

$$\varrho = \frac{\varepsilon\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}{Y \operatorname{tang}\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)} = \frac{\sqrt{X\varepsilon}}{Y \operatorname{tang}\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)}.$$

Bezeichnen wir wie vorher durch c die Entfernung von der mittleren Axenschicht der am meisten entfernten Faser der convexen Seite, durch c′ die Entfernung derjenigen der concaven Seite, und bemerken, dass ausser der durch die Biegung hervorgebrachten Ausdehnung oder Zusammendrückung der Fasern diese alle noch durch die Kraft X zusammengedrückt sind, so findet man hier die Verlängerung der äussersten Fasern der convexen Seite für die Längeneinheit gleich:

$$\frac{cY \operatorname{tang}\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)}{\sqrt{X\varepsilon}} - \frac{X}{EF} = P\left\{\frac{c \,.\, \cos\omega \,.\, \operatorname{tang}\left(a\sqrt{\frac{P\sin\omega}{\varepsilon}}\right)}{\sqrt{\varepsilon P \sin\omega}} - \frac{\sin\omega}{EF}\right\}.$$

Wird dieser Ausdruck negativ, so bezeichnet dies, dass hier eine Zusammendrückung statt einer Ausdehnung stattfindet.

Die Zusammendrückung der äussersten Fasern der concaven Seite wird für die Längeneinheit gleich:

$$\frac{c'Y \operatorname{tang}\left(a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\right)}{\sqrt{X\varepsilon}} + \frac{X}{EF} = P\left\{\frac{c' \,.\, \cos\omega \,.\, \operatorname{tang}\left(a\sqrt{\frac{P\sin\omega}{\varepsilon}}\right)}{\sqrt{\varepsilon P \sin\omega}} - \frac{\sin\omega}{EF}\right\}.$$

Bezeichnet man jetzt wie vorher durch T_a den absoluten, durch T_r den rückwirkenden Tragfähigkeitscoefficienten, so ist an der Elasticitätsgrenze auf der convexen Seite:

$$\frac{T_a}{E} = P\left\{\frac{c \,.\, \cos\omega \,.\, \operatorname{tang}\left(a\sqrt{\frac{P\sin\omega}{\varepsilon}}\right)}{\sqrt{\varepsilon P \sin\omega}} - \frac{\sin\omega}{EF}\right\},$$

und auf der concaven Seite:

$$\frac{T_r}{E} = P\left\{\frac{c'.\cos\omega.\tang\left(a\sqrt{\frac{P\sin\omega}{\varepsilon}}\right)}{\sqrt{\varepsilon P\sin\omega}} - \frac{\sin\omega}{EF}\right\}.$$

Der kleinste Werth von P, welcher aus diesen Gleichungen erhalten wird, darf dann nicht überschritten werden.

§. 181.

Es sei jetzt die Richtung des eingemauerten prismatischen Körpers schräg nach unten (Fig. 86). Man hat alsdann, wenn die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen fortwährend angewandt werden:

$$\varepsilon d_x{}^2 y = Y(a - x) - X(f - y).$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$y = f - Ae^{(a-x)\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - Be^{-(a-x)\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - \frac{Y}{X}(a - x),$$

wo e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet. Hieraus findet man dann:

$$d_x y = A\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\,e^{(a-x)\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - Be^{-(a-x)\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + \frac{Y}{X}.$$

Es sind hier A, B und f drei unbestimmte Constanten, welche dadurch bestimmt werden, dass, wenn $x = o$, auch $y = o$ und $d_x y = o$ ist, und dass, wenn $x = a$, $y = f$ wird. Man hat folglich:

$$o = f - Ae^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - Be^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - \frac{Y}{X}a,$$

$$o = A\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\,e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - Be^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + \frac{Y}{X},$$

$$f = f - A - B.$$

Es folgt hieraus:

$$B = -A = \frac{Y}{X\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\left(e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}\right)},$$

$$f = \frac{Y}{X}\,a - \frac{Y}{X\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} \cdot \frac{e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}}{e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}}.$$

Diese Werthe substituirt geben die Gleichungen der mittleren Axenschicht:

$$y = \frac{Y}{X}\left\{x + \frac{\left(e^{(a-x)\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - e^{-(a-x)\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}\right) - \left(e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}\right)}{\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}\left(e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}\right)}\right\}.$$

Man findet ferner den Winkel, welchen die Tangente am freien Endpunkte mit derjenigen am eingemauerten bildet:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{Y}{X}\left\{1 + \frac{2}{e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}}\right\}.$$

Die Länge der mittleren Axenschicht findet man durch die Formel:

$$\int_0^a \left(1 + \tfrac{1}{2}(d_x y)^2\right) dx =$$

$$a + \frac{aY^2}{X^2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{3}{4a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} \cdot \frac{e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}}{e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}} + \frac{1}{\left(e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}\right)^2}\right\}.$$

Diese mittlere Axenschicht ist durch die Kraft X ausgedehnt, und um ihre ursprüngliche Länge zu finden, muss man folglich von dem obigen Werthe $\frac{aX}{EF}$ subtrahiren. Man hat folglich die ursprüngliche Länge des prismatischen Körpers:

$$s = a + \frac{aY^2}{X^2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{3}{4a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}\cdot\frac{e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}}{e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}} + \frac{1}{\left(e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}\right)^2}\right\} - \frac{aX}{EF},$$

woraus man wieder annäherungsweise findet:

$$a = s - \frac{sY^2}{X^2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{3}{4s\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}\cdot\frac{e^{s\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - e^{-s\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}}{e^{s\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + e^{-s\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}} + \frac{1}{\left(e^{s\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + e^{-s\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}\right)^2}\right\} + \frac{sX}{EF}.$$

Der Krümmungshalbmesser der mittleren Axenschicht wird:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{Y(a-x) - X(f-y)},$$

oder, wenn man die Werthe von f und y substituirt.

$$\varrho = \frac{\sqrt{X\varepsilon}}{Y}\cdot\frac{e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}}{e^{(a-x)\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - e^{-(a-x)\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}}.$$

Dieser Werth wird am kleinsten, wenn $x = o$, und der Körper wird folglich am eingemauerten Ende am stärksten gebogen. Es wird hier:

$$\varrho = \frac{\sqrt{X\varepsilon}}{Y}\cdot\frac{e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}}{e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}}.$$

Ausser der durch die Biegung hervorgerufenen Ausdehnung oder Zusammendrückung der Fasern werden noch alle durch die Kraft X ausgedehnt werden. Bezeichnet man wie vorher durch c die Entfernung von der mittleren Axenschicht der am meisten entfernten Faser der convexen Seite, durch c′ die derjenigen der con-

caven Seite, so wird die Verlängerung dieser Faser auf der convexen Seite für die Längeneinheit:

$$\frac{c'Y}{\sqrt{X\varepsilon}} \cdot \frac{e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}}{e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}} + \frac{X}{EF},$$

und die Zusammendrückung der äussersten Faser der concaven Seite wird für die Längeneinheit:

$$\frac{cY}{\sqrt{X\varepsilon}} \cdot \frac{e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} - e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}}{e^{a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{X}{\varepsilon}}}} - \frac{X}{EF}.$$

Wird dieser letzte Ausdruck negativ, so bezeichnet dies, dass auch hier eine Ausdehnung stattfindet.

An der Elasticitätsgrenze der convexen Seite wird man dann, wenn man in dem obigen Ausdrucke statt X und Y, $P \sin \omega$ und $P \cos \omega$ substituirt, erhalten:

$$\frac{T_a}{E} = P\left\{\frac{c \cdot \cos\omega}{\sqrt{\varepsilon P \sin\omega}} \cdot \frac{e^{a\sqrt{\frac{P \sin\omega}{\varepsilon}}} - e^{-a\sqrt{\frac{P \sin\omega}{\varepsilon}}}}{e^{a\sqrt{\frac{P \sin\omega}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{P \sin\omega}{\varepsilon}}}} + \frac{\sin\omega}{EF}\right\}.$$

An der Elasticitätsgrenze der concaven Seite wird ebenso:

$$\frac{T_r}{E} = P\left\{\frac{c' \cdot \cos\omega}{\sqrt{\varepsilon P \sin\omega}} \cdot \frac{e^{a\sqrt{\frac{P \sin\omega}{\varepsilon}}} - e^{-a\sqrt{\frac{P \sin\omega}{\varepsilon}}}}{e^{a\sqrt{\frac{P \sin\omega}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{P \sin\omega}{\varepsilon}}}} + \frac{\sin\omega}{EF}\right\}.$$

Der kleinste Werth von P, welcher diesen Gleichungen genügt, darf dann nicht überschritten werden.

§. 182.

Wenn die Last P sehr klein in Bezug auf das Biegungsmoment ε ist, was gewöhnlich der Fall ist, so kann man die trigonometrischen und exponentiellen Functionen der For-

meln der beiden letzten Paragraphen in Reihen entwickeln und die höheren Potenzen von $\frac{P}{\varepsilon}$ vernachlässigen. Man wird dann als die Gleichung der mittleren Axenschicht der in den beiden vorigen Paragraphen betrachteten Fälle finden:

$$y = \frac{P \cos \omega}{\varepsilon}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right),$$

und ferner:

$$f = \frac{P \cos \omega}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3},$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{P \cos \omega}{\varepsilon} \cdot \frac{a^2}{2},$$

$$a = s - \frac{P^2 \cos^2 \omega}{\varepsilon^2} \cdot \frac{s^5}{15} \mp \frac{P \,.\, \sin \omega \,.\, s}{EF},$$

wo in der letzten Gleichung das obere Zeichen anzuwenden ist, wenn der Körper schräg nach oben, das untere, wenn er schräg nach unten eingemauert ist. An der Elasticitätsgrenze der convexen Seite wird ferner:

$$\frac{T_a}{E} = P\left(\frac{ca \cos \omega}{\varepsilon} \mp \frac{\sin \omega}{EF}\right),$$

und an der Elasticitätsgrenze der concaven Seite:

$$\frac{T_r}{E} = P\left(\frac{ca \cos \omega}{\varepsilon} \pm \frac{\sin \omega}{EF}\right).$$

Hieraus findet man dann wieder:

$$P = \frac{\varepsilon \,.\, T_a \,.\, F}{ca\, EF \cos \omega \mp \varepsilon \sin \omega},$$

oder:

$$P = \frac{\varepsilon \,.\, T_r \,.\, F}{ca\, EF \cos \omega \pm \varepsilon \sin \omega},$$

wo c in der ersten Formel den grössten Abstand einer Faser der convexen Seite, in der letzten Formel denjenigen einer Faser der concaven Seite von der mittleren Axenschicht bezeichnet. Der kleinste der beiden auf solche Weise gefundenen Werthe der Last P darf dann nicht überschritten werden.

Nimmt man in einem neuen Coordinatensystem die horizontale Linie AB′ (Fig. 85 und 86) als Abscissenaxe an und die Ordinaten senkrecht darauf, folglich:

$$AP' = x',\ P'M = y',$$

so wird:

$$y = y' \cos \omega \pm x' \sin \omega,$$

und folglich:

$$y' = \frac{y}{\cos \omega} \mp x' \operatorname{tang} \omega,$$

oder, wenn man den Werth von y substituirt:

$$y' = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \mp x' \operatorname{tang} \omega.$$

Wenn der Winkel ω sehr klein ist, so wird auch y′ immer sehr klein. Man kann alsdann die mit der als klein angenommenen Grösse $\frac{P}{\varepsilon}$ multiplicirte Grösse

$$\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

in die davon nur wenig verschiedene Grösse

$$\frac{a'x'^2}{2} - \frac{x'^3}{6}$$

ändern, wo a′ die neue Abscisse des freien Endes bezeichnet. Man erhält dann in dem neuen Coordinatensystem:

$$y' = \frac{P}{\varepsilon} \left(\frac{a'x'^2}{2} - \frac{x'^3}{6}\right) \mp x' \operatorname{tang} \omega,$$

was mit der im §. 170 auf andere Weise gefundenen Formel übereinstimmt.

§. 183.

Wir wollen fortwährend den prismatischen Körper als an einem Ende fest eingemauert annehmen, so aber, dass die Tangente an diesem Ende vertical aufwärts gerichtet und der Körper am oberen freien Ende durch ein Gewicht P gebogen ist (Fig. 87). Es kommt dies darauf hinaus, im §. 169 den Winkel ω gleich 90° anzunehmen. Man hat alsdann die Differentialgleichung:

$$\varepsilon d_x^2 y = P(f - y),$$

wo f die Abweichung BC des oberen freien Punktes C bezeichnet. Das vollständige Integral dieser Gleichung ist:

$$y = f + A \sin\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right) + B \cos\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right).$$

Hieraus erhält man dann ferner:

$$d_x y = A\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} \cdot \cos\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right) - B\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} \cdot \sin\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right).$$

Die Constanten A und B müssen hier so bestimmt werden, dass, wenn $x = o$, auch $y = o$ und $d_x y = o$ ist. Man erhält dann hieraus:

$$o = f + B,\ o = A\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}},$$

woraus:

$$A = o,\ B = - f.$$

Substituirt man diese Werthe, so findet man die Gleichung der mittleren Axenschicht:

$$y = f\left(1 - \cos\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right)\right).$$

Differentiirt man diese Gleichung, so findet man:

$$d_x y = f\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} \cdot \sin\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right).$$

Wenn in der Gleichung der mittleren Axenschicht $x = a$ gesetzt wird, so soll $y = f$ sein. Dies giebt die Bedingungsgleichung:

$$\cos\left(a\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right) = o,$$

woraus:

$$a\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} = \frac{(2n + 1)\pi}{2},$$

oder:

$$a = \frac{(2n + 1)\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}}$$

und

$$P = \frac{(2n + 1)^2 \pi^2 \varepsilon}{4a^2},$$

wo n irgend eine ganze positive Zahl oder Null bezeichnet. Bezeichnet man wie vorher durch φ den Winkel, welchen die Tangente am freien Endpunkte mit der verticalen Abscissenaxe bildet, so findet man, wenn man in dem obigen Werthe des Differentialcoefficienten $d_x y$, $x = a$ setzt:

$$\operatorname{tang}\varphi = f\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\sin\left(a\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right) = \pm f\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} = \pm\frac{(2n+1)\pi}{2}\cdot\frac{f}{a},$$

wo das obere Zeichen anzunehmen ist, wenn n eine gerade, das untere, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Die Länge der mittleren Axenschicht wird:

$$\int_0^a\left(1 + \tfrac{1}{2}(d_x y)^2\right)dx = a + \frac{f^2 P}{2\varepsilon}\int_0^a \sin^2\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right)dx$$

$$= a + \frac{f^2}{2}\cdot\frac{P}{\varepsilon}\left(\frac{a}{2} - \frac{\sin\left(2a\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right)}{4\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}}\right)$$

$$= a + \frac{f^2 a}{4}\cdot\frac{P}{\varepsilon} = a\left(1 + \frac{f^2}{4}\cdot\frac{P}{\varepsilon}\right).$$

Da die mittlere Axenschicht durch die Kraft P zusammengedrückt ist, so findet man die ursprüngliche Länge s des prismatischen Körpers, wenn man zu dem obigen Ausdrucke die hierdurch hervorgebrachte Verkürzung

$$\frac{sP}{EF}$$

addirt, wo F fortwährend den Flächeninhalt des Querschnittes bezeichnet. Man findet folglich:

$$s = a\left(1 + \frac{f^2}{4}\cdot\frac{P}{\varepsilon}\right) + \frac{sP}{EF}.$$

Hieraus findet man dann den bisher unbekannten Pfeil der Biegung:

$$f = 2\sqrt{\frac{s - a - \frac{sP}{EF}}{a\frac{P}{\varepsilon}}},$$

oder, wenn man den obigen Werth von a substituirt:

$$f = 2\sqrt{\frac{s - \frac{sP}{EF} - \frac{(2n+1)\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}}}{\frac{(2n+1)\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{2s\,(EF-P)\sqrt{P\varepsilon} - (2n+1)\pi EF\varepsilon}{(2n+1)\,\pi PEF}}.$$

Die Fig. 87 entspricht dem Falle, wenn $n = o$ ist. Es wird alsdann:

$$a = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}},\ \text{tang}\,\varphi = f\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} = \frac{\pi}{\varepsilon}.\frac{f}{a},$$

$$f = \frac{4}{\pi}\sqrt{a\left(s - a - \frac{sP}{EF}\right)} = 2\sqrt{\frac{2s\,(EF-P)\sqrt{P\varepsilon} - \pi EF\varepsilon}{\pi PEF}}.$$

Die Fig. 88 stellt den Fall vor, wenn $n = 1$. Es ist alsdann:

$$a = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}},\ \text{tang}\,\varphi = -f\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} = -\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{f}{a},$$

$$f = \frac{4}{3\pi}\sqrt{a\left(s - a - \frac{sP}{EF}\right)} = 2\sqrt{\frac{2s\,(EF-P)\sqrt{P\varepsilon} - 3\pi EF\varepsilon}{3\pi PEF}}.$$

Wenn $x = AP = \frac{1}{3}a$, so ist $y = PM = f = BC$, und wenn $x = AP' = \frac{2}{3}a$, so ist $y = P'M' = 2f = 2BC$.

Die Fig. 89 stellt den Fall vor, wenn $n = 2$. Es ist alsdann:

$$a = \frac{5\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}},\ \text{tang}\,\varphi = f\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} = \frac{5\pi}{2}\cdot\frac{f}{a},$$

$$f = \frac{4}{5\pi}\sqrt{a\left(s - a - \frac{sP}{EF}\right)} = 2\sqrt{\frac{2s\,(EF-P)\sqrt{P\varepsilon} - 5\pi EF\varepsilon}{5\pi PEF}},$$

Wenn hier $x = AP = \frac{1}{5}a$, so ist $y = PM = f$;
wenn $x = AP' = \frac{2}{5}a$, so ist $y = P'M' = 2f$;
wenn $x = AP'' = \frac{3}{5}a$, so ist $y = P''M'' = f$;
und wenn $x = AP''' = \frac{4}{5}a$, so ist $y = o$.
Und so fort für die folgenden Werthe von n.

Der Krümmungshalbmesser der mittleren Axenschicht wird:

$$\varrho = \frac{\pm\varepsilon}{Pf\cos\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right)}.$$

Dieser Ausdruck wird, ausser im Endpunkte oder wenn $x = a$, noch unendlich werden und die mittlere Axenschicht folglich einen Wendepunkt haben, wenn

$$\cos\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right) = o$$

ist, woraus:

$$x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} = \frac{(2m + 1)\pi}{2}, \quad x = \frac{(2m + 1)\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{P}},$$

wo m eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnet, nur dass immer $x < a$, folglich $2m + 1 < 2n + 1$, oder $m < n$ ist. In dem Falle (Fig. 87), wenn $n = o$, wird folglich kein Wendepunkt stattfinden. In dem Falle (Fig. 88), wenn $n = 1$, wird dagegen ein Wendepunkt stattfinden, wenn $m = o$, folglich

$$x = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}} = \tfrac{1}{3}a,$$

ist, oder im Punkte M. In dem Falle (Fig. 89), wenn $n = 2$, werden zwei Wendepunkte stattfinden, nämlich erstens wenn $m = o$, folglich

$$x = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}} = \tfrac{1}{5}a,$$

oder im Punkte M, und zweitens wenn $m = 1$, folglich

$$x = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}} = \tfrac{3}{5}a,$$

oder im Punkte M″. Es wird überhaupt in jedem Punkte der mittleren Axenschicht, dessen Ordinate gleich derjenigen des freien Endpunktes ist, ein Wendepunkt stattfinden, weil, wenn $y = f$, auch

$$\cos\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right) = o$$

ist. —

Der Krümmungshalbmesser wird im Falle (Fig. 87) in AC, und in den übrigen Fällen in AM gleich:

$$\varrho = \frac{+\varepsilon}{\text{Pf}\cos\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right)}.$$

Dieser Ausdruck wird, weil hier

$$x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} = \text{oder} < \frac{\pi}{2}$$

ist, ein Minimum, wenn x = o, oder im eingemauerten Endpunkte, und es wird hier:

$$\varrho_1 = \frac{\varepsilon}{\text{Pf}}.$$

In den Fällen Fig. 88 oder Fig. 89 u. s. w. wird der Krümmungshalbmesser der folgenden Bogen vom Wendepunkte M zum Endpunkte C oder zum nächsten Wendepunkte M″, gleich:

$$\varrho = \frac{-\varepsilon}{\text{Pf}\cos\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right)},$$

und es wird dieser Ausdruck, weil hier

$$x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} > \frac{\pi}{2} \text{ und } < \frac{3\pi}{2}$$

ist, ein Minimum, wenn

$$x = \pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}}$$

ist, folglich im Punkte M′, und es wird hier der Krümmungshalbmesser gleich ϱ_1. Ebenso findet man, dass (Fig. 89) in dem Bogen M″C der Krümmungshalbmesser am kleinsten in P″ ist, und hier fortwährend gleich ϱ_1. Der Körper wird folglich gleich stark und am stärksten im eingemauerten Endpunkte A und in der Mitte zwischen je zwei Wendepunkten, oder zwischen dem letzten Wendepunkte und dem freien Endpunkte, gebogen werden, d. h. in jedem Punkte, dessen Ordinate entweder gleich o oder gleich 2f ist.

Bezeichnen wir durch c den Abstand der am meisten entfernten Faser der im Befestigungspunkte A convexen Seite des Körpers von der mittleren Axenschicht, durch c′ denjenigen der

am meisten entfernten Faser der in A concaven Seite. Man findet die Verlängerung der äussersten Fasern der convexen Seite in den Punkten A, P''' u. s. w., deren Ordinaten gleich Null sind, für die Längeneinheit gleich:

$$\frac{cPf}{\varepsilon} - \frac{P}{EF},$$

und in den Punkten M' u. s. w., deren Ordinaten gleich 2f sind, gleich:

$$\frac{c'Pf}{\varepsilon} - \frac{P}{EF}.$$

Das Zusammendrücken der äussersten Fasern der concaven Seite findet man in den Punkten A, P''' u. s. w. für die Längeneinheit gleich:

$$\frac{c'Pf}{\varepsilon} + \frac{P}{EF},$$

und in den Punkten M' u. s. w. gleich:

$$\frac{cPf}{\varepsilon} + \frac{P}{EF}.$$

An der Elasticitätsgrenze der convexen Seite wird folglich in A, P''' u. s. w.:

$$\frac{T_a}{E} = \frac{cPf}{\varepsilon} - \frac{P}{EF},$$

in M' u. s. w.:

$$\frac{T_a}{E} = \frac{c'Pf}{\varepsilon} - \frac{P}{EF}.$$

An der Elasticitätsgrenze der concaven Seite wird in A, P''' u. s. w.:

$$\frac{T_r}{E} = \frac{c'Pf}{\varepsilon} + \frac{P}{EF},$$

und in M' u. s. w.:

$$\frac{T_r}{E} = \frac{cPf}{\varepsilon} + \frac{P}{EF}.$$

Der kleinste der aus diesen Gleichungen gefundenen Werthe von P darf dann nicht überschritten werden.

Unter den verschiedenen Formen (Fig. 87, 88 und 89), welche ein von derselben Kraft P gebogener Körper annehmen kann, giebt die erste (Fig. 72) den kleinsten Werth von a, nämlich:

$$a = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}},$$

woraus wieder:

$$P = \frac{\pi^2\varepsilon}{4a^2}.$$

Da a nothwendigerweise kleiner als s sein muss, so muss folglich, damit diese Biegung stattfinden kann,

$$P > \frac{\pi^2\varepsilon}{4s^2}$$

sein. Ebenso muss, damit die Biegungsform (Fig. 88) stattfinden kann:

$$P > \frac{9\pi^2\varepsilon}{4s^2}$$

sein, und damit die Form (Fig. 89) stattfinden kann:

$$P > \frac{25\pi^2\varepsilon}{4s^2}$$

sein. Die kleinste Last, wodurch der prismatische Körper gebogen werden kann, muss folglich grösser als $\frac{\pi^2\varepsilon}{4s^2}$ sein, und dieser Ausdruck wird wieder den kleinsten Werth haben, wenn die Biegung nach einer solchen Seite angenommen wird, dass das Biegungsmoment ε den möglichst kleinsten Werth erhält. Ueberschreitet P nicht diese äusserste Grenze, kann keine Biegung, sondern nur ein Zusammendrücken stattfinden. Jene Grenze ist, wie man sieht, dem Quadrate der Länge des Körpers umgekehrt proportional.

Die Seite der Biegung und die Form, welche der gebogene Körper annimmt, wird, wenn die Last die gehörige Grösse hat, durch irgend einen auf den Körper wirkenden Stoss bestimmt. Es ist nämlich vorausgesetzt, dass der Körper vollkommen homogen und die Last P symmetrisch in Bezug auf die mittlere

Axenschicht auf dem obersten Ende des Körpers vertheilt ist, und es ist klar, dass alsdann der Körper in seiner ursprünglichen verticalen Lage im Gleichgewicht sein kann und nur zusammengedrückt, nicht gebogen wird. Diese Gleichgewichtslage ist indessen eine unstetige, und wenn der Körper durch irgend eine Ursache, wie einen Stoss, aus dieser Lage gebracht ist, wird er in der so bestimmten Richtung und Form nach den oben entwickelten Gesetzen gebogen. Wenn so z. B. der ursprünglich verticale und zusammengedrückte, aber nicht gebogene Körper, in dem Punkte eines Fünftels seiner Höhe, von dem obersten freien Endpunkte an gerechnet, im Augenblick festgehalten und das obere Ende durch einen schwachen Stoss gebogen wird, so wird der Körper, vorausgesetzt dass die Last die gehörige, oben bestimmte Grösse hat, die Form (Fig. 89) annehmen, und diese Gleichgewichtslage wird dann augenscheinlich eine zwischen gewissen Grenzen stetige sein.

Ist das Biegungsmoment des Körpers viel kleiner nach einer Seite hin, als nach der anderen, so wird der Körper am leichtesten nach dieser Richtung hin gebogen werden. Um die grösste Belastung zu finden, welche ein Körper mit Sicherheit tragen kann, muss dies immer vorausgesetzt werden, und ebenso auch die Biegungsform (Fig. 87), weil diese die stärkste Biegung giebt.

§. 184.

Wir haben im vorigen Paragraphen den Balken im unteren Ende fest eingemauert angenommen. Betrachten wir jetzt den Fall, wenn derselbe nur auf eine horizontale festen Ebene gestützt ist (Fig. 90). Damit Gleichgewicht stattfinden kann, muss das obere belastete Ende sich in derselben verticalen Linie mit dem unterstützten Ende befinden. Die Differentialgleichung der mittleren Axenschicht wird dann:

$$\varepsilon d_x{}^2 y = - Py,$$

deren vollständiges Integral:

$$y = A \sin\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right) + B \cos\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right)$$

ist. Es soll jetzt, wenn $x = o$, auch $y = o$ sein, was die Gleichung $B = o$ giebt. Der grösste Werth von y wird ferner stattfinden, wenn

$$\sin\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right) = 1$$

ist, und dann $y = A$ werden. Bezeichnet man folglich, wie vorher, durch f den Pfeil des Bogens, so wird $A = f$, und die Gleichung der mittleren Axenschicht wird:

$$y = f \sin\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right).$$

Setzt man hier $x = a$, so soll $y = o$ sein, und man erhält hierdurch die Bedingungsgleichung:

$$\sin\left(a\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right) = o,$$

woraus:

$$a\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} = n\pi,\ a = n\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}},\ P = \frac{n^2\pi^2\varepsilon}{a^2},$$

wo n irgend eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Aus der Gleichung der mittleren Axenschicht findet man:

$$d_x y = f\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} \cdot \cos\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right).$$

Bezeichnet man durch φ den Winkel, welchen die Tangente am unteren Endpunkte A mit der verticalen Abscissenaxe bildet, so findet man, wenn man in der obigen Gleichung $x = o$ setzt:

$$\tang \varphi = f\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}.$$

Bezeichnet man durch φ' denselben Winkel am oberen Endpunkte B, so findet man ebenso, wenn man $x = a$ setzt:

$$\tang \varphi' = f\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} \cos\left(a\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right) = \pm f\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} = \pm \tang \varphi,$$

woraus hervorgeht, dass die Axenschicht an beiden Enden gleiche

Winkel mit der verticalen Abscissenaxe bildet, aber entweder in derselben oder in entgegengesetzter Richtung.

Die Länge der mittleren Axenschicht wird:

$$\int_0^a (1 + \tfrac{1}{2}(d_x y)^2)\, dx = \int_0^a \left(1 + \tfrac{1}{2} f^2 \frac{P}{\varepsilon} \cos^2\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right)\right) dx$$

$$= a + \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{f^2 a}{4} + \sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} \cdot \frac{f^2}{8} \sin\left(2a\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right) = a\left(1 + \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{f^2}{4}\right).$$

Bezeichnet man fortwährend die ursprüngliche Höhe des Körpers durch s, und den Flächeninhalt des Querschnittes durch F, so findet man wie vorher:

$$s = a\left(1 + \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{f^2}{4}\right) + \frac{sP}{EF},$$

und hieraus:

$$f = \pm 2\sqrt{\frac{s - \frac{sP}{EF} - a}{a \cdot \frac{P}{\varepsilon}}},$$

oder, wenn man den obigen Werth von a substituirt:

$$f = \pm 2\sqrt{\frac{s\,(EF - P)\sqrt{P\varepsilon} - n\pi EF\varepsilon}{n\pi\, PEF}}.$$

Die Abscisse des Pfeils f wird, wie oben bemerkt, durch die Gleichung:

$$\sin\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right) = 1$$

bestimmt, woraus:

$$x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} = \frac{(2m+1)\pi}{2},\ x = \frac{(2m+1)\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{P}},$$

wo m Null oder irgend eine ganze positive Zahl ist, doch so, dass $x < a$ ist, woraus $2m + 1 < 2n$, oder $m < n$. Erlaubt diese Bedingung, dass m mehrere Werthe haben kann, so hat die Ordinate der mittleren Axenschicht mehrere Maxima, die alle gleich f sind.

Die Fig. 90 entspricht dem Falle, wenn $n = 1$ ist. Es wird alsdann:

$$a = \pi \sqrt{\frac{\varepsilon}{P}},\ \text{tang}\,\varphi = -\text{tang}\,\varphi' = f\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} = \pi \cdot \frac{f}{a},$$

$$f = \frac{2}{\pi}\sqrt{a\left(s - a - \frac{sP}{EF}\right)} = 2\sqrt{\frac{s\,(EF - P)\,\sqrt{P\varepsilon} - \pi\,EF\varepsilon}{\pi PEF}}.$$

Weil hier $m < 1$ und folglich gleich Null sein muss, wird dieses Maximum der Ordinaten nur in einem Punkte vorkommen, dessen Abscisse:

$$x = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}} = \tfrac{1}{2}a.$$

Die Fig. 91 entspricht dem Falle, wenn $n = 2$ ist. Es wird alsdann:

$$a = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}},\ \text{tang}\,\varphi = \text{tang}\,\varphi' = f\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} = 2\pi \cdot \frac{f}{a},$$

$$f = \pm\frac{1}{\pi}\sqrt{a\left(s - a - \frac{sP}{EF}\right)} = \pm 2\sqrt{\frac{s\,(EF - P)\,\sqrt{P\varepsilon} - \pi EF\varepsilon}{2\pi PEF}}.$$

Es kann hier $m = o$ und $m = 1$ sein, und es wird folglich dieses Maximum der Ordinaten in zwei Punkten vorkommen, deren Abscissen:

$$x = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}} = \tfrac{1}{4}a,$$

und

$$x = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}} = \tfrac{3}{4}a$$

sind. Wenn

$$x = \tfrac{1}{2}a = \pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}},$$

wird

$$y = f\sin\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right) = o,$$

und die mittlere Axenschicht wird folglich die verticale Abscissenaxe in der Mitte P' der Höhe schneiden.

Die Fig. 92 stellt den Fall vor, wenn $n = 3$. Es ist alsdann:

$$a = 3\pi \sqrt{\frac{\varepsilon}{P}},\ \text{tang}\,\varphi = -\text{tang}\,\varphi' = f\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}} = 3\pi \cdot \frac{f}{a},$$

$$f = \pm \frac{2}{3\pi}\sqrt{a\left(s - a - \frac{sP}{EF}\right)} = \pm 2\sqrt{\frac{s\,(EF - P)\sqrt{P\varepsilon} - \pi EF\varepsilon}{3\pi PEF}}.$$

Es kann hier m = o, oder m = 1, oder m = 2 sein, und das obige Maximum f der Ordinaten kann folglich in drei Punkten vorkommen, deren Abscissen:

$$x = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}} = \tfrac{1}{6}a,$$

$$x = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}} = \tfrac{1}{2}a,$$

$$x = \frac{5\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}} = \tfrac{5}{6}a$$

sind. Wenn

$$x = \tfrac{1}{3}a = \pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}},$$

und wenn

$$x = \tfrac{2}{3}a = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}},$$

wird

$$y = f\,\sin\left(x\sqrt{\frac{P}{\varepsilon}}\right) = o$$

werden, und die mittlere Axenschicht wird folglich hier die verticale Abscissenaxe in zwei Punkten P′ und P‴, respective in $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ der Höhe, schneiden.

Der Krümmungshalbmesser der mittleren Axenschicht wird:

$$\varrho = \frac{\pm\varepsilon}{Py}.$$

Dieser Ausdruck wird unendlich gross, wenn y = o, und die mittlere Axenschicht wird folglich einen Wendepunkt in jedem Punkte haben, wo sie die verticale Abscissenaxe schneidet.

Der obige Ausdruck des Krümmungshalbmessers wird ein Minimum, wenn y ein Maximum, positives oder negatives, ist. Der

Krümmungshalbmesser wird folglich ein Minimum in jedem Punkte, dessen Ordinate gleich f, und dessen Abscisse gleich:

$$x = \frac{(2m + 1)\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}}$$

ist, wo m Null oder irgend eine ganze positive Zahl, kleiner als n, ist, und er wird hier gleich:

$$\varrho_1 = \frac{\varepsilon}{Pf}.$$

Bezeichnet man, wie im vorigen Paragraphen, durch c den Abstand der am meisten von der mittleren Axenschicht entfernten Faser der einen Seite, z. B. der rechten, und durch c′ denjenigen der am meisten entfernten Faser der anderen, der linken Seite, so wird an der Elasticitätsgrenze auf der convexen Seite in M, M^{IV} u. s. w.:

$$\frac{T_a}{E} = \frac{cPf}{\varepsilon} - \frac{P}{EF},$$

und in M″ u. s. w.:

$$\frac{T_a}{E} = \frac{c'Pf}{\varepsilon} - \frac{P}{EF}.$$

Auf der concaven Seite in M, M^{IV} u. s. w. wird:

$$\frac{T_r}{E} = \frac{c'Pf}{\varepsilon} + \frac{P}{EF},$$

und in M″ u. s. w.:

$$\frac{T_r}{E} = \frac{cPf}{\varepsilon} + \frac{P}{EF}.$$

Der kleinste der durch diese Gleichungen bestimmten Werthe von P darf dann nicht überschritten werden.

Unter den verschiedenen Formen (Fig. 90, 91 und 92), welche ein von derselben Last P gebogener Körper annehmen kann, giebt die erste den kleinsten Werth von a, nämlich:

$$a = \pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{P}},$$

woraus wieder:

$$P = \frac{\pi^2 \varepsilon}{a^2}.$$

Weil a kleiner als s sein muss, muss also nothwendiger Weise, damit diese Biegung, und folglich überhaupt irgend eine Biegung, stattfinden kann:

$$P > \frac{\pi^2 \varepsilon}{s^2}$$

sein. Vergleicht man dies mit dem Resultate des vorigen Paragraphen, so geht hieraus hervor, dass ein am unteren Ende nur unterstützter prismatischer Körper 4 Mal so viel, ohne gebogen zu werden, tragen kann, als wenn derselbe Körper im unteren Ende fest vertical eingeklemmt wäre.

Damit die Biegungsform (Fig. 91) stattfinden kann, muss ebenso

$$P > \frac{4\pi^2 \varepsilon}{a^2}$$

sein; damit die Biegungsform (Fig. 92) stattfinden soll, muss

$$P > \frac{9\pi^2 \varepsilon}{a^2}$$

sein u. s. w.

Was die Seite, nach welcher hin die Biegung stattfindet, angeht, so gelten hier dieselben Bemerkungen wie am Ende des vorigen Paragraphen.

§. 185.

Wir haben bisher den Körper ursprünglich gerade angenommen; betrachten wir aber jetzt die Biegung eines ursprünglich krummen Körpers. Um die Untersuchung zu vereinfachen, werden wir annehmen, dass die durch die Schwerpunkte der Querschnitte gehende Linie eine ebene krumme Linie ist, und dass alle auf den Körper wirkenden Kräfte in der Ebene dieser Linie liegen. Die durch diese Linie senkrecht auf ihre Ebene gehende cylindrische Schicht wird dann fortwährend die mittlere Axenschicht des Körpers genannt.

Wir werden ferner die Form des Körpers so annehmen, dass alle Querschnitte, senkrecht auf die mittlere Axenschicht, congruent

sind und dieselbe Richtung zur Axenschicht haben, so dass folglich das Biegungsmoment jedes Querschnittes überall dasselbe ist.

Unter den verschiedenen Weisen, auf welche ein solcher krumme Körper belastet sein kann, haben wir früher (§. 159) den Fall betrachtet, wenn der Körper einfach zusammengedrückt oder ausgedehnt wird, ohne dass er seine Form zu ändern strebt. Wir werden jetzt den entgegengesetzten Fall betrachten, wenn der Körper durch die Belastung gebogen wird.

Es sei (Fig. 93) AmM die mittlere Axenschicht des krummen Körpers, von dem das eine Ende in A fest horizontal eingemauert ist. Es sei der Körper sowohl in jedem Punkte durch ein auf irgend eine Weise seiner ganzen Länge nach vertheiltes Gewicht, wie auch am freien Endpunkte M durch eine in einer beliebigen Richtung wirkende Kraft P gebogen. Die mittlere Axenschicht des Körpers wird alsdann nicht allein gebogen, sondern auch zusammengedrückt oder ausgedehnt werden. Wenn man indessen die Biegung als sehr klein annimmt, so kann diese Zusammendrückung oder Ausdehnung auf die Form der Axenschicht nur einen zu vernachlässigenden Einfluss haben, und die mittlere Axenschicht kann folglich, wenn man ihre Form nach der Biegung sucht, als unausdehnbar betrachtet werden. Sucht man dagegen die Verschiebung eines bestimmten Punktes, z. B. diejenige des freien Endpunktes, so muss man auch auf die Ausdehnung oder Zusammendrückung Rücksicht nehmen. Da aber sowohl die durch die Biegung allein hervorgebrachten Verschiebungen, wenn die Axenschicht als unausdehnbar angenommen wird, wie auch die durch ihre Ausdehnung oder Zusammendrückung hervorgebrachten immer sehr klein sind, so kann man jede besonders suchen und die wirklich stattfindende Verschiebung als ihre Summe ansehen.

Es sei AmM die ursprüngliche Lage der mittleren Axenschicht, Am′M′ diejenige der gebogenen. Es seien m′ und M′ die Stellen, welche die Punkte m und M respective nach der Biegung einnehmen würden, wenn die Axenschicht als unausdehnbar angenommen

würde; es seien m'' und M'' die Stellen, welche sie wirklich einnehmen, wo m'' und M'' als in dem Bogen Am'M' liegend angesehen werden können. Bezeichnen wir durch x und y die horizontale und verticale Coordinate des Punktes m, durch x' und y' diejenige des Punktes m'; durch a und b die Coordinaten des Endpunktes M, durch a' und b' diejenigen des Punktes M', und endlich durch a'' und b'' die Coordinaten des Punktes M''. Bezeichnen wir ferner durch s die gemeinschaftliche Länge der Bogen Am und Am', durch α den Winkel, welchen die Normale in m mit der verticalen Ordinatenaxe bildet, durch α' den entsprechenden Winkel des Punktes m'. Es sei ferner x_1 die Abscisse eines zwischen m und M befindlichen Punktes n, p die im Punkte n vertical wirkende Belastung, auf die Längeneinheit der Abscisse zurückgeführt, P die auf den freien Endpunkt M wirkende Kraft, X und Y die horizontale und verticale Componente dieser Kraft. Wir werden endlich das Biegungsmoment des Körpers als für jeden Querschnitt gleich ansehen und, wie vorher, durch ε bezeichnen, und endlich annehmen, dass die Höhe des Querschnittes nur klein in Bezug auf den Krümmungshalbmesser des krummen Körpers ist.

Wenn man jetzt auf den hier betrachteten Fall dieselben Betrachtungen wie im §. 158 anwendet, so findet man, dass die Länge des Elementes einer in der Entfernung v von der mittleren Axenschicht befindlichen Faser gleich $ds + vd\alpha$ ist und dass dieses Element nach der Biegung, wenn man die mittlere Axenschicht als unausdehnbar betrachtet, gleich $ds + vd\alpha'$ wird. Das Verhältniss, in welchem die Faser ausgedehnt worden ist, wird folglich:

$$\frac{v(d\alpha' - d\alpha)}{ds + vd\alpha} \text{ oder } = \frac{v(d\alpha' - d\alpha)}{ds} = v(d_s\alpha' - d_s\alpha),$$

wenn man $vd\alpha$ in Bezug auf ds vernachlässigt, was man immer thun kann, weil der grösste Werth von v nur klein in Bezug auf den Krümmungshalbmesser $\frac{ds}{d\alpha}$ angenommen ist. Die Form des gebogenen krummen Körpers wird dann auf dieselbe Weise wie

bei geraden Körpern gefunden, wenn man nur statt der Function $\frac{1}{\varrho}$, oder $d_x^2 y$ den Ausdruck $d_s\alpha' - d_s\alpha$ setzt. Man erhält dann nach §. 163 die folgende Bedingungsgleichung des Gleichgewichts:

$$\varepsilon(d_s\alpha' - d_s\alpha) = \int_x^a (x_1 - x)\,p\,dx_1 + Y(a - x) - X(b - y),$$

woraus durch Integration:

$$\alpha' - \alpha = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \left\{dx\sqrt{1+(d_x y)^2}\left[\int_0^a (x_1 - x)\,p\,dx + Y(a - x) + X(b - y)\right]\right\}.$$

Da die Biegung des Körpers als sehr klein angenommen ist, so wird der Unterschied der zwei Winkel α' und α immer sehr klein sein. Es ist aber alsdann annäherungsweise:

$$\cos\alpha' - \cos\alpha = -(\alpha' - \alpha)\sin\alpha,$$

und

$$\sin\alpha' - \sin\alpha = (\alpha' - \alpha)\cos\alpha,$$

und hieraus:

$$\cos\alpha' - \cos\alpha =$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\varepsilon}\int_0^x \left\{dx\sqrt{1+(d_x y)^2}\left[\int_x^a (x_1 - x)\,p\,dx_1 + Y(a - x) - X(b - y)\right]\right\},$$

$$\sin\alpha' - \sin\alpha =$$

$$\frac{\cos\alpha}{\varepsilon}\int_0^x \left\{dx\sqrt{1+(d_x y)^2}\left[\int_x^a (x_1 - x)\,p\,dx_1 + Y(a - x) - X(b - y)\right]\right\}.$$

Es ist nun $\cos\alpha = d_s x$, $\sin\alpha = d_s y$, $\cos\alpha' = d_s x'$ und $\sin\alpha' = d_s y'$. Substituirt man diese Werthe, so erhält man die Differentialgleichungen:

$$dx' - dx =$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}dy\int_0^x \left\{dx\sqrt{1+(d_x y)^2}\left[\int_x^a (x_1 - x)\,p\,dx_1 + Y(a - x) - X(b - y)\right]\right\},$$

$$dy' - dy =$$

$$\frac{1}{\varepsilon}dx\int \left\{dx\sqrt{1+(d_x y)^2}\left[\int_x^a (x_1 - x)\,p\,dx_1 + Y(a - x) - X(b - y)\right]\right\}.$$

Die Wurzelgrösse

$$\sqrt{1 + (d_x y)^2}$$

kann man in eine Reihe entwickeln und, wenn der Bogen des krummen Körpers selten eine grosse Amplitude hat, kann man sich mit dem Quadrate von $d_x y$ begnügen, und folglich

$$\sqrt{1 + (d_x y)^2} = 1 + \tfrac{1}{2}(d_x y)^2$$

setzen.

§. 186.

Durch die Differentialgleichungen des vorigen Paragraphen ist die Form des gebogenen krummen Körpers bestimmt. Integrirt man diese Gleichungen und setzt $x = a$, $y = b$, so wird $x' = a'$ und $y' = b'$, und es wird hierdurch die Lage des Punktes M' bestimmt werden. Um aber jetzt die Lage des Punktes M'' oder die Lage des freien Endpunktes des gebogenen Körpers zu finden, wenn auf die Ausdehnung oder Zusammendrückung der mittleren Axenschicht Rücksicht genommen wird, muss man erst die in jedem Punkte dieser Axenschicht stattfindende Spannung suchen. Bezeichnen wir durch t die im Punkte m stattfindende Spannung. Die Grösse dieser Spannung wird gefunden, wenn man alle auf den Bogen mM wirkenden Kräfte parallel mit der Tangente im Punkte m und senkrecht auf dieselbe decomponirt, und ist der Summe der ersten Componenten gleich. Man hat folglich:

$$t = d_s y \int_x^a p dx_1 + Y d_s y + X d_s x = \frac{d_x y \int_x^a p dx_1 + Y d_x y + X}{\sqrt{1 + (d_x y)^2}}.$$

Bezeichnet man jetzt durch F den Flächeninhalt des Querschnittes, durch E den Elasticitätscoefficienten des Körpers und durch s'' die Länge des Bogens Am'', so wird, wegen der im Punkte m stattfindenden Spannung t, das Längenelement ds um die Grösse $\frac{tds}{E\omega}$ ausgedehnt werden, und folglich

$$ds'' = ds + \frac{tds}{E\omega}$$

sein, woraus, wenn man den Werth von t substituirt und integrirt:

$$s'' = s + \frac{1}{E\omega}\int_0^x \left(d_x y \int_x^a p dx_1 + Y d_x y + X\right) dx$$

$$= s + \frac{Yy + Xx}{E\omega} + \frac{1}{E\omega}\int_0^y dy \int_x^a p dx_1.$$

Bezeichnet man durch S und S'' die ursprüngliche und die endliche Länge der ganzen Bogen AmM und Am''M'', so wird:

$$S'' = S + \frac{Yb + Xa}{E\omega} + \frac{1}{E\omega}\int_0^b dy \int_x^a p dx_1.$$

Hierdurch ist die Ausdehnung oder Zusammendrückung M'M'' = S'' — S bestimmt, und, weil diese immer eine sehr kleine Grösse ist, und daher als mit der Tangente des Punktes M' zusammenfallend betrachtet werden kann, so ist hierdurch auch die Lage des Punktes M'' und folglich die Verschiebung des freien Endpunktes bestimmt.

§. 187.

Suchen wir jetzt die Gleichung der grösstmöglichen Belastung innerhalb der Elasticitätsgrenze. Bezeichnen wir wie vorher durch c den Abstand der am meisten von der mittleren Axenschicht entfernten Faser der convexen Seite, durch c' den Abstand derjenigen der concaven Seite. Die erste Faser ist dann erstens wegen der Biegung im Verhältnisse $\frac{c(d\alpha' - d\alpha)}{ds}$, und zweitens wegen der allgemeinen Ausdehnung der mittleren Axenschicht im Verhältnisse $\frac{t}{E\omega}$ ausgedehnt worden, wo das negative t eine Zusammendrückung bezeichnet. Die ganze Ausdehnung der äussersten Faser der convexen Seite wird folglich im Verhältnisse

$$\frac{t}{E\omega} + \frac{c(d\alpha' - d\alpha)}{ds}$$

ausgedehnt werden. Ist dieser Ausdruck positiv, so wird folglich

an der Elasticitätsgrenze

$$\frac{T_a}{E} = \frac{t}{E\omega} + \frac{c(d\alpha' - d\alpha)}{ds}.$$

Ist dagegen der Ausdruck auf der rechten Seite negativ, so wird an der Elasticitätsgrenze:

$$\frac{T_r}{E} = -\left(\frac{t}{E\omega} + \frac{c(d\alpha' - d\alpha)}{ds}\right).$$

Um die grösstmögliche Belastung zu finden, muss man hier auf der rechten Seite den Werth von x substituiren, welcher

$$\frac{t}{E\omega} + \frac{c(d\alpha' - d\alpha)}{ds}$$

oder

$$-\left(\frac{t}{E\omega} + \frac{c(d\alpha' - d\alpha)}{ds}\right)$$

zu einem Maximum macht.

Für die concave Seite findet man ebenso:

$$\frac{T_r}{E} = -\frac{t}{E\omega} + \frac{c'(d\alpha' - d\alpha)}{ds},$$

oder

$$\frac{T_a}{E} = \frac{t}{E\omega} - \frac{c'(d\alpha' - d\alpha)}{ds},$$

wo derjenige Werth von x substituirt werden muss, welcher die rechte Seite der obigen Gleichungen zu einem Maximum macht.

§. 188.

Als Beispiel der Anwendung der in dem vorigen Paragraphen entwickelten allgemeinen Formeln werden wir jetzt den Fall betrachten, wenn die mittlere Axenschicht des Körpers ursprünglich nach einer Parabel geformt und die Belastung gleichmässig auf gleiche Abscissen vertheilt ist, und folglich p constant. Es wird alsdann:

$$y = \frac{bx^2}{a^2},\ d_x y = \frac{2bx}{a^2},$$

und die Formeln des §. 185 geben dann, wenn man

$$\sqrt{1+(d_xy)^2} = 1 + \tfrac{1}{2}(d_xy)^2 - \tfrac{1}{24}(d_xy)^4 + \ldots$$

setzt:

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon}dx \Big\{ p\Big[\Big(bx^2 - \frac{bx^3}{a} + \frac{bx^4}{3a^2}\Big) + \frac{2b^3}{a^6}\Big(\frac{a^2x^4}{3} - \frac{ax^5}{2} + \frac{x^6}{5}\Big) - \ldots\Big]$$
$$+ \frac{2b}{a^2}\Big[Y\Big(ax^2 - \frac{x^3}{2}\Big) - X\Big(bx^2 - \frac{bx^4}{3a^2}\Big)\Big]$$
$$+ \frac{4b^3}{a^6}\Big[Y\Big(\frac{ax^4}{3} - \frac{x^5}{4}\Big) - X\Big(\frac{bx^4}{3} - \frac{bx^6}{5a^2}\Big)\Big] - \ldots\Big\},$$

$$dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon}dx \Big\{ p\Big[\Big(\frac{a^2x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6}\Big) + \frac{b^2}{a^4}\Big(\frac{a^2x^3}{3} - \frac{ax^4}{2} + \frac{x^5}{5}\Big) - \ldots\Big]$$
$$+ \Big[Y\Big(ax - \frac{x^2}{2}\Big) - X\Big(bx - \frac{bx^3}{3a^2}\Big)\Big]$$
$$+ \frac{2b^2}{a^4}\Big[Y\Big(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big) - X\Big(\frac{bx^3}{3} - \frac{bx^5}{5a^2}\Big)\Big] - \ldots\Big\}.$$

Hieraus findet man dann durch Integration:

$$x' - x = -\frac{1}{\varepsilon}\Big\{ p\Big[\Big(\frac{bx^3}{3} - \frac{bx^4}{4a} + \frac{bx^5}{15a^2}\Big) + \frac{2b^3}{a^6}\Big(\frac{a^2x^5}{15} - \frac{ax^6}{12} + \frac{x^7}{35}\Big) - \ldots\Big]$$
$$+ \frac{2b}{a^2}\Big[Y\Big(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{8}\Big) - X\Big(\frac{bx^3}{3} - \frac{bx^5}{15a^2}\Big)\Big]$$
$$+ \frac{4b^3}{a^6}\Big[Y\Big(\frac{ax^5}{15} - \frac{x^6}{24}\Big) - X\Big(\frac{bx^5}{15} - \frac{bx^7}{35a^2}\Big)\Big] - \ldots\Big\},$$

$$y' - y = \frac{1}{\varepsilon}\Big\{ p\Big[\Big(\frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24}\Big) + \frac{b^2}{a^4}\Big(\frac{a^2x^4}{12} - \frac{ax^5}{10} + \frac{x^6}{30}\Big) - \ldots\Big]$$
$$+ \Big[Y\Big(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\Big) - X\Big(\frac{bx^2}{2} - \frac{bx^4}{12a^2}\Big)\Big]$$
$$+ \frac{2b^2}{a^4}\Big[Y\Big(\frac{ax^4}{12} - \frac{x^5}{20}\Big) - X\Big(\frac{bx^4}{12} - \frac{bx^6}{30a^2}\Big)\Big] - \ldots\Big\}.$$

Eliminirte man zwischen diesen beiden Gleichungen x, so würde man die Gleichung der gebogenen parabelförmigen mittleren Axenschicht finden.

Um die Verschiebung des Endpunktes M, d. h. die Lage von M″ zu finden, suche man erst die Lage des Punktes M′. Bezeichnen wir durch a′ und b′ die Coordinaten dieses letzten Punktes, so findet man aus den vorhergehenden Gleichungen, wenn man a und

b statt x und y setzt, und a′ und b′ statt x′ und y′:

$$a' - a = -\frac{1}{\varepsilon}\left\{p\left(\frac{3a^3b}{20} + \frac{ab^3}{42} - \cdots\right) + Y\left(\frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10} - \cdots\right)\right.$$

$$\left. - X\left(\frac{8ab^2}{15} + \frac{16b^4}{105a} - \cdots\right)\right\},$$

$$b' - b = \frac{1}{\varepsilon}\left\{p\left(\frac{a^4}{8} + \frac{a^2b^2}{60} - \cdots\right) + Y\left(\frac{a^3}{3} + \frac{ab^2}{15} - \cdots\right)\right.$$

$$\left. - X\left(\frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10} - \cdots\right)\right\}.$$

Um jetzt ferner die Verschiebungen des Punktes M′ zu M″, oder die Differenzen a″ — a′ und b″ — b′ zu finden, wo a″ und b″ die Coordinaten des Endpunktes M″ bezeichnen, muss man erst die Länge des Bogens M′M″ suchen. Diese findet man nach §. 186 gleich:

$$S'' - S = \frac{Yb + Xa}{E\omega} + \frac{1}{E\omega}\int_0^b dy \int_x^a p\,dx_1$$

$$= \frac{Yb + Xa}{E\omega} + \frac{2p}{E\omega}\left(\frac{b^3}{2a} - \frac{b^4}{3a^2}\right).$$

Die horizontalen und verticalen Projectionen dieser Linie geben dann die Verschiebungen a″ — a′ und b″ — b′. Um diese zu finden, bemerke man, dass:

$$\sin\alpha' = \frac{d_x y'}{d_x s},\ \cos\alpha' = \frac{d_x x'}{d_x s},$$

und nach der Theorie der Parabel:

$$s = x + \tfrac{2}{3}\,\frac{b^2x^3}{a^4} - \tfrac{2}{5}.\frac{b^4x^5}{a^8} + \cdots$$

Differentiirt man diesen Werth von s und substituirt aus den vorhergehenden Gleichungen die Werthe von $d_x x'$ und $d_x y'$, so findet man die Werthe von sin α′ und cos α′ durch x ausgedrückt.

Bezeichnet man jetzt durch φ den Winkel, welchen die Normale in M′ mit der verticalen Ordinatenaxe bildet, so findet man, wenn man in den Werthen von sin α′ und cos α′ a statt x setzt:

$\sin\varphi =$

$$\frac{\frac{2b}{a}+\frac{1}{\varepsilon}\left\{p\left(\frac{a^3}{6}+\frac{b^2a}{30}-\dots\right)+Y\left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{6}-\dots\right)-X\left(\frac{2ab}{3}+\frac{4b^3}{15a}-\dots\right)\right\}}{1+2.\frac{b^2}{a^2}-2.\frac{b^4}{a^4}+\dots},$$

$\cos\varphi =$

$$\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}\left\{p\left(\frac{ba^2}{3}+\frac{b^3}{15}-\dots\right)+Y\left(ab+\frac{b^3}{3a}-\dots\right)-X\left(\frac{2b^2}{3}+\frac{8b^4}{15a^2}-\dots\right)\right\}}{1+2.\frac{b^2}{a^2}-2.\frac{b^4}{a^4}+\dots},$$

Die Verschiebungen des Punktes M' zu M'' findet man jetzt gleich:

$$a''-a'=(S''-S)\cos\varphi;\ b''-b'=(S''-S)\sin\varphi.$$

Dies zu den vorher gefundenen Werthen von $a'-a$ und $b'-b$ addirt, giebt endlich die vollständigen Verschiebungen des freien Endpunktes.

Um die grösstmögliche Belastung zu finden, muss man erst den grössten Werth der beiden Ausdrücke:

$$\frac{t}{E\omega}+c\,(d_s\alpha'-d_s\alpha)\ \text{und}\ -\frac{t}{E\omega}+c'(d_s\alpha'-d_s\alpha)$$

suchen. Es ist jetzt:

$$t=\frac{d_xy\int_x^a pdx_1+Yd_xy+X}{\sqrt{1+(d_xy)^2}}=\frac{2pbx(a-x)+2bYx+a^2X}{\sqrt{a^4+4b^2x^2}}.$$

Ebenso hat man:

$$d_s\alpha'-d_s\alpha=\frac{1}{\varepsilon}\int_x^a(x_1-x)\,pdx_1+Y(a-x)-X(b-y)$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{p(a-x)^2}{2}+Y(a-x)-Xb\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right].$$

Substituirt man diese Werthe von t und $d_s\alpha'-d_s\alpha$, so wird man finden, dass die Werthe von x, welche die Grössen:

$$\frac{t}{E\omega}+c\,(d_s\alpha'-d_s\alpha)\ \text{und}\ -\frac{t}{E\omega}+c'(d_s\alpha'-d_s\alpha)$$

zu Maxima machen, durch eine Gleichung dritten Grades bestimmt sind. Ist die Amplitude der Parabel sehr klein, so dass man

$\left(\frac{b}{a}\right)^2$ vernachlässigen kann, so wird man respective:

$$x = \frac{(pa + Y)(a^2 c\omega E - 2b\varepsilon)}{c\omega E(a^2 p + 2bX, + 4pb\varepsilon)}$$

und

$$x = \frac{(pa + Y)(a^2 c\omega E + 2b\varepsilon)}{c\omega E(a^2 p + 2bX) - 4pb\varepsilon}$$

finden. Wenn diese Werthe zwischen $x = o$ und $x = a$ fallen, so werden sie die Punkte der convexen und concaven Seite angeben, wo der Körper zuerst brechen wird. Sind sie grösser als a, wird $x = o$ diesem Punkte entsprechen. An der Elasticitätsgrenze wird, wenn die so gefundenen Werthe von x substituirt werden, auf der convexen Seite:

$$\frac{T_a}{E} = \frac{t}{E\omega} + c(d_s\alpha' - d_s\alpha),$$

und auf der concaven Seite:

$$\frac{T_r}{E} = \frac{t}{E\omega} + c'(d_s\alpha' - d_s\alpha).$$

§. 189.

Es sei der krumme Körper von einer horizontalen Ebene getragen (Fig. 94), und sowohl durch ein im Scheitelpunkte A aufgehängtes Gewicht Q, wie auch von einer nach den horizontalen Abscissen gleichförmig vertheilten Belastung auf der Längeneinheit der Abscisse) p, heruntergedrückt. Der Einfachheit wegen wollen wir ferner annehmen, der Körper bestehe aus zwei um den Scheitelpunkt symmetrischen Theilen AM und AN. Die mittlere Axenschicht wird dann die Stellung N′A′M′ einnehmen, indem der Scheitelpunkt A zu A′ sinkt und beide unterstützten Endpunkte sich von einander auf jeder Seite um NN′ = MM′ entfernen. Verlegt man jetzt N′A′M′ parallel mit sich selbst nach N″AM″, so wird die Biegung dieselbe, als wäre der Körper in A horizontal festgeklemmt, durch die gleichmässige Belastung nach unten gebogen und an jedem Endpunkte N″ und M″ durch eine dem Drucke auf die Ebene gleiche aber entgegengesetzte, vertical nach oben wir-

kende Kraft gebogen. Der Druck in jedem Endpunkte ist gleich der halben Belastung, gleich $\frac{1}{2}(Q + pl)$, wenn man durch l den Abstand der Endpunkte bezeichnet. Man braucht folglich nur in den §§. 185, 186 und 187 $X = o$, $Y = -\frac{1}{2}(Q + pl)$ zu setzen.

Nimmt man an, der ursprüngliche Bogen sei eine Parabel, deren Scheitelpunkt A ist, und deren Gleichung $y = \frac{2bx^2}{a^2}$, wo $a = \frac{1}{2}l$, $b = AB$ ist, so findet man:

$$a'' - a = MM' = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{4a^3b}{15} - \frac{12ab^3}{105} - \cdots\right) + \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{5a^2b}{24} + \frac{b^3}{20} - \cdots\right)$$
$$- \left[\frac{Qb}{2E\omega} + \frac{p}{E\omega}\left(ab - \frac{b^3}{a} + \frac{2b^4}{3a^2}\right)\right] \cdot$$
$$\cdot \left[\frac{1 - \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{4ba^2}{3} + \frac{2b^3}{5} - \cdots\right) - \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{ab}{2} + \frac{b^3}{6a} - \cdots\right)}{1 + 2.\frac{b^2}{a^2} - 2.\frac{b^4}{a^4} + \cdots}\right],$$

$$b'' - b = AA' = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{5a^4}{24} + \frac{a^2b^2}{20}\right) + \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{a^3}{6} + \frac{ab^2}{30} - \cdots\right)$$
$$+ \left[\frac{Qb}{3E\omega} + \frac{p}{E\omega}\left(ab - \frac{b^3}{a} + \frac{2b^4}{3a^2}\right)\right]$$
$$\cdot \left[\frac{\frac{2b}{a} - \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{a^3}{3} + \frac{2b^2a}{15} - \cdots\right) - \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{12} - \cdots\right)}{1 + \frac{2b^2}{a^2} - \frac{2b^4}{a^4} + \cdots}\right].$$

Die Spannung t findet man:

$$t = \frac{2pbx(a - x) - bx(Q + 2pa)}{\sqrt{a^4 + 4b^2x^2}} = -\frac{bx(Q + 2px)}{\sqrt{a^4 + 4b^2x^2}}.$$

Dass hier t immer negativ ist, bezeichnet, dass in der mittleren Axenschicht überall eine Zusammendrückung stattfindet. Man sieht ferner, dass diese Spannung im Scheitelpunkte A gleich Null ist.

Es wird ferner:

$$d_s\alpha' - d_s\alpha = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{p(a - x)^2}{2} - \frac{1}{2}(Q + 2pa)(a - x)\right]$$
$$= -\frac{1}{\varepsilon}\left[Q + p(a + x)\right] \cdot \frac{(a - x)}{2}.$$

Es wird folglich die Spannung der äussersten Faser der convexen Seite:

$$\frac{t}{E\omega} + c(d_s\alpha' - d_s\alpha) = -\left[\frac{bx(Q+2px)}{E\omega\sqrt{a^4+4b^2x^2}} + \frac{c(Q+p(a+x))(a-x)}{2\varepsilon}\right],$$

und die Spannung der äussersten Faser der concaven Seite wird gleich:

$$\frac{t}{E\omega} - c'(d_s\alpha' - d_s\alpha) = -\frac{bx(Q+2px)}{E\omega\sqrt{a^4+4b^2x^2}} + \frac{c'(Q+p(a+x))(a-x)}{2\varepsilon}.$$

Weil das Biegungsmoment ε proportional mit E und mit c^3 und c'^3 ist, und weil c und c' sehr klein in Bezug auf a und b sind, d. h. der Querschnitt des Körpers sehr klein in Bezug auf seine Länge angenommen ist, so wird immer

$$\frac{c(Q+p(a+x))(a-x)}{2\varepsilon}$$

sehr gross in Bezug auf

$$\frac{bx(Q+2px)}{E\omega\sqrt{a^4+4b^2x^2}}$$

sein, oder die durch die Biegung hervorgebrachte Ausdehnung oder Zusammendrückung der äussersten Fasern wird immer sehr gross in Bezug auf die Zusammendrückung der mittleren Axenschicht sein. Es wird aber $-(d_s\alpha' - d_s\alpha)$ den grössten Werth erhalten, wenn x den kleinsten möglichen Werth hat, und es werden folglich die beiden Ausdrücke:

$$-\left(\frac{t}{E\omega} + c(d_s\alpha' - d_s\alpha)\right)$$

und

$$\left(\frac{t}{E\omega} + c'(d_s\alpha' - d_s\alpha)\right)$$

am grössten, wenn x = o, oder im Scheitelpunkte A. Der Körper wird folglich zuerst in diesem Punkte brechen.

An der Elasticitätsgrenze wird im Scheitelpunkte A auf der convexen Seite

$$\frac{T_r}{E} = \frac{ca(Q+pa)}{2\varepsilon},$$

und auf der concaven Seite

$$\frac{T_n}{E} = \frac{c'a(Q+pa)}{2\varepsilon}$$

§. 190.

Betrachten wir denselben Körper auf dieselbe Weise belastet, so aber unterstützt, dass die beiden Endpunkte sich nicht von einander entfernen können (Fig. 95). Diese Endpunkte werden dann an den Unterstützungen sowohl einen verticalen als einen horizontalen Druck ausüben, und die Biegung des Körpers wird folglich genau dieselbe, als wäre er in A′ festgehalten, und sowohl durch die gleichförmige Belastung, wie auch in jedem Endpunkte durch eine vertical aufwärts gerichtete Kraft, gleich $\frac{1}{2}(Q + pl)$, und von einer nach Innen wirkenden horizontalen Kraft gebogen, welche so bestimmt sein muss, dass die horizontalen Verschiebungen gleich Null werden.

Nehmen wir die Form der mittleren Axenschicht fortwährend als eine Parabel an, und bezeichnen wir jene horizontale Spannung durch — X, so hat man nach §. 188, um diese unbekannte Kraft zu bestimmen, die Gleichung:

$$a'' - a = o = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{4a^3b}{15} - \frac{12ab^3}{105} - \cdots\right) + \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{5a^2b}{24} + \frac{b^3}{20}\right)$$
$$+ \frac{X}{\varepsilon}\left(\frac{8ab^2}{15} + \frac{16b^4}{105a} - \cdots\right) - \left[\frac{Qb}{2E\omega} + \frac{p}{E\omega}\left(ab - \frac{b^3}{a} + \frac{2b^4}{3a^2}\right)\right]$$
$$\cdot\left[\frac{1 - \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{4ba^2}{3} + \frac{2b^3}{15} - \cdots\right) - \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{ab}{2} + \frac{b^3}{6a} - \cdots\right) + \frac{X}{\varepsilon}\left(\frac{2b^2}{3} + \frac{8b^4}{15a^2} - \cdots\right)}{1 + \frac{2b^2}{a^2} - \frac{2b^4}{a^4} + \cdots}\right]$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach den steigenden Potenzen von $\frac{b}{a}$, und sucht dann X nach der Methode der unbestimmten Coefficienten, so findet man die horizontale Spannung gegen die Unterstützungen gleich:

$$-X = \left[\frac{a^2E\omega}{\varepsilon}\left(\tfrac{5}{24}Q + \tfrac{4}{15}pa\right) - (Q + pa)\right]\frac{b}{a}$$
$$+ \left[\frac{a^4E\omega}{\varepsilon^2}\left(\tfrac{5}{24}Q + \tfrac{4}{15}pa\right)\left(\tfrac{1}{2}Q + \tfrac{4}{3}pa\right) - \frac{a^2}{\varepsilon}(Q + pa)\left(Q + \tfrac{8}{3}pa\right)\right.$$
$$\left. - \frac{a^2E\omega}{\varepsilon}\left(Q - \tfrac{12}{105}pa\right)\right] \cdot \frac{b^2}{a^2} + \cdots$$

Weil hier ε proportional mit E und mit der dritten Potenz der Höhe des Querschnittes, und weil ω proportional mit dieser Höhe ist, so wird, wenn man fortwährend a als gross, sowohl in Bezug auf b, wie auf jene Höhe des Querschnittes annimmt, jener Ausdruck immer positiv und X folglich negativ sein.

Die Herunterbiegung des Scheitelpunktes findet man jetzt gleich:

$$AA' = b - b'' = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{5a^4}{24} + \frac{a^2b^2}{20} - \cdots\right) + \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{a^3}{6} + \frac{ab^2}{30} - \cdots\right)$$

$$+ \frac{X}{\varepsilon}\left(\frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10} - \cdots\right) + \left[\frac{Qb}{2E\omega} + \frac{p}{E\omega}\left(ab - \frac{b^3}{a} + \frac{2b^4}{3a^2}\right) - \frac{Xa}{E\omega}\right]$$

$$\cdot\left[\frac{\frac{2b}{a} - \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{a^3}{3} + \frac{2b^2a}{15} - \cdots\right) - \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{12} - \cdots\right) - \frac{X}{\varepsilon}\left(\frac{2ab}{3} + \frac{4b^3}{15a} - \cdots\right)}{1 + \frac{2b^2}{a^2} - \frac{2b^4}{a^4} + \cdots}\right].$$

Die Spannung in einem Punkte der mittleren Axenschicht, dessen Abscisse gleich x, findet man nach §. 188 gleich:

$$t = -\left[\frac{2bx}{a^2}\left(\tfrac{1}{2}Q + px\right) - X\right]\left[1 - \frac{2b^2x^2}{a^4} - \tfrac{3}{2}\frac{b^4x^4}{a^8} + \cdots\right].$$

Da X negativ ist, so wird auch t negativ, und es findet folglich überall in der mittleren Axenschicht eine Zusammendrückung statt. Diese wird am grössten in beiden Endpunkten, wo $x = a$, und die Spannung wird hier gleich:

$$\left[\frac{2b}{a}\left(\tfrac{1}{2}Q + pa\right) - X\right]\left[1 - \frac{2b^2}{a^2} - \tfrac{3}{2}\cdot\frac{b^4}{a^4} + \cdots\right].$$

Die im Abstande v von der mittleren Axenschicht befindlichen Fasern werden ausserdem durch die Biegung im Verhältnisse:

$$v(d_s\alpha' - d_s\alpha) = -\frac{v(a-x)}{\varepsilon}\left[\tfrac{1}{2}Q + \tfrac{1}{2}p(a+x) + \frac{Xb(a+x)}{a^2}\right]$$

ausgedehnt oder zusammengedrückt. Nimmt man fortwährend an, die Amplitude der Parabel sei sehr klein, so wird der Zahlenwerth von $\frac{Xb(a+x)}{a^2}$ immer kleiner als $\frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}p(a+x)$ sein, und das negative Zeichen des obigen Ausdrucks bezeichnet dann, dass

oberhalb der mittleren Axenschicht eine Zusammendrückung, unterhalb derselben eine Ausdehnung durch die Biegung hervorgebracht wird. Diese Ausdehnung oder Zusammendrückung wird am stärksten in A, wenn $x = o$, wo sie im Verhältnisse:

$$-\frac{va}{\varepsilon}\left[\tfrac{1}{2}Q + \tfrac{1}{2}pa + X \cdot \frac{b}{a}\right]$$

stattfinden wird, und von wo aus sie nach den beiden Seiten hin abnimmt, bis sie in den beiden Endpunkten N und M gleich Null wird.

Bezeichnet man wie vorher durch c den Abstand der äussersten Faser der convexen Seite von der mittleren Axenschicht, so wird hier die totale Zusammendrückung im Verhältnisse:

$$\frac{1}{E\omega} \cdot \left[\frac{2bx}{a^2}(\tfrac{1}{2}Q + px) - X\right] \cdot \left[1 - \frac{2b^2x^2}{a^4} - \tfrac{3}{2} \cdot \frac{b^4x^4}{a^8} + \cdots\right]$$
$$+ \frac{c(a-x)}{\varepsilon}\left[\tfrac{1}{2}Q + \tfrac{1}{2}p(a + x) + \frac{Xb(a + x)}{a^2}\right]$$

stattfinden. Da hier ε proportional mit E und c^3 ist, ω proportional mit c, so wird, wenn c fortwährend als sehr klein angesehen wird, $\frac{c}{\varepsilon}$ sehr gross in Bezug auf $\frac{1}{E\omega}$ sein, und der obige Ausdruck wird folglich, wenn fortwährend die Amplitude der Parabel sehr klein ist, zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = a$ am grössten, wenn $x = o$, oder im Scheitelpunkte A. Die convexe Seite wird folglich im Scheitelpunkte A zuerst brechen, und es wird hier an der Elasticitätsgrenze:

$$\frac{T_r}{E} = -\frac{X}{E\omega} + \frac{ca}{2\varepsilon}\left(Q + pa + 2X \cdot \frac{b}{a}\right).$$

Ist dagegen die Amplitude der Parabel nicht sehr klein, so wird auf gewöhnliche Weise der zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = a$ liegende Werth von x gesucht, welcher jenes Verhältniss der Zusammendrückung zu einem Maximum macht, und an der Elasticitätsgränze wird dann dieses Maximum gleich $\frac{T_r}{E}$ sein.

Bezeichnet man durch c′ den Abstand der äussersten Faser der concaven Seite von der mittleren Axenschicht, so findet man hier das Verhältniss der gesammten Ausdehnung gleich:

$$\frac{c'(a-x)}{\varepsilon}\left[\tfrac{1}{2}Q+\tfrac{1}{2}p(a+x)+\frac{Xb(a+x)}{a^2}\right]$$
$$-\frac{1}{E\omega}\left[\frac{2bx}{a^2}(\tfrac{1}{2}Q+px)^{\cdot}-X\right]\cdot\left[1-\frac{2b^2x^2}{a^4}-\tfrac{3}{2}\cdot\frac{b^4x^4}{a^8}+\cdots\right].$$

Wird dieser Ausdruck negativ, so bezeichnet er eine Zusammendrückung.

Man sucht nun auf gewöhnliche Weise den zwischen $x = o$ und $x = a$ liegenden Werth von x, welcher jenes Verhältniss zu einem positiven oder negativen Maximum macht. Weil das negative Maximum hier nothwendig kleiner als dasjenige der convexen Seite werden muss, braucht man nur das positive Maximum, insofern ein solches zwischen den oben angegebenen Grenzen der Abscisse x stattfindet, zu berücksichtigen. An der Elasticitätsgrenze wird dann dieses Maximum gleich $\frac{Ta}{E}$ zu setzen sein.

§. 191.

Wir haben bisher nur die Biegung prismatischer Körper betrachtet, oder diejenige solcher Körper, deren Querschnitte wie bei jenen überall gleich waren. Der Körper wird dann in einer oder mehreren Stellen zuerst die Elasticitätsgrenze überschreiten und endlich brechen. Ist der Widerstand des Körpers gross genug an diesen Stellen, so muss er an allen übrigen Stellen zu gross sein. Man kann aber die Figur des Längendurchschnittes des Körpers so bestimmen, dass er überall eine genügende, nirgends eine überflüssige Widerstandskraft darbietet. Solche Körper werden **Körper gleichen Widerstandes** genannt. Ihre Widerstandskraft wird gleichzeitig ihrer ganzen Länge nach überschritten, doch im Allgemeinen nur auf der einen Seite. Es wird genügen, einige Beispiele der Untersuchungen dieser Art zu entwickeln.

Es sei (Fig. 96) der Körper CBD in einem Ende horizontal eingemauert, und sowohl durch sein eigenes Gewicht, auf der Kubikeinheit q, wie durch ein am freien Ende angebrachtes Gewicht P und durch eine gleichförmige Belastung, auf der Längeneinheit p, gebogen.

Nehmen wir, um die Untersuchung zu vereinfachen, an, die Seitenflächen des Körpers seien zwei parallele verticale Ebenen, so dass folglich die Breite des Körpers überall dieselbe ist. Es sei AmB die mittlere Axenschicht des Körpers, welche wir ungebogen als eine horizontale Ebene annehmen werden. Wir werden dann die Gleichungen der auf beiden Seiten jener mittleren Axenschicht symmetrischen oberen und unteren begrenzenden Fläche suchen, und diese als eine cylindrische Fläche annehmen.

Bezeichnen wir durch a die Länge AB des Körpers, durch b seine Breite, durch h die Höhe CD des eingemauerten Endes, durch x und η die Abscisse Bm und Ordinate mr = mr' der oberen und unteren Flächen, durch x' und η' irgend eine kleinere Abscisse Bn und entsprechende Ordinate nt = nt'. Es wird alsdann das Moment der gegebenen Kräfte in Bezug auf m gleich:

$$Px + p\int_0^x (x - x')\,dx' + 2qb\int_0^x (x - x')\,\eta' dx' = \frac{\varepsilon}{\varrho}.$$

An der Elasticitätsgrenze ist aber:

$$\varrho = \frac{E}{T}\cdot\eta,$$

wenn T den kleinsten Tragfähigkeitscoefficienten bezeichnet, und es ist das Brechungsmoment in m: $\varepsilon = \frac{2}{3}Eb\eta^3$. Diese Werthe substituirt geben:

$$Px + \tfrac{1}{2}px^2 + 2qb\int_0^x (x - x')\,\eta' dx' = \tfrac{2}{3}Tb\eta^2,$$

welche Gleichung bezeichnet, dass die Elasticitätsgrenze an der einen Oberfläche überall erreicht wird, nämlich an der oberen,

wenn der absolute Tragfähigkeitscoefficient kleiner als der rückwirkende ist, an der unteren Fläche, wenn das Entgegengesetzte stattfindet.

Differentiirt man hier zwei Mal nach einander in Bezug auf x, so erhält man:

$$P + px + 2qb\int_0^x \eta' dx' = \tfrac{2}{3}Tb\, d_x(\eta^2),$$

$$p + 2q\eta = \tfrac{2}{3}Tbd_x{}^2(\eta^2).$$

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit $2\eta d_x \eta = d_x(\eta^2)$ und integrirt, so erhält man:

$$p\eta^2 + \tfrac{4}{3}qb\eta^3 + C = \tfrac{1}{3}Tb(d_x(\eta^2))^2,$$

wo C eine näher zu bestimmende Constante ist. Man erhält aus der letzten Gleichung:

$$d_x(\eta^2) = 2\eta d_x\eta = \sqrt{\frac{4qb\eta^3 + 3p\eta^2 + 3C}{Tb}},$$

und hieraus:

$$x = 2\sqrt{Tb}\int_0^\eta \frac{\eta d\eta}{\sqrt{4qb\eta^3 + 3p\eta^2 + 3C}}.$$

Um die unbekannte Constante C zu finden, substituire man die obigen Werthe von x und von $d_x(\eta^2)$ in der Differentialgleichung:

$$P + px + 2q\int_0^x \eta' dx' = \tfrac{2}{3}Tb\, d_x(\eta^2),$$

und bemerke, dass:

$$d(\sqrt{4qb\eta^3 + 3p\eta^2 + 3C}) = \frac{6qb\eta^2 d\eta + 3p\eta d\eta}{\sqrt{4qb\eta^3 + 3p\eta^2 + 3C}}$$

$$= \frac{6qb\eta^2 d\eta}{\sqrt{4qb\eta^3 + 3p\eta^2 + 3C}} + \frac{3pdx}{2\sqrt{Tb}},$$

und folglich:

$$\int_0^x \eta' dx' = 2\sqrt{Tb}\int_0^\eta \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{4qb\eta^3 + 3p\eta^2 + 3C}}$$

$$= 2\sqrt{Tb}\left\{\frac{\sqrt{4qb\eta^3 + 3p\eta^2 + 3C}}{6qb} - \frac{px}{4qb\sqrt{Tb}}\right\}$$

$$= 2\sqrt{Tb}\left\{\frac{\sqrt{4qb\eta^3 + 3p\eta^2 + 3C} - \sqrt{3C}}{6qb} - \frac{px}{4qb\sqrt{Tb}}\right\}.$$

Diese Werthe substituirt geben die Gleichung:

$$P + px + \tfrac{2}{3}\sqrt{Tb}\left\{\sqrt{4qb\eta^3 + 3p\eta^2 + 3C} - \sqrt{3C} - \tfrac{3}{2}\frac{px}{\sqrt{Tb}}\right\}$$

$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{Tb}\sqrt{4qb\eta^3 + 3p\eta^2 + 3C}.$$

Hieraus findet man dann durch Reductionen:

$$P = \tfrac{2}{3}\sqrt{Tb}\sqrt{3C},\; C = \frac{3P^2}{4Tb}.$$

Dieser Werth von C substituirt, giebt die Gleichung der Oberflächen:

$$x = 2\sqrt{Tb}\int_0^\eta \frac{\eta d\eta}{\sqrt{4qb\eta^3 + 3p\eta^2 + \frac{9P^2}{4Tb}}}.$$

Um die Biegung des Körpers oder die Gleichung der gebogenen mittleren Axenschicht zu finden (Fig. 97), bezeichnen wir durch y die der horizontalen Abscisse $x = Bs$ entsprechende Ordinate sm der mittleren Axenschicht. Man hat dann, weil:

$$\varrho = \frac{E}{T}\cdot\eta,$$

$$\frac{1}{\varrho} = d_x{}^2 y = \frac{T}{E\eta},$$

woraus durch Integration, wenn bemerkt wird, dass, wenn $x = a$, auch $d_x y = o$, und wenn $x = o$, auch $\eta = o$ und $y = o$ ist:

$$d_x y = \frac{T}{E}\int_a^x \frac{dx}{\eta} = \frac{2T\sqrt{Tb}}{E}\int_{\frac{1}{2}b}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{4qb\eta^3 + 3p\eta^2 + \frac{9P^2}{4Tb}}},$$

$$y = \frac{4T^2 b}{E}\int_0^{\eta}\left\{\frac{\eta d\eta}{\sqrt{4qb\eta^3 + 3p\eta^2 + \frac{9P^2}{4Tb}}}\int_{\frac{1}{2}b}^{\eta}\frac{d\eta}{\sqrt{4qb\eta^3 + 3p\eta^2 + \frac{9P^2}{4Tb}}}\right\}.$$

Diese Formeln werden sehr vereinfacht, wenn man nicht auf das eigene Gewicht des Körpers Rücksicht zu nehmen braucht, d. h. wenn man q gleich Null setzen kann. Es wird alsdann die Gleichung der cylindrischen Oberflächen:

$$x = 2\sqrt{Tb}\int_0^{\eta}\frac{\eta d\eta}{\sqrt{3p\eta^2 + \frac{9P^2}{4Tb}}} = \frac{P}{p}\left(\sqrt{1 + \frac{4Tpb}{3P^2}\eta^2} - 1\right)$$

und hieraus:

$$2Px + px^2 = \tfrac{4}{3}Tb\eta^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel (Fig. 96), deren Hauptaxe mit der mittleren Axenschicht zusammenfällt und gleich $\frac{2P}{p}$ ist, und deren zweite Axe gleich:

$$\frac{P}{\sqrt{\frac{1}{3}Tpb}}.$$

Wenn auch $p = o$ ist, so wird diese Hyperbel zu einer Parabel, deren Gleichung:

$$\eta^2 = \frac{3P}{2Tb}x.$$

Wenn dagegen $P = o$ ist, so wird die Hyperbel zu zwei geraden Linien (Fig. 98), und es wird:

$$\operatorname{tang} CBA = \frac{\eta}{x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3p}{Tb}}.$$

Die Höhe h am eingemauerten Ende findet man gleich 2η, wenn man $x = a$ setzt. Braucht man auf das eigene Gewicht des Körpers keine Rücksicht zu nehmen, d. h. kann man $q = o$

setzen, so wird:

$$h = CD = \sqrt{\frac{3a(2P + pa)}{Tb}}.$$

Ist auch p = o, so wird

$$h = \sqrt{\frac{6Pa}{Tb}}.$$

Ist dagegen P = o, so wird

$$h = a\sqrt{\frac{3p}{Tb}}.$$

Nehmen wir jetzt an, die am freien Ende wirkende Last P sei gleich Null, und der Körper sei nur durch sein eigenes Gewicht und durch die gleichmässig vertheilte Belastung gebogen. Es wird alsdann die Gleichung der Oberflächen:

$$x = 2\sqrt{Tb}\int_o^\eta \frac{\eta d\eta}{\sqrt{4qb\eta^3 + 3p\eta^2}} = 2\sqrt{Tb}\int_o^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{4qb\eta + 3p}}$$

$$= \frac{\sqrt{Tb}}{qb}(\sqrt{4qb\eta + 3p} - \sqrt{3p}),$$

oder:

$$x^2 + \frac{2\sqrt{3Tbp}.x}{qb} = \frac{4Tb}{qb}\eta.$$

Dies ist (Fig. 100) die Gleichung einer Parabel CB, deren Axe senkrecht auf der mittleren Axenschicht AB ist.

Der Scheitelpunkt der Parabel wird ausserhalb des Körpers in F liegen, wo

$$BE = \frac{\sqrt{3Tbp}}{qb},\ EF = \frac{3p}{4Tb^2q}.$$

Der Parameter der Parabel ist gleich $\frac{4Tb}{qb}$. Die Höhe h am eingemauerten Ende findet man, wenn man x = a setzt:

$$h = CD = 2\eta = \frac{a}{2Tb}(qba^2 + 2\sqrt{3Tbp}).$$

Suchen wir jetzt die Gleichung der gebogenen mittleren Axenschicht, wenn q = o ist (Fig. 97). Man hat alsdann:

$$d_x^2 y = \frac{T}{E\eta} = \frac{T}{E} \cdot \frac{2\sqrt{Tb}}{\sqrt{3(2Px + px^2)}},$$

und hieraus durch Integration, wenn die Constanten so bestimmt werden, dass, wenn $x = a$, $d_x y = o$ ist, und wenn $x = o$, auch $y = o$ ist:

$$d_x y = \frac{2T\sqrt{Tb}}{E} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{3(2Px + px^2)}}$$

$$= \frac{2T}{E}\sqrt{\frac{Tb}{3p}} \log \operatorname{nat}\left(\frac{P + px + \sqrt{p^2x^2 + 2Ppx}}{P + pa + \sqrt{p^2a^2 + 2Ppa}}\right),$$

$$y = \frac{2T}{E}\sqrt{\frac{Tb}{3p}} \left\{ -\frac{\sqrt{px^2 + 2Px}}{\sqrt{p}} + \frac{P}{p} \log \operatorname{nat}\left(\frac{P + px + \sqrt{p^2x^2 + 2Ppx}}{P}\right) \right.$$

$$\left. + x \log \operatorname{nat}\left(\frac{P + px + \sqrt{p^2x^2 + 2Ppx}}{P + pa + \sqrt{p^2a^2 + 2Ppa}}\right) \right\}.$$

Setzt man hier $x = a$, so findet man den Pfeil des Herunterbiegens:

$$f = \frac{2T}{E}\sqrt{\frac{Tb}{3p}} \left\{ -\frac{\sqrt{pa^2 + 2Pa}}{\sqrt{p}} + \frac{P}{p} \log \operatorname{nat}\left(\frac{P + pa + \sqrt{p^2a^2 + 2Ppa}}{P}\right) \right\}.$$

Wenn auch $p = o$ und der Körper folglich nur durch ein am freien Endpunkte B angebrachtes Gewicht gebogen ist, so wird:

$$d_x^2 y = \frac{2T}{E}\sqrt{\frac{Tb}{6Px}},$$

woraus:

$$d_x y = \frac{4T\sqrt{Tb}}{E\sqrt{6P}} (\sqrt{x} - \sqrt{a}),$$

$$y = -\frac{4T\sqrt{Tb}}{E\sqrt{6P}} (a^{\frac{1}{2}}x - \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}),$$

$$f = -\frac{4T\sqrt{Tb}\,a^{\frac{3}{2}}}{3E\sqrt{6P}},$$

oder, wenn man statt T

$$h = \sqrt{\frac{6Pa}{Tb}}$$

einführt:

$$y = -\frac{24Pa^{\frac{3}{2}}}{Ebh^3}(a^{\frac{1}{2}}x - \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}),$$

$$f = -\frac{8Pa^3}{Ebh^3}.$$

Der Pfeil der Herunterbiegung ist folglich in diesem Falle doppelt so gross, als wenn alle Querschnitte des Körpers dieselbe Höhe hätten. Ist dagegen $P = o$ und der Körper also nur durch die gleichmässige Belastung gebogen, so wird (Fig. 99):

$$d_x^2 y = \frac{2T}{E} \cdot \sqrt{\frac{Tb}{3p}} \cdot \frac{1}{x},$$

und hieraus:

$$d_x y = \frac{2T}{E}\sqrt{\frac{Tb}{3p}} \log \text{nat} \left(\frac{x}{a}\right),$$

$$y = -\frac{2T}{E}\sqrt{\frac{Tb}{3p}} \left\{x - x \log \text{nat} \left(\frac{x}{a}\right)\right\},$$

$$f = -\frac{2T}{E}\sqrt{\frac{Tb}{3p}} \cdot a;$$

oder, wenn man statt T

$$h = a\sqrt{\frac{3p}{Tb}}$$

einführt:

$$f = -\frac{6pa^4}{Ebh^3}.$$

Der Pfeil der Herunterbiegung ist folglich in diesem Falle 4 Mal so gross, als wenn alle Querschnitte des Körpers dieselbe Höhe h hätten.

Nehmen wir jetzt an, es wäre nur $P = o$, und der Körper folglich nur durch sein eigenes Gewicht und durch die gleichmässig vertheilte Belastung gebogen. Es wird alsdann die Gleichung der mittleren Axenschicht (Fig. 101):

$$d_x^2 y = \frac{T}{E\eta} = \frac{4T^2 b}{E(qbx^2 + 2\sqrt{3Tbp\,x})},$$

und hieraus:

$$d_x y = \frac{1}{2\sqrt{3Tbp}} \log \text{nat} \left(\frac{x(qba + 2\sqrt{3Tbp})}{a(qbx + 2\sqrt{3Tbp})}\right),$$

$$y = \frac{x}{2\sqrt{3Tbp}} \log \text{nat} \left(\frac{x(qba + 2\sqrt{3Tbp})}{a(qbx + 2\sqrt{3Tbp})}\right)$$

$$- \frac{1}{qb} \log \text{nat} \left(\frac{qbx + 2\sqrt{3Tbp}}{2\sqrt{3Tbp}}\right).$$

Setzt man hier $x = a$, so findet man den Pfeil der Herunterbiegung:

$$f = - \frac{1}{qb} \log \text{nat} \left(\frac{qba + 2\sqrt{3Tbp}}{2\sqrt{3Tbp}}\right),$$

oder, wenn man den oben für diesen Fall gefundenen Werth von h:

$$h = \frac{a}{2Tb}(qba + 2\sqrt{3Tbp})$$

substituirt:

$$f = - \frac{1}{qb} \log \text{nat} \left(\frac{h\sqrt{Tb}}{a\sqrt{3p}}\right).$$

§. 192.

Betrachten wir jetzt einen in beiden Endpunkten horizontal unterstützten Körper (Fig. 102), welcher sowohl durch sein eigenes Gewicht, auf jeder Kubikeinheit q, wie durch eine gleichmässige Belastung, auf der Längeneinheit p, und endlich durch ein in der Mitte C angebrachtes Gewicht Q gebogen ist. Wir werden fortwährend der Einfachheit wegen die mittlere Axenschicht des Körpers als eine Ebene annehmen, und den Körper durch zwei verticale Ebenen, in dem Abstand b von einander, und durch zwei cylindrische und in Bezug auf die mittlere Axenschicht symmetrische Oberflächen begrenzt. Diese beiden Oberflächen werden ferner auch in Bezug auf eine verticale Ebene DE in der Mitte zwischen beiden Unterstützungspunkten symmetrisch sein. Wir brauchen daher nur die Gleichung der einen Hälfte AD der einen Oberfläche zu suchen. Nehmen wir den einen Unterstützungspunkt A als Anfangspunkt der Coordinaten an, die Abscisse $x = Am$

horizontal, die Ordinate $\eta = mr$ vertical. Der Druck auf jeden Unterstützungspunkt ist gleich:

$$\tfrac{1}{2}(Q + pl) + 2bq\int_0^{\frac{1}{2}l}\eta dx.$$

Die Biegung des Körpers wird jetzt dieselbe, als wäre er in der Mitte C festgehalten und jede Hälfte durch ihr eigenes Gewicht und durch die gleichmässige Belastung heruntergebogen, durch die auf die Endpunkte wirkenden Kräfte:

$$\tfrac{1}{2}(Q + pl) + 2bq\int_0^{\frac{1}{2}l}\eta dx$$

aber aufwärts gebogen. Die Gleichung jeder Hälfte der einen Oberfläche findet man dann, wenn man statt P die Grösse:

$$\tfrac{1}{2}(Q + pl) + 2bq\int_0^{\frac{1}{2}l}\eta dx,$$

$a = \frac{1}{2}l$ setzt und die Zeichen der Grössen p und q ändert. Man erhält dann:

$$x = 2\sqrt{Tb}\int_0^{\eta}\frac{\eta d\eta}{\sqrt{\frac{3P^2}{4Tb} - 3p\eta^2 - 4qb\eta^3}},$$

wo der obige Werth von P einzusetzen ist. Es ist aber in diesem Ausdruck von P das Gewicht des Körpers

$$4bq\int_0^{\frac{1}{2}l}\eta dx$$

noch unbekannt und kann nur annäherungsweise bestimmt werden, indem man erst unter den drei Grössen Q, p und q die eine oder die zwei kleinsten vernachlässigt und nach der so annäherungsweise bestimmten Form des Körpers das Gewicht bestimmt, und dann diese benutzt, um eine zweite genauere Bestimmung der Form und des Gewichtes des Körpers zu erhalten. — Die Gleichung jeder Hälfte der gebogenen mittleren Axenschicht wird:

$$d_x^2 y = \frac{T}{E\eta},$$

woraus:

$$y = \frac{4T^2b}{E}\int_0^\eta \left(\frac{\eta d\eta}{\sqrt{\frac{9P^2}{4Tb} - 3p\eta^2 - 4qb\eta^3}} \cdot \int_{\frac{1}{2}b}^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{\frac{9P^2}{4Tb} - 3p\eta^2 - 4qb\eta^3}} \right),$$

wo fortwährend:

$$P = \tfrac{1}{2}(Q + pl) + 2bq \int_0^{\frac{1}{2}l} \eta dx$$

zu setzen ist.

Braucht man auf das Gewicht des Körpers keine Rücksicht zu nehmen, so wird:

$$x = 2\sqrt{Tb}\int_0^\eta \frac{\eta d\eta}{\sqrt{\frac{9P^2}{4Tb} - 3p\eta^2}} = \frac{P}{p}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4Tpb}{3P^2}\eta^2}\right),$$

oder:

$$2Px - px^2 = \tfrac{4}{3}Tb\eta^2,$$

und, wenn man den Werth $P = \frac{1}{2}(Q + pl)$ substituirt:

$$Qx + px(l - x) = \tfrac{4}{3}Tb\eta^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren grosse Axe horizontal und gleich $\frac{Q}{p} + l$ und deren kleine Axe gleich

$$\frac{3(Q + pl)}{2\sqrt{3Tbp}}$$

ist. Der Längendurchschnitt des Körpers besteht dann aus zwei einander entgegengesetzten Theilen dieser Ellipse, und zwar so, als wäre der mittlere Theil dieser Ellipse im Abstande $\frac{Q}{2p}$ auf jeder Seite des Mittelpunktes senkrecht auf der grossen Axe abgeschnitten und die beiden übrigen Endstücken dann zusammengefügt.

Wenn auch $Q = o$ ist, so wird der Längendurchschnitt des Körpers eine ganze Ellipse.

Wenn dagegen $p = o$ ist, so wird die Gleichung jeder Hälfte des Längendurchschnittes:

$$\eta^2 = \frac{3Q}{4Tb} x,$$

und derselbe besteht folglich aus zwei entgegengesetzten Parabeln, deren Parameter gleich $\frac{3Q}{4Tb}$ sind.

Die Höhe des mittleren Querschnittes, DE = h, wird gefunden, wenn man $x = \frac{1}{2}l$ setzt. Es wird folglich, wenn fortwährend $q = o$ angenommen wird:

$$h = 2\eta = \sqrt{\frac{3l}{2Tb}(Q + \tfrac{1}{2}pl)}.$$

Die Differentialgleichung der gebogenen mittleren Axenschicht wird ferner in diesem Falle:

$$d_x^2 y = \frac{T}{E\eta} = \frac{2T\sqrt{Tb}}{E\sqrt{3(Q+pl)x - 3px^2}},$$

woraus, weil $d_x y = o$, wenn $x = \frac{1}{2}l$, und $y = o$, wenn $x = o$:

$$d_x y = \frac{4T\sqrt{Tb}}{E\sqrt{3p}} \left\{ \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\sqrt{2l(Q + \frac{1}{2}pl)}}{l\sqrt{p}}\right) - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\sqrt{(Q+pl)x - px^2}}{x\sqrt{p}}\right)\right\},$$

$$y = \frac{4T\sqrt{Tb}}{E\sqrt{3p}} \left\{ \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(Q+pl)x - px^2}{p}} + x \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\sqrt{2l(Q + \frac{1}{2}pl)}}{l\sqrt{p}}\right) + \frac{Q + pl - 2px}{2p} . \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\sqrt{(Q+pl)x - px^2}}{x\sqrt{p}}\right) - \frac{Q+pl}{2p} . \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Setzt man hier $x = \frac{1}{2}l$, so findet man den Pfeil der Herunterbiegung:

$$f = -\frac{4T\sqrt{Tb}}{E\sqrt{3p}} \left\{ \frac{Q+pl}{2p}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\sqrt{2l(Q + \frac{1}{2}pl)}}{l\sqrt{p}}\right)\right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{l(Q + \frac{1}{2}pl)}{2p}}\right\}$$

$$= -\frac{4T\sqrt{Tb}}{E\sqrt{3p}} \left\{ \frac{Q+pl}{2p} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{l\sqrt{p}}{\sqrt{2l(Q + \frac{1}{2}pl)}}\right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{l(Q + \frac{1}{2}pl)}{2p}}\right\}.$$

Wenn hier auch $Q = o$ wäre, so würde:

$$y = \frac{4T\sqrt{Tb}}{E\sqrt{3p}}\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{x(l-x)} + (\tfrac{1}{2}l - x)\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \sqrt{\frac{l-x}{x}}\right) - (l-x)\frac{\pi}{4}\right\},$$

$$f = -\frac{Tl\sqrt{Tb}}{E\sqrt{3p}}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Substituirt man hier den Werth von h:

$$h = \tfrac{1}{2}l\sqrt{\frac{3p}{Tb}},$$

woraus:

$$T = \frac{3pl^2}{4bh^2},$$

so findet man:

$$f = -\frac{3pl^4}{8Ebh^3}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Der Pfeil des Herunterbiegens ist folglich in diesem Falle $\frac{6}{5}(\pi - 2)$ Mal so gross als, als wenn die Höhen aller Querschnitte des Körpers gleich h sind.

c) Widerstand der Körper gegen Drehung.

§. 193.

Die Theorie der Drehung fester elastischer Körper ist noch sehr unvollkommen, und was bisher hierin von Navier, Cauchy, Lamé und Clapeyron geleistet worden ist, muss, weil es auf denselben Betrachtungen beruht, welche, wie im §. 134 erwähnt, anderswo zu Resultaten führen, die mit den Beobachtungen nicht übereinstimmen, was hier ebenfalls stattfindet, als weniger sicher betrachtet werden. Wir werden daher hier nur die einfachsten Fälle und die durch Beobachtungen bestätigten Sätze betrachten.

Es sei (Fig. 104) ABDE ein an der einen Endfläche AB befestigter gerader prismatischer Körper. Nehmen wir an, der Körper sei an der freien Endfläche DE durch mehrere in der Ebene

der Endfläche und folglich senkrecht auf die Seiten des prismatischen Körpers wirkende Kräftepaare gedreht. Irgend ein Querschnitt ab wird dann um einen Punkt c gedreht, so dass jede durch den Punkt c gehende Gerade, z. B. ab, die Lage a'b' einnimmt, wo der Winkel aca' $= \varphi$ der Drehungswinkel ist. Dieser Drehungswinkel φ hat offenbar einen mit dem Abstande des Querschnittes von der befestigten Endfläche veränderlichen Werth. Bezeichnen wir diesen Abstand Cc durch z, so wird folglich φ eine Function von z, $\varphi = f(z)$, welche für $z = o$, auch gleich Nnll wird. Betrachten wir jetzt einen im Abstande $cf = h$ von dem Querschnitte ab und folglich im Abstand $z + h$ von der befestigten Endfläche befindlichen Querschnitt de. Der Drehungswinkel sei hier φ', wo $\varphi' = f(z + h)$ ist. Denkt man sich jetzt die beiden Theile ABba und deED in ihrem gedrehten Zustande erstarrt, so wird hierdurch offenbar im Gleichgewichtszustande des Körpers nichts geändert. Man kann sich aber dann den Körper im Querschnitte ab, in der gedrehten Stellung dieses Querschnittes, statt in AB, festgehalten denken, und die in der Ebene DE wirkenden Kräftepaare in die damit parallele Ebene de versetzt, weil diese Ebenen jetzt unveränderlich verbunden sind. Der Drehungswinkel des Querschnittes de wird dann gleich dfd' — aca' $= \varphi' - \varphi = f(z + h) - f(z)$. Betrachtet man jetzt den im Abstande $Ci = h$ von der befestigten Endfläche gelegten Querschnitt gh, dessen Drehungswinkel folglich gleich $f(h)$ wird, so sieht man ebenso ein, dass dieser Drehungswinkel derselbe sein muss, als wären die gegebenen Kräftepaare unmittelbar in der Ebene gh angebracht. Dieser Drehungswinkel muss aber, weil die Körper ABhg und abed congruent sind, derselbe sein, als derjenige des Körpers abed, wenn dieser in ab festgehalten und in der Ebene de durch die gegebenen Kräftepaare gedreht wäre; oder es muss:

$$f(z + h) - f(z) = f(h)$$

sein. Hieraus geht aber hervor, dass $f(z)$ proportional mit $z = Az$ sein muss. *Es ist folglich der Drehungswinkel in jedem Quer-*

schnitte dem Abstand dieses Querschnittes von der befestigten Endfläche proportional. —

Bezeichnet man durch Θ den Drehungswinkel DFD′ der freien Endfläche, und durch l die Länge CF des prismatischen Körpers, so wird $\Theta = Al$ und folglich $\varphi = \frac{\Theta z}{l}$, und $\Delta\varphi = \frac{\Theta}{l}\Delta z$. Es geht hieraus hervor, dass zwei auf einander folgende Querschnitte gegen einander um einen mit $\frac{\Theta}{l}$ proportionalen Winkel gedreht worden sind, und dass folglich zwei Flächenelemente, welche vor der Drehung einander in diesen Querschnitten gegenüberlagen, nach der Drehung um eine Grösse gegen einander verschoben worden sind, welche proportional ist mit $\frac{\Theta}{l}$ und mit dem Abstand r der Elemente von der Drehungsaxe. Wollte man jetzt annehmen, dass bei kleinen Drehungen der durch diese Verschiebung hervorgerufene Widerstand proportional mit der Grösse der Verschiebung und mit der Fläche des verschobenen Elementes wäre, so würde man hieraus leicht die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts darstellen können. Bezeichnet man nämlich durch ψ den Winkel, welchen der Radius vector r des Flächenelementes mit einer in der Ebene des Querschnittes festen Geraden bildet, so wird das Flächenelement gleich $r dr d\psi$, und die durch seine Verschiebung hervorgerufene Widerstandskraft gleich $D\frac{\Theta}{l}r^2 dr d\psi$, wo D ein von der Materie des Körpers abhängiger Coefficient ist. Diese Kraft ist auf der Richtung des Radius vector r senkrecht und der Drehung entgegengesetzt wirkend. Ihre Componenten, parallel mit der den Winkel ψ bestimmenden festen Geraden, und senkrecht auf derselben, werden folglich gleich $D\frac{\Theta}{l}r^2 \sin\psi dr d\psi$ und $D\frac{\Theta}{l}r^2 \cos\psi dr d\psi$, und ihr Moment in Bezug auf den Mittelpunkt der Drehung wird gleich $D\frac{\Theta}{l}r^3 dr d\psi$. Damit Gleichgewicht stattfinden soll, müssen jetzt diese Kräfte die gegebenen Kräftepaare

im Gleichgewicht halten. Bezeichnet man durch M das Moment dieser Kräfte, und durch $R = f(\psi)$ die Gleichung des Umkreises des Querschnittes, so werden folglich die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes:

$$\frac{D\Theta}{l}\int_0^{2\pi}\sin\psi d\psi\int_0^{f(\psi)} r^2 dr = o, \quad \frac{D\Theta}{l}\int_0^{2\pi}\cos\psi d\psi\int_0^{f(\psi)} r^2 dr = o,$$

$$M = \frac{D\Theta}{r}\int_0^{2\pi} d\psi\int_0^{f(\psi)} r^3 dr.$$

Die zwei ersten Gleichungen bezeichnen, dass der Mittelpunkt der Drehung mit dem Schwerpunkte des Querschnittes zusammenfällt, weil $r \sin\psi$ und $r \cos\psi$ die zwei Coordinaten des Flächenelementes $r dr d\psi$ sind. Die durch die Schwerpunkte beider Grundflächen gehende Gerade wird folglich die Drehungsaxe des Körpers.

Die dritte Gleichung giebt den Drehungswinkel Θ.

Der Coefficient D wird der drehende Elasticitätscoefficient des Körpers genannt.

Ist der Querschnitt des Körpers ein Kreis, dessen Halbmesser gleich R ist, so wird $R = f(\psi)$ constant, und die Gleichung des Gleichgewichtes wird:

$$M = \frac{D\Theta}{l}\int_0^{2\pi} d\psi\int_0^{R} r^3 dr = \frac{\pi D\Theta R^4}{2l},$$

woraus wieder:

$$\Theta = \frac{2Ml}{\pi D R^4},$$

d. h. *der Drehungswinkel ist der vierten Potenz des Halbmessers des Cylinders umgekehrt proportional.*

Ist der Querschnitt ein Quadrat (Fig. 105), so kann man besonders den Werth des Integrals für jeden der acht mit ABC congruenten Triangel suchen. Es wird dann die Gleichung der Seite AB:

$$f(\psi) = \frac{a}{2\cos\psi},$$

wenn a die Seite des Quadrates bezeichnet, und es wird folglich das Integral in Bezug auf dieses Integral gleich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\psi \int_0^{f(\psi)} r^3 dr = \frac{a^4}{64} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\cos^4 \psi} = \frac{a^4}{48},$$

und folglich:

$$M = \frac{D\Theta a^4}{6l}, \quad \Theta = \frac{6Ml}{Da^4},$$

d. h. *der Drehungswinkel ist der vierten Potenz der Seite des Quadrats umgekehrt proportional.*

Diese Sätze sind freilich, insofern sie das Verhältniss des Drehungswinkels bei Körpern ähnlicher Querschnitte betreffen, durch die Beobachtungen bestätigt worden, aber nicht, wenn man die Drehungswinkel eines cylindrischen Körpers und eines parallelepipedischen Körpers, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, vergleicht. Man findet alsdann immer den Drehungswinkel bei viereckigen Körpern grösser, als er nach den obigen Formeln sein sollte, wenn der drehende Elasticitätscoefficient D durch Beobachtungen cylindrischer Körper bestimmt worden ist, oder, was dasselbe ist, der Werth von D, aus Beobachtungen viereckiger Stäbe gefunden, ist immer kleiner als derjenige aus Beobachtungen runder Stäbe.

Man hat durch Beobachtungen des Drehungswinkels folgende Werthe des drehenden Elasticitätscoefficienten gefunden, wenn der Zoll und das Pfund als Einheiten angenommen werden, und als Drehungswinkel Θ die Länge des entsprechenden Bogens, dessen Halbmesser die Einheit ist:

Eiche	D = 85000 bis 128000,
Gusseisen	D = 6000000 bis 9000000,
Schmiedeeisen	D = 900000 bis 1000000,
Stahl	D = 5000000 bis 8000000,
Kupfer, ausgezogenes . .	D = 3200000 bis 6000000,
Messing, ausgezogenes . .	D = 2000000 bis 3400000,
Glas	D = 3600000 bis 4500000.

Die Elasticitätsgrenze wird in den von der Drehungsaxe am meisten entfernten Fasern zuerst überschritten und hier auch der Körper zuerst zerrissen werden. Bezeichnet man diesen Abstand durch c, so ist die transversale Verschiebung zweier Punkte dieser Faser proportional mit $\frac{\Theta c}{l}$. Nimmt man wie vorher den Widerstand der Elemente gegen Drehung proportional mit dieser Verschiebung, so muss, wenn diese Verschiebung eine gewisse Grenze erreicht hat, auch die Elasticitätsgrenze des Körpers oder dessen Abreissungsgrenze erreicht sein. Bezeichnet man durch A einen von der Materie des Körpers abhängigen Coefficienten, so wird an dieser Grenze:

$$\frac{\Theta c}{l} = A,$$

folglich, wenn der Querschnitt des Körpers ein Kreis ist:

$$c = R, \quad \frac{2M}{\pi D R^3} = A, \quad M = \frac{\pi A D R^3}{2},$$

und, wenn der Querschnitt des Körpers ein Quadrat ist:

$$e = \tfrac{1}{2} a \sqrt{2}, \quad \frac{3M\sqrt{a}}{Da^3} = A, \quad M = \frac{ADa^3}{3\sqrt{2}}.$$

Das Moment M, welches einen Körper abdreht, ist folglich von der Länge des Körpers unabhängig, nur muss der Körper bei grösserer Länge erst um einen grösseren Winkel gedreht werden.

Der Coefficient AD wird, insofern es sich um die Elasticitätsgrenze handelt, der drehende Tragfähigkeitcoefficient des Körpers genannt, insofern es sich um eine Abdrehung handelt, der drehende Festigkeitscoefficient.

Die Werthe des drehenden Tragfähigkeitscoefficienten sind, wenn fortwährend der Zoll und das Pfund als Einheiten angenommen werden:

Eiche 200 bis 500,
Eisen, gegossenes 9000 bis 10000,
Eisen, geschmiedetes 15000 bis 25000.

Die Werthe des drehenden Festigkeitscoefficienten sind:

Eiche 2000 bis 5000,
Eisen, gegossenes 25000 bis 60000,
Eisen, geschmiedetes 50000 bis 70000,
Stahl 100000 bis 120000,
Kupfer, gegossenes 29000,
Zinn, gegossenes 9600,
Blei, gegossenes 6700.

Es ist jedoch zu bemerken, dass alle diese Coefficienten der Drehung, und insbesondere die drehenden Tragfähigkeitscoefficienten, weniger genau bestimmt sind.

Cap. IV.

Gesetze der Bewegung fester elastischer Körper.

§. 194.

Um die im ersten Abschnitte entwickelten allgemeinen Gesetze der Bewegnng auf feste elastische Körper anzuwenden, muss man, ausser der Schwere des Körpers, auch die gegenseitigen Reactionen der Molekülen in Betracht ziehen. Um dieses zu thun, muss man die dynamische Arbeit dieser Kräfte für jeden Fall berechnen können.

Bezeichnen wir durch R die Molekularkraft, welche zwischen zwei Molekülen stattfindet, durch r den Abstand dieser Molekülen. Die Kraft R wird dann immer in der Richtung dieses Abstandes stattfinden. Bezeichnen wir durch ds und ds' die von den zwei Molekülen beschriebenen Bahnen, durch φ und φ' die Winkel, welche diese mit der Linie r bilden, so wird die dynamische Arbeit des ersten Punktes: $\int R \cos\varphi . ds$, und diejenige des zweiten Punktes: $\int R \cos\varphi' ds'$. Die ganze dynamische Arbeit wird folglich:

$$\int R(\cos\varphi \, ds + \cos\varphi' \, ds').$$

Es ist aber jetzt:

$$dr = d_s r.ds + d_{s'} r.ds' = \cos\varphi ds + \cos\varphi' ds',$$

wenn die Molekülarkraft abstossend wirkt und folglich r zu vergrössern strebt; und

$$-dr = \cos\varphi ds + \cos\varphi' ds',$$

wenn die Molekülarkraft anziehend wirkt. Die ganze dynamische Arbeit der Molekülarkraft wird folglich: $\int Rdr$, wenn die Molekülarkraft abstossend ist, und: $-\int Rdr$, wenn die Molekülarkraft anziehend ist.

Die dynamische Arbeit der Molekülarkraft ist folglich positiv, wenn die Bewegung längs der Linie r in der Richtung der Kraft stattfindet; oder mit anderen Worten, die dynamische Arbeit der Molekülarkraft ist negativ, wenn das System aus dem Zustand des Gleichgewichts gebracht wird, positiv, wenn es dazu zurückkehrt. Sie ist unabhängig von der Richtung der Bewegung, und man braucht folglich bei der Berechnung dieser Arbeit nur die relative Bewegung der beiden Punkte zu betrachten.

Wenn die Elasticitätsgrenze des Körpers nicht überschritten wird, d. h. wenn die Kraft R nur eine Function des Abstandes ist, so wird die dynamische Arbeit $\int Rdr$ zwischen zwei Zeitpunkten, wo r denselben Werth hat, verschwinden. Denn es besteht dann dieses Integral aus zwei vollkommen gleichen Theilen mit entgegengesetztem Zeichen, dem einen Theile, wenn der Abstand r vergrössert, dem anderen, wenn er wieder vermindert wird, und die widerstehende Arbeit des einen Theiles wird genau die bewegende Arbeit des anderen Theiles aufheben. Ein zusammengedrückter oder ausgedehnter Körper wird folglich, wenn er seine ursprüngliche Form wieder erhalten hat, genau dieselbe Arbeit zurückgegeben haben, welche zu seinem Zusammendrücken oder zu seiner Ausdehnung angewendet war.

Wird die Elasticitätsgrenze des Körpers überschritten, so wird das Integral $\int Rds$ gleich der Differenz sein zwischen der widerstehenden Arbeit und der bewegenden Arbeit der Molekülarkraft.

wenn die Molekülen erst aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht werden, und wenn sie nachher dazu zurückkehren.

Es wird dann R kleiner, wenn r zum ursprünglichen Werthe zurückkehrt, und die bewegende Arbeit wird folglich immer kleiner als die widerstehende Arbeit sein. Bei einer Reihe von Oscillationen der Molekülen werden dann die Amplituden dieser Oscillationen immer kleiner, und für jede volle Oscillation wird ein Ueberschuss von widerstehender Arbeit da sein.

Die totale dynamische Arbeit wird folglich die Summe einer Reihe, deren Glieder abwechselnde Zeichen haben und zuletzt immer abnehmen. Der Nennwerth dieser Reihe wird dann immer kleiner als derjenige des grössten Gliedes sein, oder die totale Arbeit der Molekülarkraft, wie lange auch die Schwingungen gedauert haben, wird immer kleiner, als die zu der, während der Bewegung des Körpers, grössten Ausdehnung oder Zusammendrückung angewandte Arbeit.

Wenn man folglich einen festen Körper braucht, um die dynamische Arbeit irgend einer Kraft von einem Körper auf einen andern zu übertragen, so wird diese nur sehr wenig dadurch vermindert werden, wenn die Zeit, während welcher man die Bewegung betrachtet, so gross ist, dass man mit Rücksicht auf die während dieser Zeit ausgeführte Arbeit diejenige zur grössten Ausdehnung oder Zusammendrückung des festen Körpers ein für allemal angewandte Arbeit, und die dadurch hervorgerufene Veränderung der lebendigen Kraft dieses Körpers vernachlässigen kann.

§. 195.

Betrachten wir jetzt eine in gerader Linie geordnete Reihe von Molekülen, welche durch Molekülarkräfte zwischen je zwei auf einander folgenden mit einander verbunden seien; eine solche Reihe wird eine materielle Linie genannt. Diese Linie kann auch einen geraden prismatischen oder cylindrischen Körper darstellen, wenn statt der Molekülen die auf der Axe senkrechten Schichten gesetzt werden, und wenn die in diesen Schichten selbst hervorgerufenen

Kräfte vernachlässigt werden, was immer geschehen kann, wenn die Dicke des Cylinders sehr klein in Bezug auf dessen Länge ist.

Nehmen wir an, die Kräfte P und P′ wirken auf die beiden Enden dieser Linie, oder dieses Cylinders, in entgegengesetzter Richtung; nehmen wir ferner an, dass die Bewegung durch unmerkliches Wachsen der Geschwindigkeit hervorgebracht ist, so dass man folglich die Variationen der lebendigen Kraft des Systems vernachlässigen kann. Die dynamische Arbeit der Molekülarkräfte wird dann negativ gleich: $-\Sigma\int R dr$, weil das System entweder ausgedehnt oder zusammengedrückt wird, folglich aus dem Zustande des Gleichgewichts gebracht wird. Man hat dann in Folge des Satzes der lebendigen Kraft:

$$\int P ds + \int P' ds' - \Sigma\int R dr = 0,$$

wenn beide Kräfte P und P′ eine bewegende Arbeit hervorbringen, oder:

$$\int P ds - \int P' ds' - \Sigma\int R dr = 0,$$

wenn die eine Kraft P eine bewegende Arbeit, die andere Kraft P′ eine widerstehende Arbeit hervorbringen, d. h. wenn der Angriffspunkt dieser Kraft sich in der der Kraft entgegengesetzten Richtung bewegt.

Will man wissen, wie sich die dynamische Arbeit der beiden Kräfte

$$\int P ds \pm \int P' ds' = \Sigma\int R dr$$

unter den verschiedenen Molekülarkräften vertheilt, so muss man die verschiedenen, in der Summe $\Sigma\int R dr$ enthaltenen Integrale: $\int R dr$, $\int R' dr'$, $\int R'' dr''$...... mit einander vergleichen. Ist die Bewegung, wie angenommen, durch unmerkliches Wachsen der Geschwindigkeit hervorgebracht, und entweder constant, oder doch nur langsam variirend, so müssen die Kräfte R, R′, R″ u. s. w. unter einander gleich sein. Es ist jetzt:

$$\int R dr = \int \frac{R}{d_r R} dR; \quad \int R' dr' = \int \frac{R'}{d_r R'} dR', \text{ u. s. w.}$$

wo folglich alle Integrale zwischen denselben Grenzen genommen werden. Die obigen Integrale würden folglich gleich sein, wenn $d_r R = d_{r'} R' = d_{r''} R''$ wäre, d. h. wenn die Steifigkeit der materiellen Linie, oder des Cylinders, überall von gleicher Grösse wäre. Ist dagegen z. B. $d_r R < d_{r'} R'$, so wird:

$$\int \frac{R}{d_r R} dR > \int \frac{R'}{d_{r'} R'} dR',$$

oder: $\int R dr > \int R' dr'$

sein, d. h. die dynamische Arbeit der Molekülarkräfte wird desto grösser sein, je kleiner ihre Steifigkeit ist.

Ein Umdrehungskörper von verschiedener Dicke kann, wenn die grösste Dicke sehr klein in Bezug auf die Länge ist, als eine solche materielle Linie betrachtet werden, deren Steifigkeit in jedem Punkte mit dem Flächeninhalte des Querschnittes proportional ist. Wenn die Molekülarkräfte nicht gleich sind, sondern ein konstantes Verhältniss zwischen ihnen stattfindet, wenn z. B. der cylindrische Körper aus mehreren auf einander gesetzten Theilen von verschiedener Elasticität besteht, so dass:

$$R' = a' R, \quad R'' = a'' R, \quad R''' = a''' R,$$

so wird:

$$\int R dr = \int \frac{R}{d_r R} \cdot dR,$$

$$\int R' dr' = a'^2 \int \frac{R}{d_{r'} R'} dR,$$

$$\int R'' dr'' = a''^2 \int \frac{R}{d_{r''} R''} dR, \ldots$$

wo alle Integrale zwischen denselben Grenzen genommen werden. Die dynamische Arbeit des ganzen Systems wird dann im umgekehrten Verhältniss der Steifigkeit, und im geraden Verhältniss des Quadrates der Molekülarkräfte vertheilt werden.

§. 196.

Kann man die Variationen der lebendigen Kraft des Systems nicht vernachlässigen, so kann man folgender Weise die Gleichung der lebendigen Kraft finden. Es sei V die Geschwindigkeit des

Schwerpunktes des Körpers, v die relative Geschwindigkeit eines Moleküls in Bezug auf den Schwerpunkt, p das Gewicht dieses Moleküls. Es wird dann nach §. 89 die lebendige Kraft des ganzen Systems in zwei Theile getheilt werden können, den einen, welcher nur die Bewegung des Schwerpunkts berücksichtigt, den andern, welcher die Bewegung der Theile in Bezug auf den Schwerpunkt berücksichtigt. Man hat folglich die Gleichung:

$$\int Pds - \int P'ds' - \Sigma \int Rdr = \frac{V^2}{2g} \Sigma p + \frac{1}{2g} \Sigma pv^2,$$

wenn die Kraft P' als eine widerstehende Kraft angesehen wird. Da hier die Arbeit der Molekülarkräfte $-\Sigma\int Rdr$ immer negativ ist, weil die Molekülen aus dem Zustand der Ruhe in Bewegung gebracht worden sind, so kann nur die bewegende Arbeit, $\int Pds$, derjenigen der widerstehenden Kraft, $\int P'ds'$, gleich sein, d. h. die Arbeit kann nur ohne Verlust fortgepflanzt werden, wenn $V = o$, $v = o$ und $\int Rdr = o$, folglich nur wenn die Elasticitätsgrenze nirgends überschritten worden ist, und kein Punkt irgend eine Geschwindigkeit hat. Ist dagegen $\int Rdr$ nicht gleich Null, was eintreffen wird, wenn die Elasticitätsgrenze überschritten worden ist, oder der Körper noch nicht zu seiner ursprünglichen Form zurückgekehrt ist, oder ist v nicht gleich Null, welches eintreffen wird, wenn die inneren Schwingungen des Körpers nicht aufgehört haben, so kann nie die Arbeit ohne Verlust fortgepflanzt werden. Dies erklärt, warum, wenn lange Stangen angewendet werden, um eine kleine Quantität dynamischer Arbeit fortzupflanzen, ein grosser Theil dieser Arbeit durch die Schwingungen, welche in der Stange fortwährend stattfinden, verloren geht.

Wir werden durch etliche Beispiele zeigen, wie man in besonderen Fällen diese Schwingungen des Körpers berechnen kann.

§. 197.

Wenn wir im Anfange des vorigen Capitels die durch irgend eine Last bewirkte Ausdehnung oder Zusammendrückung prismati-

scher Körper suchten, nahmen wir keine Rücksicht auf den Einfluss der von der Last errungenen Geschwindigkeit, oder, was dasselbe ist, wir berechneten nur die Spannung oder den Druck, welcher nöthig war, um den Körper durch eine gegebene Ausdehnung oder Zusammendrückung im Gleichgewichte zu erhalten. Die Bewegung der Last wird jetzt bewirken, dass die auf jene Weise berechnete Ausdehnung oder Zusammendrückung überschritten wird, wodurch dann Schwingungen erzeugt werden.

Wir werden hier nur den Fall betrachten, wenn die Schwere des prismatischen Körpers in Bezug auf die am freien Endpunkte wirkende Kraft vernachlässigt werden kann.

Es sei l die Länge des gegebenen, in einem Ende senkrecht befestigten prismatischen Körpers, ω dessen Querschnitt, E der Elasticitätscoefficient, Q die in der Richtung des Prisma's wirkende Last. Wir werden annehmen, dass diese Last ohne ursprüngliche Geschwindigkeit auf den Körper zu wirken anfängt. Es bezeichne ferner x den ursprünglichen Abstand irgend eines Querschnittes von der festen Endfläche, ξ dessen Verschiebung, λ die Verschiebung der freien Endfläche, folglich $\xi = \lambda$, wenn $x = l$; $v = d_t\lambda$ die Geschwindigkeit der belasteten Endfläche.

Betrachtet man jetzt zwei auf einander folgende Querschnitte im Abstande x und $x + dx$ von der festen Endfläche, so wird die Verschiebung des ersten Querschnittes gleich ξ, diejenige des zweiten gleich $\xi + d\xi$, und folglich die relative Verschiebung dieser Querschnitte gleich $d\xi$. Die hierdurch zwischen den Querschnitten hervorgerufene Molekülarkraft wird dann gleich:

$$R = E\omega d_x\xi.$$

Es ist ferner der ursprüngliche Abstand der Querschnitte: $r_0 = dx$, der jetzige folglich: $r = dx(1 + d_x\xi)$, und: $dr = dx \, . \, d(d_x\xi)$. Die dynamische Arbeit der zwischen diesen Querschnitten stattfindenden Molekülarkraft wird folglich:

$$\int R dr = E\omega dx \int d_x\xi d(d_x\xi) = E\omega dx . \tfrac{1}{2}(d_x\xi)^2,$$

und die Summe der dynamischen Arbeiten aller Molekülarkräfte:

$$\Sigma\int Rdr = \tfrac{1}{2}E\omega\int_0^l (d_x\xi)^2 dx.$$

Weil man die eigene Schwere des prismatischen Körpers vernachlässigt, und folglich auch die während der Schwingungen entwickelte lebendige Kraft dieses Körpers als verschwindend gegen diejenige der am freien Endpunkte wirkenden Last Q betrachtet, kann man auch in jedem Augenblicke die Spannung in jedem Querschnitte des Prisma's als gleich annehmen. Es wird dann in jedem Augenblicke die Verschiebung jedes Querschnittes proportional mit dessen Abstand von der festen Endfläche sein, oder:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\lambda}{l}, \quad \xi = \frac{\lambda}{l}x,$$

woraus: $d_x\xi = \frac{\lambda}{l}$

Substituirt man diesen Werth, so findet man:

$$\Sigma\int Rdr = \tfrac{1}{2}E\omega\int_0^l \frac{\lambda^2}{l^2}dx = \tfrac{1}{2}\frac{E\omega\lambda^2}{l}.$$

Die dynamische Arbeit der Last Q wird: $Q\lambda$, und die ganze entwickelte dynamische Arbeit wird folglich, weil diejenige der Last Q eine bewegende, diejenige der Molekülarkräfte eine widerstehende Arbeit ist:

$$Q\lambda - \tfrac{1}{2}\frac{E\omega\lambda^2}{l}$$

Die lebendige Kraft der Last Q ist: $\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2$, wo $v = d_t\lambda$; die lebendige Kraft des prismatischen Körpers wird, wie oben bemerkt, vernachlässigt werden können.

Die Gleichung der lebendigen Kraft wird folglich:

$$Q\lambda - \tfrac{1}{2}.\frac{E\omega\lambda^2}{l} = \tfrac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2.$$

Hieraus findet man:

$$v = \sqrt{2g\lambda - \frac{gE\omega}{Ql}\lambda^2}.$$

Substituirt man jetzt $v = d_t\lambda$, so findet man:

$$d_t\lambda = \sqrt{2g\lambda - \frac{gE\omega}{Ql}\lambda^2},$$

woraus:

$$dt = \frac{d\lambda}{\sqrt{2g\lambda - \frac{gE\omega}{Ql}\lambda^2}}.$$

Integrirt man hier und bemerkt, dass die Verschiebung λ mit der Zeit t verschwinden muss, so findet man endlich:

$$t = \sqrt{\frac{Ql}{gE\omega}} \text{ arc} \left(\cos = 1 - \frac{E\omega\lambda}{Ql}\right)$$

$$\text{oder: } \lambda = \frac{Ql}{E\omega} \left\{ 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{gE\omega}{Ql}} \,.\, t\right) \right\}.$$

Es geht aus diesen Formeln hervor, dass die Verschiebung λ verschwindet, wenn:

$$t = 2n\pi \sqrt{\frac{Ql}{gE\omega}},$$

wo n eine willkührliche ganze Zahl ist. Die Zeit einer ganzen Schwingung wird folglich gleich: $2\pi\sqrt{\frac{Ql}{gE\omega}}$.

Der Maximumswerth der Verschiebung wird ferner stattfinden, wenn $t = (2n + 1)\pi\sqrt{\frac{Ql}{gE\omega}}$, und sie wird dann gleich: $2 \,.\, \frac{Ql}{E\omega}$ sein, welcher Ausdruck folglich die Amplitude der Schwingungen bezeichnet. Die grösste Verschiebung wird folglich gleich dem Doppelten der stetigen Verschiebung sein. Damit während der Schwingungen die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, darf folglich die Last Q nicht grösser als die Hälfte der im vorigen Capitel entwickelten, der Elasticitätsgrenze im Gleichgewichtszustande entsprechenden Belastung sein.

§. 198.

Betrachten wir jetzt die transversalen Schwingungen eines an dem einen Ende befestigten prismatischen Stabes, welcher durch eine am freien Ende angebrachte Last Q gebogen wird. Wir werden auch hier annehmen, dass man auf die eigene Schwere des prismatischen Stabes keine Rücksicht zu nehmen braucht, und dass Q ohne Anfangsgeschwindigkeit zu wirken anfängt.

Betrachten wir jetzt die Figur 60, und benützen wir die im §. 163 angewandten Bezeichnungen. Wir haben daselbst die durch die Biegung im Punkte (u, v) des Querschnittes ama'm' hervorgerufene Widerstandskraft gleich:

$$R = \text{Edudv}\,\frac{v}{\varrho}$$

gefunden.

Der Abstand zweier auf einander folgenden Querschnitte, welcher ursprünglich gleich dx war, ist im Punkte (u, v) in $dx \,.\, \frac{v}{\varrho}$ verlängert worden. Es ist folglich:

$$r = dx\,\frac{v}{\varrho}$$

und

$$dr = dx d\left(\frac{v}{\varrho}\right) = -\frac{vdx\,d\varrho}{\varrho^2}.$$

Es wird folglich die elementäre Arbeit der hier hervorgerufenen Widerstandskraft gleich:

$$Rdr = -E\,\frac{v^2}{\varrho^3}\,dudvdxd\varrho.$$

Integrirt man hier wie in §. 163 in Bezug auf u von u = o bis u = b und in Bezug auf v von v = o bis $v = f_1$ (u) und von v = o bis $v = f_2$ (u), so findet man die elementäre Arbeit der durch die Biegung hervorgerufenen Widerstandskräfte zwischen den zwei auf einander folgenden Querschnitten:

$$\Sigma Rdr = -\frac{dxd\varrho}{\varrho^3}\,.\,E\left(\int_0^b du\int_0^{f_1(u)} v^2dv + \int_0^b du\int_0^{f_2(u)} v^2dv\right) = -\frac{\varepsilon dxd\varrho}{\varrho^3},$$

wo ε das Biegungsmoment des prismatischen Stabes bezeichnet.

Der Krümmungshalbmesser ϱ ist nach §. 167 durch die Formel:

$$\frac{\varepsilon}{\varrho} = P\,(a-x), \text{ woraus } \varrho = \frac{\varepsilon}{P\,(a-x)},$$

bestimmt, wo P die im Gleichgewichte am freien Endpunkte wirkende Last, oder die an diesem in jedem Augenblicke stattfindende Tension bezeichnet. Diese Tension ist von der schwingenden Last Q verschieden; sie hängt mit dem Pfeil des Herunterbiegens f durch die Formel: $f = \frac{P}{\varepsilon}\,.\,\frac{a^3}{3}$ zusammen, wor-

aus: $P = \frac{3\varepsilon f}{a^3}$. Substituirt man diesen Werth, so findet man:

$$\varrho = \tfrac{1}{3}\frac{a^3}{(a-x)f},$$

$$d\varrho = -\tfrac{1}{3}\cdot\frac{a^3}{(a-x)}\,\frac{df}{f^2}.$$

Sustituirt man diese Werthe, so erhält man:

$$\Sigma Rdr = -\frac{\varepsilon dx d\varrho}{\varrho^3} = q\varepsilon\frac{(a-x)^2 . f}{a^6}\,dxdf.$$

Integrirt man hier in Bezug auf x von $x = o$ bis $x = a$, so findet man die gesammte elementare dynamische Arbeit:

$$\Sigma Rdr = \frac{3\varepsilon}{a^3}\,.\,fdf.$$

Hieraus erhält man dann durch Integration von $f = o$ an die dynamische Arbeit aller Molekülarkräfte gleich:

$$\Sigma\int Rdr = \frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon . f^2}{a^3}.$$

Die dynamische Arbeit der Last Q wird Qf, und die ganze während der Biegung entwickelte dynamische Arbeit wird folglich:

$$Qf - \tfrac{3}{2}\frac{\varepsilon f^2}{a^3}.$$

Die lebendige Kraft der Last Q ist $\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2$, wenn $v = d_t f$ die Geschwindigkeit des freien Endpunktes bezeichnet. Die Gleichung der lebendigen Kraft wird folglich:

$$Qf - \tfrac{3}{2}\frac{\varepsilon f^2}{a^3} = \tfrac{1}{2}\frac{Q}{g}(d_t f)^2,$$

woraus:

$$d_t f = \sqrt{2gf - \frac{3g\varepsilon}{Qa^3}f^2}.$$

Hieraus findet man dann:

$$dt = \frac{df}{\sqrt{2gf - \frac{3g\varepsilon}{Qa^3}f^2}}.$$

Integrirt man hier und bemerkt, dass die Biegung f mit der Zeit t verschwinden soll, so findet man endlich:

$$t = \sqrt{\frac{Qa^3}{3g\varepsilon}}\,\mathrm{arc}\left(\cos = 1 - \frac{3\varepsilon f}{Qa^3}\right),$$

oder:

$$f = \frac{Qa^3}{3\varepsilon}\left\{1 - \cos\left(\sqrt{\frac{3g\varepsilon}{Qa^3}}\,t\right)\right\}.$$

Man findet hieraus wie im vorigen Paragraphen die Zeit einer Schwingung gleich: $2\pi\sqrt{\frac{Qa^3}{3g\varepsilon}}$.

Der Maximumswerth der Biegung wird gleich: $\frac{2Qa^3}{3\varepsilon}$, oder gleich der doppelten stetigen Biegung.

§. 199.

Betrachten wir den Fall, dass zwei materielle Linien in der Richtung ihrer Länge sich bewegen und auf einander stossen. Es seien P und P′ die Gewichte dieser Linien, V_o und V'_o die Geschwindigkeiten ihrer Schwerpunkte vor dem Stosse, V und V′ die Geschwindigkeiten nach dem Stosse, p und p′ die Gewichte der einzelnen Molekülen, v und v′ ihre Geschwindigkeiten relativ zur Bewegung des Schwerpunktes, welche vor dem Stosse gleich Null waren, $-\int R dr$ und $-\int R' dr'$ die dynamischen Arbeiten des Zusammendrückens oder der Ausdehnung, welche in den beiden Linien hervorgebracht werden. Es wird alsdann die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$\frac{PV^2}{2g} + \Sigma\frac{pv^2}{2g} - \frac{PV_o^2}{2g} + \frac{P'V'^2}{2g} + \Sigma\frac{p'v'^2}{2g} - \frac{P'^2V'^2}{2g} = -\Sigma\int R dr - \Sigma\int R' dr';$$

oder:

$$\frac{PV_o^2}{2g} + \frac{P'V_o'^2}{2g} = \frac{PV^2}{2g} + \frac{P'V'^2}{2g} + \Sigma\frac{pv^2}{2g} + \Sigma\frac{p'v'^2}{2g} + \Sigma\int R dr + \Sigma\int R' dr'.$$

Damit die ursprüngliche lebendige Kraft des ganzen Systems:

$$\frac{PV_o^2}{2g} + \frac{P'V_o'^2}{2g},$$

nicht grösser sei, als die lebendige Kraft des Systems nach dem Stosse:

$$\frac{PV^2}{2g} + \frac{P'V'^2}{2d},$$

ist es folglich nothwendig, dass nach dem Stosse weder Verdichtungen noch Verdünnungen stattfinden, noch relative Geschwindigkeiten der Molekülen des Körpers.

Nachdem die materiellen Linien sich wieder von einander getrennt haben, können die Geschwindigkeiten V und V′ nicht mehr geändert werden, wenn keine neuen Kräfte zu wirken anfangen. Damit folglich durch den Stoss die lebendige Kraft des Systems nicht vermindert werden soll, ist es nicht hinreichend, dass die Elasticitätsgrenze nirgends überschritten wird; es dürfen auch im Augenblicke der Trennung beider Linien keine inneren Schwingungen stattfinden.

Dasselbe wird auch bei dem Stosse von Körpern beliebiger Form stattfinden, wenn nur die Richtung der Bewegungen beider Körper senkrecht auf der gemeinschaftlichen Berührungsebene ist. Die Summe der lebendigen Kräfte beider Körper wird nur dann nach dem Stosse unverändert gefunden werden, wenn keine Schwingungen irgend einer Art in den Körpern stattfinden.

Wenn z. B. eine Kugel sich senkrecht gegen die ebene Oberfläche eines befestigten Körpers mit einer Geschwindigkeit bewegt, welche nicht grösser ist, als dass während des Stosses weder die Elasticitätsgrenze der Kugel, noch diejenige des gestossenen befestigten Körpers überschritten wird, so würde doch nur dann die Kugel mit derselben Geschwindigkeit zurückprallen, wenn weder in der Kugel, noch in dem gestossenen Körper nach der Trennung Schwingungen stattfinden. Im entgegengesetzten Falle wird dagegen ein gewisser Theil der lebendigen Kraft der Kugel in diesen Schwingungen verloren gehen. Die in den meisten Lehrbüchern gegebene Definition der Elasticität, nach welcher nur dann die Kugel und der gestossene Körper vollkommen elastisch genannt werden, wenn die erste mit der ursprünglichen Geschwindigkeit wieder zurückprallt, ist daher ganz unlogisch, indem diese Bedingung nicht von der Materie der beiden Körper, sondern vielmehr von deren Form und Grösse abhängt.

Obgleich man die Grösse jenes durch die fortgesetzten Schwingungen im Innern der gestossenen Körper hervorgebrachten Verlustes der lebendigen Kraft im Allgemeinen, nach dem jetzigen

Zustand der Wissenschaft, nicht berechnen kann, so ist man doch oft im Stande, bei dem Vergleichen mehrerer Fälle den grösseren oder kleineren Verlust anzugeben. So wird in dem eben angeführten Beispiele des Stosses einer Kugel gegen einen ebenen Körper, der verlorne Theil der lebendigen Kraft zwischen der Kugel und dem gestossenen Körper getheilt werden, und der vom letzteren absorbirte Antheil wird desto kleiner sein, je grösser seine Steifigkeit ist. Die Kugel wird daher, unter übrigens gleichen Umständen, desto weniger beim Zurückprallen an Geschwindigkeit verlieren, je grösser die Steifigkeit des gestossenen Körpers ist. Ebenso findet man, dass, je grösser die Steifigkeit der Kugel bei derselben Schwere ist, und je kleiner die Kugel ist, mit desto grösserer Geschwindigkeit werden sich die Schwingungen in ihr fortpflanzen, desto weniger wird noch davon in ihr zurückbleiben, wenn sie die Ebene verlässt, und desto weniger wird sie folglich beim Zurückprallen verloren haben.

§. 200.

Wenn die einander anstossenden Körper sich ganz frei bewegen, so wird nach §. 90 der gemeinschaftliche Schwerpunkt der beiden Körper sich so bewegen, wie wenn beide Massen in ihm vereinigt, und alle Kräfte an ihm angebracht wären. Diese Kräfte sind hier die ursprünglichen Kräfte, welche jedem Körper die vor dem Stosse stattfindende Geschwindigkeit mitgetheilt haben, und die Molekülarkräfte, welche durch den Stoss und durch die daraus folgende Formveränderung der Körper hervorgerufen werden. Da diese letzten Kräfte zwei und zwei gleich und entgegengesetzter Richtung sind, so werden sie, am gemeinschaftlichen Schwerpunkte angebracht, einander genau aufheben. Es wird folglich die stattfindende gleichförmige Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes der beiden einander anstossenden Körper durch den Stoss nicht geändert werden.

Bezeichnen V_0 und V_0' die constanten Geschwindigkeiten der beiden Körper vor dem Stosse, so ist:

$$\frac{PV_0 + P'V_0'}{P + P'}$$

die Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes. Bezeichnen V und V' die respectiven Geschwindigkeiten der beiden Körper nach dem Stosse, so wird:

$$\frac{PV + P'V'}{P + P'}$$

die Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes nach dem Stosse sein. Diese soll jetzt gleich der vor dem Stosse stattfindenden sein, und man hat folglich:

$$PV_0 + P'V_0' = PV + P'V'.$$

Die Summe der Bewegungsmomente der beiden Körper wird folglich durch den Stoss nicht verändert werden.

Durch diese Gleichung, in Verbindung mit der im vorigen Paragraphen entwickelten Gleichung der lebendigen Kraft, können die nach dem Stosse stattfindenden Geschwindigkeiten V und V' bestimmt werden.

Wir werden hier nur den einfachsten Fall betrachten, wenn nach der Trennung beider Körper keine innern Schwingungen stattfinden. Die Gleichung der lebendigen Kraft wird dann:

$$\frac{PV_0^2}{2g} + \frac{P'V_0'^2}{2g} = \frac{PV^2}{2g} + \frac{P'V'^2}{2g}.$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit der obigen Gleichung:

$$PV_0 + P'V_0' = PV + P'V',$$

findet man dann:

$$V = \frac{PV_0 + P'V_0'}{P + P'} - \frac{P'(V_0 - V_0')}{P + P'},$$

$$V' = \frac{PV_0 + P'V_0'}{P + P'} + \frac{P(V_0 - V_0')}{P + P'}.$$

Sind beide Körper gleich schwer, folglich $P = P'$, so wird:

$$V = V_0', \quad V' = V_0,$$

d. h. die Körper werden ihre Geschwindigkeiten gegenseitig austauschen.

War der zweite Körper ursprünglich ruhend, so wird $V_0' = 0$, und folglich:

$$V = \frac{P - P'}{P + P'} \cdot V_0, \quad V' = \frac{2P}{P + P'} \cdot V_0.$$

§. 201.

Wenn die beiden einander anstossenden Körper sich gar nicht mehr trennen, sondern an einander festgeklebt verbleiben, so wird noch die Gleichung der Bewegungsmomente fortbestehen:

$$PV_0 + P'V_0' = PV + P'V',$$

wo $V = V'$ wird. Man findet dann diese gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stosse:

$$V = \frac{PV_0 + P'V_0'}{P + P'}.$$

Die lebendige Kraft des Systems ist dann nicht länger unverändert, sondern um:

$$\frac{PV_0^2}{2g} + \frac{P'V_0'^2}{2g} - \frac{(P+P')V^2}{2g} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{PP'}{P+P'} \cdot (V_0 - V'_0)^2$$

vermindert worden.

§. 202.

Es geht aus den Formeln der beiden vorhergehenden Paragraphen hervor, dass die Geschwindigkeit des gestossenen Körpers um so weniger vermindert wird, je grösser seine Masse im Verhältnisse zu derjenigen des stossenden Körpers ist. Hängt der gestossene Körper mit mehreren andern zusammen, so schützt man daher die letzteren gegen die Wirkungen des Stosses, wenn man dem gestossenen Körper eine verhältnissmässig grosse Masse giebt. Dies erklärt, warum man in dem oberen Stockwerke eines Gebäudes auf einem schweren Amboss Eisen schmieden kann, ohne den Boden und die Mauern des Gebäudes zu beschädigen.

Damit bei dem Stosse so wenig lebendige Kraft wie möglich verloren gehe, müssen nicht allein die an einander stossenden Körper beide elastisch sein, so dass keine lebendige Kraft zu einer konstanten Formveränderung verloren geht, sondern es müssen auch

die nach dem Stosse noch stattfindenden Schwingungen in beiden Körpern so klein wie möglich sein. Insbesondere gilt es, den schwersten der an einander stossenden Körpern möglichst gegen diese Schwingungen zu schützen. Dies erklärt die Wichtigkeit, Strassen- und Eisenbahnwagen mit guten Stahlfedern zu versehen, damit der grösste Theil der Erschütterungen sich in den Wagen, und so wenig wie möglich in die Erde verpflanze.

§. 203.

Um den zu einer gewissen Formveränderung eines Körpers nöthigen Druck einem dieselbe Formveränderung hervorbringenden Stosse gleich setzen zu können, muss man die dynamischen Arbeiten und die nach dem Stosse stattfindenden lebendigen Kräfte mit einander vergleichen. Unter diesen lebendigen Kräften muss man bei dem im §. 201 behandelten Stosse auch die verlorene lebendige Kraft als nach dem Stosse fortbestehend mitrechnen, weil sie in der That zu den durch den Stoss erregten Schwingungen verbraucht worden ist, und in diesen noch fortbesteht.

Als Beispiel wollen wir die Theorie des Einrammens der Pfähle betrachten. Dieses Einrammen geschieht durch schwere Blöcke von Eisen, die man von einer gewissen Fallhöhe auf die Pfahlköpfe herabfallen lässt. Es sei Q das Gewicht des Rammblockes, h seine Fallhöhe, P das Gewicht des Pfahls, ω dessen Querschnitt, E der Elasticitätsmodul des Holzes, aus welchem der Pfahl besteht, s die Grösse des Eindringens des Pfahls in die Erde durch den Schlag, ωR der Widerstand, welchen das Erdreich dem Eindringen des Pfahls entgegensetzt, und welcher als dem Querschnitte des Pfahls proportional angenommen wird.

Wir werden annehmen, dass der Block nach dem Falle auf dem Pfahle liegen bleibt, und dass folglich die Gleichungen des §. 201 hier anzuwenden sind.

Es ist dann die Geschwindigkeit des Rammblocks im Augenblicke des Stosses gleich: $V_0 = \sqrt{2gh}$, die Geschwindigkeit des

Pfahls in demselben Augenblick ist: $V'_0 = o$. Es wird folglich die durch den Schlag verlorene lebendige Kraft, d. h. die lebendige Kraft der in dem Blocke und dem Pfahle fortbestehenden Schwingungen, gleich:

$$\frac{1}{2g} \cdot \frac{QP}{Q+P} (\sqrt{2gh})^2 = \frac{QPh}{Q+P}.$$

Die Grösse der Zusammendrückung des Pfahls findet man, indem man bemerkt, dass die zusammendrückende Kraft gleich der Widerstandskraft des Erdreichs ωR sein muss, gleich:

$$\frac{1 . \omega R}{E . \omega .} = \frac{1 R}{E}.$$

Da die unterste Endfläche des Pfahls um s sinkt, so wird die oberste Endfläche im Ganzen um $s + \frac{lR}{E}$ sinken.

Es wird jetzt die dynamische Arbeit des Rammblockes Q während des Falles h gleich Qh, die während des Niedersinkens der obersten Endfläche des Pfahls um $s + \frac{lR}{E}$ entwickelte dynamische Arbeit des Blockes wird; $Q\left(s + \frac{lR}{E}\right)$; die dynamische Arbeit des Pfahls, dessen Schwerpunkt um $s + \frac{1}{2}\frac{lR}{E}$ sinkt, wird: $P\left(s + \frac{1}{2}\frac{lR}{E}\right)$; die dynamische Arbeit der Widerstandskraft des Erdreiches ωR wird gleich: ωRs; endlich wird die durch das Zusammendrücken des Pfahls um die Grösse $\frac{lR}{E}$ hervorgebrachte dynamische Arbeit der Molekülarkräfte nach §. 154 gleich:

$$\frac{1}{2} E \omega l \left(\frac{R}{E}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\omega l R^2}{E}$$

Es ist folglich hier die Summe der dynamischen Arbeiten der bewegenden Kräfte gleich:

$$Qh + Q\left(s + \frac{l R}{E}\right) + P\left(s + \frac{1}{2}\frac{l R}{E}\right).$$

Die Summe der dynamischen Arbeiten der widerstehenden Kräfte ist gleich:

$$\omega . R s + \frac{1}{2}\frac{\omega l R^2}{E}.$$

Die vor dem Falle des Rammblockes stattfindende lebendige Kraft

war Null; die nach dem Stosse stattfindende ist die in den Schwingungen verlorene lebendige Kraft: $\frac{QPh}{Q+P}$.

Dieser Zuwachs der lebendigen Kraft muss der Differenz der dynamischen Arbeiten der bewegenden und der widerstehenden Kräfte gleich sein, und man erhält folglich die Gleichung:

$$\left\{Qh + Q\left(s + \frac{lR}{E}\right) + P\left(s + \frac{1}{2}\frac{lR}{E}\right)\right\} - \left\{\omega R s + \frac{1}{2}\frac{\omega l R^2}{E}\right\} = \frac{QPh}{Q+P}.$$

Hieraus findet man dann die Grösse des Heruntersinkens des Pfahls:

$$s = Q.\frac{\frac{Q}{Q+P}h + \frac{1}{2}\frac{lR}{E}}{\omega R - (Q+P)} - \frac{1}{2}\frac{lR}{E}.$$

Weil die Widerstandskraft des Erdreiches, ωR, immer sehr gross im Verhältnisse zum Gewicht des Rammblockes und des Pfahls, $Q + P$, sein muss, so wird obiger Ausdruck am grössten, wenn $\frac{lR}{E}$, oder das Zusammendrücken des Pfahls, am kleinsten ist.

Sucht man die Grösse der Widerstandskraft des Erdreiches, ωR, so findet man:

$$\omega R = Q + \frac{1}{2}P - \frac{sE\omega}{l} + \sqrt{\left\{\left(Q + \frac{1}{2}P\right)^2 + \frac{E\omega}{l}\left(\frac{2Q^2 h}{Q+P} + Ps + \frac{s^2 E\omega}{l}\right)\right\}}.$$

Durch diese Formel kann man, wenn man beobachtet hat, wie viel der Pfahl durch den letzten Schlag in die Erde eingedrungen ist, den gesammten Widerstand berechnen, mit welchem das Erdreich dem ferneren Eindringen des Pfahls entgegenwirkt, d. h. das Tragungsvermögen des Pfahls.

§. 204.

Wenn ein fester Körper gegen einen anderen mehr oder weniger gedrückt wird, so werden die Molekülen der Körper an der Berührungsstelle zusammengedrückt und gegen das Innere der Körper zurückgestossen mit einer Kraft, welche dem gegenseitigen Drucke proportional und der Ausdehnung der Berührungsstelle umgekehrt proportional ist. Es wird hierdurch nicht allein von

dem kleineren der beiden Körper eine Vertiefung in dem grösseren Körper hervorgebracht werden, sondern die hervorspringenden Theile der beiden Körper werden auch gegenseitig in einander greifen.

Wenn jetzt der eine Körper über den andern hingleitet, so werden nicht allein diese in einander greifenden Theile abgerieben oder umgebogen, sondern auch immer eine neue Vertiefung in dem grösseren der beiden Körper hervorgebracht werden. Die hierdurch hervorgebrachte Widerstandskraft wird die Reibung genannt.

Die Gesetze dieses Widerstandes sind zuerst von Coulomb und nachher von Morin auf experimentellem Wege aufgesucht worden. Sie haben auf diesem Wege gefunden, dass der Reibungswiderstand nur dann ein einfacheres bestimmbares Gesetz befolgt, wenn die Berührungsflächen der beiden Körper einen gewissen Grad von Ebenheit und Glätte besitzen, und wenn durch die Reibung weder eine merkliche Erwärmung, noch eine auffallende Abnützung an ihren Berührungsflächen eintritt.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, ist der Reibungswiderstand dem Drucke proportional, mit welchem die Körper gegeneinander gedrückt sind, dagegen unabhängig von der Grösse der Berührungsfläche und von der Geschwindigkeit, mit welcher die Körper auf einander gleiten.

Dass der Reibungswiderstand dem Drucke proportional sein muss, geht daraus hervor, dass sowohl die Grösse der im grösseren Körper durch den kleineren hervorgebrachten Vertiefung, wie die Grösse des Ineinandergreifens der Moleküle diesem Drucke proportional ist.

Dass der Reibungswiderstand von der Grösse der Berührungsfläche unabhängig ist, vorausgesetzt, dass diese nicht so klein ist, dass der eine Körper in den andern hineinschneidet, ist klar, weil, wenn die Berührungsfläche vergrössert wird, ohne dass der gesammte Druck sich ändert, der auf jedem Elemente der Berührungsfläche stattfindende Druck im gleichen Verhältnisse vermin-

dert und folglich die Intensität der hier stattfindenden Reibung verringert, dagegen die Anzahl dieser Elemente in demselben Verhältnisse vergrössert, folglich der gesammte Reibungswiderstand nicht verändert wird.

Was endlich die Geschwindigkeit der Bewegung anbelangt, so würde diese nur Einfluss auf die Grösse des Reibungswiderstandes üben können durch die lebendige Kraft, welche die Bewegung der abgeriebenen Partikeln absorbirt. Die Geschwindigkeit dieser Partikeln wird nämlich der Geschwindigkeit des bewegten Körpers proportional sein müssen. Wir haben aber die Masse dieser Partikeln oder die Abnützung der Berührungsfläche als sehr klein angenommen, und ihre lebendige Kraft wird daher vernachlässigt werden können. Dagegen kann die Geschwindigkeit des bewegten Körpers keinen Einfluss auf die Schwingungen der umgebogenen Partikeln der Berührungsfläche üben. Die Amplitude dieser Schwingungen ist nämlich nur von der Grösse des Ineinandergreifens dieser Partikeln und folglich nur von dem Drucke abhängig, und die Geschwindigkeit der Schwingungen hängt nur von dieser Amplitude und von der Elasticität der Partikeln ab. Es wird dies klar, wenn man die beiden Körper mit zwei gegeneinander geriebenen Bürsten vergleicht.

§. 205.

Das Verhältniss zwischen der Reibung und dem gegenseitigen senkrechten Drucke der reibenden Körper wird der **Reibungscoefficient** genannt. Die Grösse dieses Coefficienten richtet sich nach der materiellen Natur der Körper und nach der Beschaffenheit und dem Zustande ihrer Berührungsflächen. Feuchtigkeit und Oel vermehren, Seife, Talg und Graphit vermindern die Reibung der Hölzer. Oele und Schweinefett vermindern die Reibung der metallischen Körper.

Diese Wirkung des Netzens und Oelens der Berührungsflächen erklärt sich leicht. Werden die Flächen nämlich mit Substanzen

versehen, gegen welche die Körper keine hygroskopische einsaugende Wirkung ausüben, so füllen diese Substanzen die Poren und Unebenheiten aus; diese letzteren können daher nicht so tief in einander eingreifen, nnd so muss folglich unter diesen Umständen der Reibungswiderstand vermindert werden. Indessen bilden sehr flüssige Substanzen, wie Wasser und Spiritus, eine Ausnahme, indem z. B. Wasser zwischen Eisen die Reibung vermehrt. Dies kann vielleicht dadurch erklärt werden, dass man annimmt, das Wasser wasche die Poren reiner, und mache daher, dass sie tiefer in einander eingreifen können.

Wirken dagegen die Körper hygroskopisch einsaugend auf die netzenden Substanzen, so dringen diese tiefer ins Innere des Körpers ein. Es findet kein Ausfüllen der Poren statt; diese werden im Gegentheil durch das Anschwellen der Körper grösser und dringen daher tiefer in einander ein.

Es gilt dies indessen nur im Anfange der Bewegung, und wenn die Körper längere Zeit mit diesen Substanzen benetzt worden sind, so dass die hygroskopischen Eigenschaften gewirkt haben können.

Der Reibungswiderstand ist beim Beginn einer Bewegung, die nach einem Ruhestande, welcher längere Zeit dauert, eintritt, grösser als einige Zeit nach dem Anfange der Bewegung. Dies ist indess nicht merklich bei sehr harten Körpern, wie den Metallen, welche sehr bald die Grenze der grössten Zusammendrückung erreichen; dagegen merklich zwischen Hölzern, und zwischen Metall und Holz, so wie auch zwischen Metallen, welche mit einer fettigen Substanz versehen sind. Eine kleine Erschütterung kann indess diesen Unterschied des Reibungswiderstandes verschwinden machen.

§. 206.

Bezeichnet man den Reibungscoefficienten der an einander reibenden Körper durch f, den Druck durch Q, und die Reibung durch F, so ist:

$$F = Q \cdot f.$$

Der Winkel, unter welchem eine schiefe Ebene gegen den Horizont gestellt werden muss, damit ein darauf ruhender Körper schon durch die kleinste Kraft bewegt werden kann, wird der Reibungswinkel genannt. Bezeichnet man diesen Winkel durch e und die Schwere des Körpers durch P, so wird der Druck gleich: $P . \cos e$, die bewegende Kraft gleich: $P . \sin e$, und es wird folglich:

$$P . \cos e . f = P . \sin e,$$

oder:

$$\tang e = f.$$

Ist der Neigungswinkel der schiefen Ebene grösser als dieser Reibungswinkel e, so wird der Körper durch seine eigene Schwere herunterbewegt werden; im entgegengesetzten Falle wird keine Bewegung stattfinden.

Dies gilt natürlich auch, wenn die auf den Körper wirkende Kraft irgend eine andere Kraft, als die Schwere, oder die Resultante mehrerer Kräfte ist. Damit Bewegung stattfinden soll, muss der Winkel, welchen die Ebene mit einer auf die Richtung dieser Resultante senkrechten Ebene bildet, grösser als der Reibungswinkel e sein, oder es muss der Winkel, welchen die Resultante mit der Ebene bildet, kleiner als das Complement des Reibungswinkels sein.

§. 207.

Ist (Fig. 106) A ein Zapfen, welcher im Zapfenlager MmN gedreht wird, Rm die Richtung des Druckes, welcher auf diesen Zapfen ausgeübt wird, m der Berührungspunkt und mp die gemeinschaftliche Tangente, so wird der Zapfen so lange im Zapfenlager rollen, ohne gleiten zu können, bis er sich so gestellt hat, dass der Winkel Rmp gleich dem Complement des Reibungswinkels ist. Erst dann wird nämlich nach dem vorigen Paragraphen die Gleitung anfangen können. Es wird folglich:

$$\sphericalangle Rmp = 90^{\circ} - e,$$

$$\cotg Rmp = \tang e = f.$$

Wird jetzt die Grösse des in der Richtung Rm stattfindenden Druckes durch Q bezeichnet, so findet man den normalen Druck gleich:

$$Q \,.\, \cos AmR = Q \,.\, \sin Rmp = Q \,.\, \frac{1}{\sqrt{1+f^2}},$$

und folglich den Reibungswiderstand gegen die Drehung des Zapfens gleich:

$$\frac{Q f}{\sqrt{1+f^2}} = Q f',$$

wenn $f' = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ gesetzt wird.

Dieser Coefficient f' wird der drehende Reibungscoefficient genannt, und ist folglich kleiner als f, welcher der gleitende Reibungscoefficient genannt wird.

Bei älteren Maschinen ist indessen der drehende Reibungscoefficient f' kleiner, als er nach der obigen Formel sein sollte, was daher kommt, dass der Zapfen und das Zapfenlager durch die drehende Reibung einen Zustand der Glätte annehmen, welcher durch die gewöhnlichen Mittel zur Bearbeitung einer ebenen Fläche nicht hervorgebracht werden kann.

§. 208.

Wenn die Körper, statt über einander hinzugleiten, über einander hinwegrollen, so findet auch ein Widerstand statt, welcher die rollende Reibung genannt wird. Dieser Widerstand ist von einer ganz anderen Art, als derjenige der gleitenden Reibung, indem hier keine relative Bewegung der Molekülen beider Körper in der Richtung der Berührungsebene stattfindet. Nach den Experimenten Coulomb's ist dieser Widerstand auch dem Drucke proportional, und, wenn die Oberfläche des ruhenden Körpers eine Ebene ist, dem Krümmungshalbmesser des rollenden Körpers umgekehrt proportional. Bezeichnet man durch Q den senkrechten Druck und durch r den Krümmungshalbmesser, so wird der rollende Reibungswiderstand gleich:

$$f = \frac{Q}{r} f'',$$

wo f'' der rollende Reibungscoefficient genannt wird.

§. 209.

Da die Reibung als eine Kraft angesehen werden kann, welche immer in der der stattfindenden Bewegung entgegengesetzten Richtung wirkt, so ist ihre dynamische Arbeit stets negativ.

Wir werden zuerst die dynamische Arbeit der gleitenden Reibung suchen. Bezeichnet man durch n den auf ein Element der Berührungsfläche stattfindenden Druck, durch ds die im Zeitelemente dt von diesem Elemente beschriebene Bahn, so wird die dynamische Arbeit des ganzen Reibungswiderstandes gleich:

$$- f . \int \Sigma \, nds,$$

wo die Summation auf alle Elemente der Berührungsfläche auszudehnen ist.

Es kommen dann gewöhnlich nur zwei Fälle vor, entweder bewegt sich der Körper immer parallel mit seiner ursprünglichen Stellung, so dass alle von den Berührungselementen beschriebenen Bahnen parallel und gleich sind, oder der Körper dreht sich um eine feste Axe, ohne fortbewegt zu werden.

Im ersten Falle wird ds von dem Summationszeichen unabhängig, und man hat, wenn man den ganzen Druck Σn gleich N setzt, die dynamische Arbeit des Reibungswiderstandes gleich:

$$- f \int Nds.$$

Ist der Druck N constant während der Bewegung, so wird die Arbeit gleich:

$$- fNs.$$

Im zweiten Falle theilt man die Berührungsfläche in elementäre Ringe, deren gemeinschaftliche Axe die feste Umdrehungsaxe des Körpers ist. Bezeichnen wir durch n den auf einen elementären Ring stattfindenden normalen Druck, durch r den Halbmesser des Ringes; es wird dann die dynamische Arbeit der Reibung

dieses elementären Ringes während einer Umdrehung gleich: fn . $2\pi r$, und die totale dynamische Arbeit während einer Umdrehung gleich:

$$2\pi f \Sigma nr,$$

wo die Summation auf die ganze Berührungsfläche auszudehnen ist.

Wir werden diese Formeln näher durch etliche Beispiele erläutern.

§. 210.

Als erstes Beispiel wollen wir die Reibung auf einer schiefen Ebene betrachten.

Es sei der Körper (Fig. 107) nur von seiner eigenen Schwere P, und einer Kraft Q bewegt. Wir werden ferner annehmen, dass diese Kraft Q und die Schwere P in derselben Ebene liegen und dass diese Ebene, welche folglich vertikal wird, auch auf der schiefen Ebene senkrecht steht. Wir werden ferner annehmen, dass die ursprüngliche Bewegung des Körpers in dieser vertikalen Ebene stattfindet. Es wird dann die Bewegung fortwährend in derselben Ebene stattfinden, ohne dass eine Drehung des Körpers durch die Reibung hervorgebracht wird.

Es wird nämlich der auf jedem Elemente der Berührungsfläche stattfindende Reibungswiderstand in demselben constanten Verhältnisse zum Drucke stehen. Die Resultante dieses letzteren fällt aber in jene vertikale Ebene; die Resultante der Reibungswiderstandskräfte wird jetzt durch den Schneidepunkt jener Resultante mit der schiefen Ebene gehen, und weil die Widerstandskräfte alle mit jener vertikalen Ebene der Bewegung parallel sind, wird sie folglich auch in die Ebene der Bewegung fallen, und die Richtung dieser nicht ändern können.

Bezeichnen wir durch u den Neigungswinkel der schiefen Ebene, und durch α den Winkel, welchen die Kraft Q mit dieser Ebene bildet, welchen Winkel wir von der oberen Seite der Ebene rechnen wollen.

Es wird dann der Druck gleich:

$$N = P \cos u - Q \sin \alpha,$$

und folglich die dynamische Arbeit des Reibungswiderstandes gleich:

$$-fNs = -fs\,(P\cos u - Q\sin\alpha).$$

Die dynamische Arbeit der Schwere P wird, wenn die Bewegung aufwärts stattfindet, gleich: $-Ps.\sin u$, dagegen, wenn die Bewegung nach unten stattfindet, gleich: $+Ps.\sin u$.

Ebenso wird die dynamische Arbeit der Kraft Q im ersten Falle gleich: $+Qs.\cos\alpha$, im zweiten Falle gleich: $-Qs.\cos\alpha$.

Die totale dynamische Arbeit wird folglich, wenn der Körper aufwärts bewegt wird, gleich:

$$-fs\,(P\cos u - Q\sin\alpha) - Ps.\sin u + Qs.\cos\alpha$$
$$= sQ\,(f\sin\alpha + \cos\alpha) - sP\,(f\cos u + \sin u)$$

und, wenn der Körper nach unten bewegt wird:

$$-fs\,(P\cos u - Q\sin\alpha) + Ps.\sin u - Qs.\cos\alpha$$
$$= sQ\,(f\sin\alpha - \cos\alpha) - sP\,(f\cos u - \sin u).$$

Diese dynamische Arbeit ist dann gleich dem Zuwachs der lebendigen Kraft, und es kann aus der Gleichung der lebendigen Kraft die Geschwindigkeit des Körpers in jedem Augenblicke auf die gewöhnliche Weise gefunden werden.

Soll die Bewegung des Körpers gleichförmig sein, und folglich dieser Zuwachs gleich Null, so müssen folglich die obigen Ausdrücke gleich Null sein. Der Werth von Q, welcher aus diesen Gleichungen hervorgeht, ist dann derjenige, welcher die Wirkungen der Reibung und der auf eine schiefe Ebene wirkenden Schwere des Körpers aufheben wird.

Man findet dann im ersten Falle, wenn die Bewegung aufwärts der schiefen Ebene stattfindet:

$$Q = \frac{P\,(\sin u + f\cos u)}{\cos\alpha + f\sin\alpha},$$

im zweiten Falle, wenn die Bewegung nach unten stattfindet:

$$Q = \frac{P\,(\sin u - f\cos u)}{\cos\alpha - f\sin\alpha}.$$

Wendet man, statt des Reibungscoefficienten f, den Reibungswinkel e an, wo $f = \operatorname{tang} e$, so werden die obigen Formeln:

$$Q = \frac{P.\sin(u+e)}{\cos(\alpha-e)} \text{ und } Q = \frac{P.\sin(u-e)}{\cos(\alpha-e)}.$$

Ist $\alpha = o$, oder wirkt die Kraft Q parallel mit der schiefen Ebene, und nach oben, so werden die obigen Formeln:

$$Q = P(\sin u + f\cos u),\ Q = P(\sin u - f\cos u).$$

Ist $\alpha = 180°$, oder wirkt die Kraft parallel mit der schiefen Ebene, aber nach unten, so wird die erste der obigen Formeln immer einen negativen Werth von Q geben, die zweite dagegen einen positiven Werth:

$$Q = P(f\cos u - \sin u),$$

wenn $f\cos u > \sin u$, $f > \tang u$, oder $e > u$, d. h. wenn die schiefe Ebene um weniger als den Reibungswinkel geneigt ist, so dass folglich der ruhende Körper nicht von selbst heruntergleiten würde.

Ist die feste Ebene horizontal, oder $u = o$, wirkt die Kraft Q auch dieser parallel, oder ist $\alpha = o$, und findet endlich die Bewegung in der Richtung dieser Kraft statt, in welchem Falle allein man einen positiven Werth von Q erhalten kann, so findet man: $Q = Pf$, oder gleich der Reibung, was sich auch von selbst versteht, weil dann Q nur die Reibung aufheben soll.

§. 211.

Betrachtet man die veränderliche Bewegung auf einer schiefen Ebene, so muss man die dynamische Arbeit, statt gleich Null, gleich dem Zuwachs der lebendigen Kraft setzen.

Bezeichnet man in jedem Falle durch sM die dynamische Arbeit der Kräfte P, Q und der Reibung, wo folglich

$$M = Q(f\sin\alpha + \cos\alpha) - P(f\cos u + \sin u),$$

wenn die Bewegung nach oben stattfindet, und

$$M = Q(f\sin\alpha - \cos\alpha) - P(f\cos u - \sin u),$$

wenn die Bewegung nach unten stattfindet.

Bezeichnet man ferner durch V_o die ursprüngliche Geschwindigkeit, durch V die im Zeitpunkte t stattfindende, so wird der Zuwachs der lebendigen Kraft gleich:

$$\frac{P}{2g}(V^2 - V_o^2),$$

und die Gleichung der lebendigen Kraft wird:

$$\frac{P}{2g}(V^2 - V_o^2) = sM.$$

Hieraus findet man:

$$V = \sqrt{V_o^2 + \frac{2gMs}{P}},$$

oder, weil $V = d_t s$ ist:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{\frac{V_o^2 + 2gMs}{P}}}$$

und durch Integration:

$$t = \frac{P}{gM}\left(\sqrt{V_o^2 + \frac{2gM}{P}s} - V_o\right),$$

oder:

$$s = \tfrac{1}{2}g\,\frac{M}{P}\,t^2 + V_o t,$$

und:

$$V = g \cdot \frac{M}{P}\,t + V_o.$$

Ist $\alpha = o$, und $u = o$, oder ist die feste Ebene horizontal und wirkt die Kraft Q in der Richtung der Bewegung, so wird:

$$M = Q - Pf,$$

sein, und man erhält folglich:

$$s = \tfrac{1}{2}g\left(\frac{Q}{P} - f\right)t^2 + V_o t,$$

$$V = g\left(\frac{Q}{P} - f\right)t + V_o.$$

Aus diesen Formeln kann man durch Beobachtung des in der Zeit t durchlaufenen Raumes s den Reibungscoefficienten f finden, wenn die ursprüngliche Geschwindigkeit V_o bekannt ist. Ist auch diese Grösse unbekannt, so kann man doch aus zwei Beobachtungen dieser Art sowohl V_o wie f finden.

Ist $V = o$, oder der Körper gerade in Ruhe gekommen, so wird:

$$t = \frac{V_o}{g\left(f - \frac{Q}{P}\right)},$$

und:

$$s = \frac{V_o^2}{2g\left(f - \frac{Q}{P}\right)} = \tfrac{1}{2}V_o t,$$

d. h. der durchlaufene Raum wird genau die Hälfte dessen sein,

welchen der Körper mit derselben ursprünglichen Geschwindigkeit in derselben Zeit zurückgelegt haben würde, wenn keine Reibung stattgefunden hätte.

§. 212.

Als zweites Beispiel wollen wir die Reibung eines Körpers betrachten, dessen Bewegung durch Rinnen oder Scheidelatten, zwischen welchen er frei gleiten kann, bestimmt ist. Es sei z. B. (Fig. 108) der Körper ein Stampfer AB, welcher durch eine Hebelatte CD zwischen den Scheidelatten aa und bb herauf bewegt wird.

An jeder der Scheidelatten wird dann ein gewisser Druck ausgeübt werden, dessen Grösse und Richtung auf die folgende Weise berechnet werden kann.

Es sei D der Wirkungspunkt der bewegenden Kraft, und X und Y die Componenten dieser Kraft, senkrecht auf und parallel mit der Richtung des Stampfers AB, wo wir X als positiv in der Richtung von C bis D und Y als positiv in der Richtung von B bis A annehmen wollen. Es sei ferner x der Abstand CD des Wirkungspunkts D von der Axe des Stampfers und y der Abstand CE von C bis zu den untersten Scheidelatten bb, welche letzteren sowohl wie die Scheidelatten aa wir als AB nur in Punkten berührend annehmen werden; endlich l der Abstand EB der oberen Scheidelatten aa von den unteren bb.

Die Kraft X kann jetzt nach C versetzt werden, und in zwei parallele in F und E wirkende Kräfte $\frac{Xy}{l}$ und $\frac{X(l-y)}{l}$ decomponirt werden.

Die Kraft Y wird ebenso parallel mit ihrer Richtung von D bis C versetzt, wodurch aber ein Kräftepaar hervorgebracht wird, dessen Moment gleich Yx ist. Dieses Kräftepaar kann jetzt in seiner Ebene so gedreht werden, dass der rechtwinklige Arm gleich $EF = l$ wird. Die Kraft dieses Paares wird dann gleich $\frac{Yx}{l}$, und

folglich die in F senkrecht auf AB wirkende Kraft gleich: $\frac{-Yx}{l}$, die in E wirkende Kraft gleich: $+\frac{Yx}{l}$ sein.

Der totale in F stattfindende Druck wird folglich gleich:

$$\frac{Xy}{l} - \frac{Yx}{l} = \frac{Xy - Yx}{l},$$

und der totale in E stattfindende Druck gleich:

$$\frac{X(l-y)}{l} + \frac{Yx}{l} = X - \frac{Xy - Yx}{l}.$$

Je nachdem diese Ausdrücke positiv oder negativ sind, wird der Druck gegen die eine oder gegen die andere der Scheidelatten stattfinden.

Den Reibungswiderstand findet man jetzt, wenn man den Zahlenwerth des Druckes mit dem Reibungscoefficienten multiplicirt. Bezeichnet man den Zahlenwerth des ersten Ausdruckes durch N, denjenigen des zweiten durch N′, wo:

$$N = \pm \frac{Xy - Yx}{l}, \quad N' = \pm \left(X - \frac{Xy - Yx}{l}\right),$$

so findet man den Reibungswiderstand in F gleich: Nf, denjenigen in E gleich: N′f, und folglich den gesammten in der Richtung von AB wirkenden Widerstand gleich: $(N + N')\,f$.

Findet der beiderseitige Druck nach derselben Seite hin statt, so wird: $N + N' = \pm X$, und der gesammte Reibungswiderstand folglich gleich: $\pm Xf$. Im entgegengesetzten Falle wird dagegen:

$$N + N' = \pm \left(X - 2\,\frac{Xy - Yx}{l}.\right)$$

und der Reibungswiderstand folglich gleich:

$$\pm \left(X - 2\,\frac{Xy - Yx}{l}\right) f.$$

Die Grösse des Reibungswiderstandes mit der Hubhöhe multiplicirt giebt die dynamische Arbeit der Reibung während eines Hubes.

Findet die Berührung mit den Seitenlatten nicht nur an einem Punkte, sondern an einer gewissen Länge des Stampfers statt, so wird man die äussersten Punkte der Berührungsflächen als Wirkungs-

punkte des auf jeder stattfindenden Druckes annehmen können. Findet nämlich der Druck an beiden Enden nach derselben Seite hin statt, so hat die Lage des Wirkungspunktes, wie gezeigt, keinen Einfluss auf die Grösse des totalen Reibungswiderstandes, welcher immer gleich: $\pm X$ wird; findet dagegen der Druck an jedem Ende in entgegengesetzter Richtung statt, so werden, wegen des nothwendigen Spielraumes zwischen den Seitenlatten und dem Stampfer, die Berührungspunkte immer die äussersten Punkte der ersteren sein.

Wirken auf den Stampfer mehrere Kräfte, so berechnet man auf diese Weise den von jeder Kraft hervorgebrachten Druck und addirt. Es wird dann der gesammte Druck gleich:

$$\pm \Sigma X, \text{ oder } \pm \Sigma \left(X - 2 \frac{Xy - Yx}{l} \right),$$

je nachdem die Summen:

$$\Sigma \frac{Xy - Yx}{l} \text{ und } \Sigma \left(X - 2 \frac{Xy - Yx}{l} \right)$$

gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben.

§. 213.

Als Beispiel der durch die Umdrehung eines Körpers um eine feste Axe hervorgebrachten gleitenden Reibung wollen wir diejenige einer stehenden Welle gegen die Endfläche des Zapfenlagers betrachten.

Die Berührungsfläche des Zapfens mit dem Zapfenlager wird dann eine Umdrehungsfläche bilden, als deren Generatrix wir CD (Fig. 109 und Fig. 110) annehmen wollen. Bezeichnen wir durch $x = OM$, $y = MP$ die Ordinaten dieser Generatrix, deren Ordinate y vom unteren bis zu dem oberen Ende entweder stetig wachsen, oder stetig abnehmen wird. Betrachten wir ein Element Pp dieser Generatrix; es wird eine kegelförmige Fläche beschreiben, von welcher der eine Halbmesser gleich y, der andere gleich $y + dy$, und deren Höhe gleich dx wird. Theilt man die ganze Berührungsfläche in solche kegelförmige Elemente, so kann man annehmen, dass

der totale vertikale Druck der Welle, N, auf dieser im Verhältnisse ihrer horizontalen Projection vertheilt ist. Es ist jetzt diese horizontale Projection des kegelförmigen Elementes gleich: $2\pi ydy$, und die horizontale Projection der ganzen Berührungsfläche gleich: $\pi(y_1^2 - y_0^2)$, wenn man durch y_1 und y_0 die beiden äussersten Werthe der Ordinate y bezeichnet. Der auf jene elementäre Kegelfläche wirkende Theil des vertikalen Druckes wird dann gleich:

$$N \cdot \frac{2\pi ydy}{\pi(y_1^2 - y_0^2)} = \frac{2Nydy}{y_1^2 - y_0^2}.$$

Diesen vertikalen Druck decomponiren wir in einen normalen und einen tangentiellen. Es ist d_yx gleich der Tangens des Winkels, welchen die Normale mit der vertikalen Axe bildet, und folglich der Cosinus dieses Winkels gleich: $\frac{1}{\sqrt{1+(d_yx)^2}}$. Der auf die kegelförmigen elementären Flächen wirkende normale Druck wird folglich:

$$n = \frac{2N}{y_1^2 - y_0^2} \cdot \frac{ydy}{\sqrt{1+(d_yx)^2}},$$

und der Reibungswiderstand dieses Elementes gleich:

$$\frac{2fN}{y_1^2 - y_0^2} \cdot \frac{ydy}{\sqrt{1+(d_yx)^2}}.$$

Die dynamische Arbeit dieser auf den Halbmesser y wirkenden Reibung wird folglich während einer Umdrehung der Welle gleich:

$$-\frac{4\pi fN}{y_1^2 - y_0^2} \cdot \frac{y^2dy}{\sqrt{1+(d_yx)^2}}.$$

Dieser Ausdruck zwischen den Grenzen y_0 und y_1 integrirt, giebt dann die totale dynamische Arbeit des Reibungswiderstandes gleich:

$$-\frac{4\pi fN}{y_1^2 - y_0^2} \int_{y_0}^{y_1} \frac{y^2dy}{\sqrt{1+(d_yx)^2}}.$$

§. 214.

Es sei die reibende Oberfläche ein ebener Ring, dessen grösserer Halbmesser gleich y_1, der kleinere gleich y_0 ist (Fig. 111).

Es ist dann $d_y x = o$, und die dynamische Arbeit der Reibung wird gleich:

$$-\tfrac{4}{3}\pi f N \cdot \frac{y_1^3 - y_0^3}{y_1^2 - y_0^2} = -\tfrac{4}{3}\pi f N \frac{y_1^2 + y_1 y_0 + y_0^2}{y_1 + y_0}.$$

Ist hier $y_0 = o$, und findet folglich die Reibung an der kreisförmigen ebenen Endfläche der Welle statt, so wird ihre dynamische Arbeit gleich:

$$-\tfrac{4}{3}\pi f N y_1,$$

folglich dieselbe, als wäre der ganze Druck auf einem Kreise wirkend, dessen Halbmesser $\frac{2}{3}$ des Halbmessers y_1 der Endfläche ist.

Es sei als zweites Beispiel der Zapfen ein abgestumpfter Kegel (Fig. 112), dessen grösserer Halbmesser gleich y_1, der kleinere gleich y_0 und dessen Höhe gleich h ist. Nimmt man den Anfangspunkt der Coordinaten im Scheitelpunkte des Kegels an, so wird die Gleichung der beschreibenden geraden Linie:

$$y = \left(\frac{y_1 - y_0}{h}\right) \cdot x.$$

Es wird folglich:

$$\sqrt{1 + (d_y x)^2} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{(y_1 - y_0)^2}} = \sqrt{\frac{(y_1 - y_0)^2 + h^2}{y_1 - y_0}} = \frac{b}{y_1 - y_0},$$

wenn man die Seite des abgestumpften Kegels durch b bezeichnet. Man erhält dann die dynamische Arbeit der Reibung gleich:

$$-\frac{4\pi f N}{y_1^2 - y_0^2} \cdot \frac{y_1 - y_0}{b} \int_{y_0}^{y_1} y^2 dy = -\tfrac{4}{3}\pi f N \cdot \frac{y_1^3 - y_0^3}{(y_1 + y_0) b}.$$

Es sei der Zapfen ein Kugelsegment (Fig. 113), der Halbmesser der Kugel gleich r, der Halbmesser der Grundfläche des Segmentes gleich y_0. Nimmt man den Mittelpunkt der Kugel als Anfangspunkt der Coordinaten an, so wird die Gleichung des beschreibenden Kreises: $y^2 + x^2 = r^2$, woraus: $d_y x = -\frac{y}{x}$,

$$\sqrt{1 + (d_y x)^2} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{r}{x} = \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}}.$$

Es wird folglich:

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{1+(d_y x)^2}} = \int y^2 \sqrt{1-\left(\frac{y}{r}\right)^2} dy =$$

$$= \frac{r}{8}\left\{ \text{arc}\left(\sin = \frac{y}{r}\right) - \frac{y}{r}\left[1-2\left(\frac{y}{r}\right)^2\right]\sqrt{1-\left(\frac{y}{r}\right)^2}\right\} + C.$$

Substituirt man hier die Grenzen $y = y_o$ und $y = o$, so wird:

$$\int_o^{y_o} \frac{y^2 dy}{\sqrt{1+(d_y x)^2}} = \frac{r^3}{8}\left\{ \text{arc}\left(\sin = \frac{y_o}{r}\right) - \frac{y_o}{r}\left[1-2\left(\frac{y_o}{r}\right)^2\right]\sqrt{1-\left(\frac{y_o}{r}\right)^2}\right\}.$$

Die dynamische Arbeit der Reibung wird folglich:

$$-\frac{4\pi f N}{y_o^2}\cdot\frac{r^3}{8}\left\{ \text{arc}\left(\sin = \frac{y_o}{r}\right) - \frac{y_o}{r}\left[1-2\left(\frac{y_o}{r}\right)^2\right]\sqrt{1-\left(\frac{y_o}{r}\right)^2}\right\}.$$

Entwickelt man nach steigenden Potenzen von $\frac{y_o}{r}$, so findet man diesen Ausdruck gleich:

$$-\frac{4\pi f N}{y_o^2}\cdot\frac{r^3}{8}\left\{\frac{16}{2.3}\cdot\left(\frac{y_o}{r}\right)^3 - \frac{32}{2.4.5}\left(\frac{y_o}{r}\right)^5 - \frac{48}{2.4.6.7}\left(\frac{y_o}{r}\right)^7 - \dots\right\}$$

$$= -4\pi f N y_o\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{2.5}\cdot\left(\frac{y_o}{r}\right)^2 - \frac{1}{2.4.7}\cdot\left(\frac{y_o}{r}\right)^4 - \frac{1.3}{2.4.6.9}\cdot\left(\frac{y_o}{r}\right)^6 - \dots\right\}$$

Als letztes Beispiel wollen wir den Fall betrachten, dass der Zapfen ein abgestumpfter Kegel, durch ein Kugelsegment abgerundet ist, und zwar so, dass die Kegelfläche und die Kugelfläche einander tangiren. Es sei (Fig. 114) y_1 der grössere Halbmesser des Kegels, y_o der kleinere Halbmesser, b die Seite und h die Höhe des abgestumpften Kegels, endlich r der Halbmesser der Kugel. Damit die Kugeloberfläche und die Kegelfläche einander berühren, muss dann $\frac{r}{y_o} = \frac{b}{h}$ sein.

Es ist jetzt die horizontale Projection des Kugelsegmentes gleich: πy_o^2, und diejenige der Kegeloberfläche gleich: $\pi(y_1^2 - y_o^2)$. Es wird folglich der auf die Oberfläche des Segmentes fallende Theil des Druckes gleich: $\frac{N y_o^2}{y_1^2}$, und der auf die Kegelfläche fallende Theil gleich: $\frac{N(y_1^2 - y_o^2)}{y_1^2}$. Substituirt man diese Werthe statt N in den vorigen Beispielen, so findet man die dynamische Arbeit der Reibung an der Kegelfläche gleich:

$$-\tfrac{4}{3}\pi f N \cdot \frac{y_1^2-y_0^2}{y_1^2} \cdot \frac{y_1^3-y_0^3}{(y_1+y_0)b}.$$

Es ist hier $\frac{b}{h}=\frac{r}{y_0}$, oder $b^2y_0^2=r^2h^2=r^2(b^2-[y_1-y_0]^2)$, und hieraus:

$$b=\frac{y_1-y_0}{\sqrt{1-\left(\frac{y_0}{r}\right)^2}}.$$

Dieser Werth von b substituirt giebt die dynamische Arbeit gleich:

$$-\tfrac{4}{3}\pi f N \cdot \frac{(y_1^2-y_0^2)(y_1^3-y_0^3)}{y_1^2(y_1+y_0)(y_1-y_0)}\sqrt{1-\left(\frac{y_0}{r}\right)^2}$$

$$=-\tfrac{4}{3}\pi f N y_1\left[1-\left(\frac{y_0}{y_1}\right)^3\right]\sqrt{1-\left(\frac{y_0}{r}\right)^2},$$

oder, wenn man die Quadratwurzel in eine Reihe entwickelt:

$$-\tfrac{4}{3}\pi f N y_1\left[1-\left(\frac{y_0}{y_1}\right)^3\right]\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{y_0}{r}\right)^2-\frac{1}{2.4}\left(\frac{y_0}{r}\right)^4-\frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{y_0}{r}\right)^6-\dots\right]$$

Die Arbeit der Reibung an der Oberfläche des Segmentes findet man, indem man in dem vorigen Beispiele $\frac{Ny_0^2}{y_1^2}$ statt N substituirt, gleich:

$$-4\pi f N\frac{y_0^3}{y_1^2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2.5}\cdot\left(\frac{y_0}{r}\right)^2-\frac{1}{2.4.7}\cdot\left(\frac{y_0}{r}\right)^4-\frac{1.3}{2.4.6.9}\cdot\left(\frac{y_0}{r}\right)^6-\dots\right]$$

$$=-\tfrac{4}{3}\pi f N y_1\left(\frac{y_0}{y_1}\right)^3\left[1-\frac{1.3}{2.5}\left(\frac{y_0}{r}\right)^2-\frac{1}{2.4}\cdot\frac{3}{7}\left(\frac{y_0}{r}\right)^4-\frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{3}{9}\left(\frac{y_0}{r}\right)^6-\dots\right]$$

Die totale Arbeit der Reibung an der ganzen Oberfläche des Zapfens wird folglich gleich:

$$-\tfrac{4}{3}\pi f N y_1\left\{\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{y_0}{r}\right)^2-\frac{1}{2.4}\cdot\left(\frac{y_0}{r}\right)^4-\frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{y_0}{r}\right)^6-\dots\right]\right.$$
$$\left.+\left(\frac{y_0}{y_1}\right)^3\left[\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{y_0}{r}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{y_0}{r}\right)^4+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{y_0}{r}\right)^6+\dots\right]\right\}$$

Ist r gross in Bezug auf y_0, so dass man die höheren Potenzen von $\frac{y_0}{r}$ vernachlässigen kann, so wird der obige Ausdruck gleich:

$$-\tfrac{4}{3}\pi f N y_1\left\{1-\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{y_0}{r}\right)^2+\tfrac{1}{5}\cdot\left(\frac{y_0}{y_1}\right)^3\cdot\left(\frac{y_0}{r}\right)^2\right\}.$$

§. 215.

Betrachten wir eine rechteckige Schraube. Wir werden die Last an der Schraubenspindel selbst angebracht annehmen, und auf diese ein auf der Axe senkrechtes Kräftepaar wirkend, welches die Schraube in einer festen Schraubenmutter aufwärts zu schrauben strebt. Es sei h die Höhe eines Schraubengangs, y_0 der innere, y_1 der äussere Halbmesser, Q die längs der Axe wirkende Last, PQ das Moment des Kräftepaars.

An jedem Punkt der unteren helicoidischen Fläche des Schraubenganges findet dann eine gewisse Reibung statt. Betrachten wir den Puukt A (Fig. 115). Es sei y dessen Abstand von der Axe, q der auf diesen Punkt wirkende vertikale Druck, p die horizontale und auf y senkrecht wirkende Kraft. Es wird dann die Summe aller q gleich Q, und die Summe der Momente aller p in Bezug auf die Axe, Σpy, gleich PR sein.

Eine durch A gehende Cylinderfläche, deren Axe die Schraubenaxe ist, wird dann die untere Fläche der Schraube in einer Schraubenlinie schneiden, welche, wenn die Cylinderfläche in einer Ebene entfaltet wird, eine gerade Linie bilden wird. Jeder Theil dieser Schraubenlinie wird mit dem Horizonte denselben Winkel u bilden, dessen Tangente gleich $\frac{h}{2\pi y}$ wird.

Die auf der Schraubenfläche normale Componente der Last q wird jetzt gleich: $q \cos u$, und diejenige der Kraft p wird gleich $p \sin u$ sein. Der in A stattfindende normale Druck wird folglich gleich: $q \cos u + p \sin u$ und die Reibung folglich gleich: $f(q \cos u + p \sin u)$. Der während einer Umdrehung der Schraube vom Punkte A beschriebene Weg wird gleich: $\frac{2\pi y}{\cos u}$, und die während einer Umdrehung entwickelte dynamische Arbeit der am Punkte A stattfindenden Reibung wird folglich gleich:

$$-f(q \cos u + p \sin u) \cdot \frac{2\pi y}{\cos u} = -2\pi f y (q + p \cdot \tang u)$$

$$= -(2\pi f q y - f p h).$$

Construirt man jetzt zwei mit der Schraubenaxe concentrische Cylinderflächen, deren Halbmesser y und $y + dy$ sind, und betrachtet den zwischen diesen Cylinderflächen liegenden helicoidischen Streifen, so ist der auf diesen stattfindende Gesammtdruck gleich: $Q \cdot \frac{2ydy}{y_1^2 - y_0^2}$, wenn man fortwährend annimmt, der Druck sei auf die horizontale Projection der Berührungsfläche gleichmässig vertheilt. Man findet folglich die dynamische Arbeit der auf diesen helicoidischen Streifen stattfindenden Reibung gleich:

$$-\left(\frac{4\pi fQ}{y_1^2 - y_0^2} \cdot y^2 dy + fh\Sigma p\right).$$

Integrirt man den ersten Theil dieses Ausdrucks zwischen den Grenzen: $y = y_0$ und $y = y_1$, und summirt alle auf der ganzen Schraubenfläche stattfindende Kräfte p, so findet man die totale dynamische Arbeit der Reibung während einer Umdrehung gleich:

$$-\left(\tfrac{4}{3}\pi fQ \cdot \frac{y_1^3 - y_0^3}{y_1^2 - y_0^2} + fh\Sigma p\right).$$

Die Summe Σp muss von der Elasticität des Schraubenganges abhängig sein. Weil indessen $\Sigma py = PR$, und y_0 der kleinste, y_1 der grösste Werth von y ist, so muss Σp kleiner sein als $\frac{PR}{y_0}$ und grösser als $\frac{PR}{y_1}$; weil er im obigen Ausdruck mit den zwei kleinen Grössen f und h multiplicirt ist, kann man, wenn $y_1 - y_0$ nicht sehr gross ist, mit hinlänglicher Genauigkeit: $\Sigma p = \frac{2PR}{y_1 + y_0}$ setzen, und man findet unter dieser Voraussetzung die dynamische Arbeit der Reibung gleich:

$$-\frac{\tfrac{4}{3}\pi fQ(y_1^2 + y_1 y_0 + y_0^2) + 2fhPR}{y_1 + y_0}.$$

Die dynamische Arbeit des Kräftepaars PR wird jetzt gleich: $+2\pi PR$, oder gleich: $-2\pi PR$, je nachdem die Schraube nach oben oder unten bewegt wird. Ebenso wird die dynamische Arbeit der Last Q gleich: $-Qh$ oder gleich: $+Qh$.

Die gesammte dynamische Arbeit während einer Umdrehung der Schraube wird folglich im ersten Falle gleich:

$$-\frac{\frac{4}{3}\pi f Q(y_1^2+y_1 y_0+y_0^2)+2fhPR}{y_1+y_0}=2\pi PR-Qh,$$

und im zweiten Fall gleich:

$$-\frac{\frac{4}{3}\pi f Q(y_1^2+y_1 y_0+y_0^2)+2fhPR}{y_1+y_0}-2\pi PR+Qh.$$

Dies ist dann dem Zuwachs der lebendigen Kraft gleich. Soll die Bewegung stetig und folglich die lebendige Kraft constant sein, so erhält man, wenn die Bewegung nach oben stattfindet:

$$-\frac{\frac{4}{3}\pi f Q(y_1^2+y_1 y_0+y_0^2)+2fhPR}{y_1+y_0}+2\pi PR-Qh=o,$$

woraus:

$$Q=2PR.\frac{\pi(y_1+y_0)-fh}{h(y_1+y_0)+\frac{4}{3}\pi f(y_1^2+y_1 y_0+y_0^2)}.$$

Findet die Bewegung nach unten statt, so wird:

$$-\frac{\frac{4}{3}\pi f Q(y_1^2+y_1 y_0+y_0^2)+2fhPR}{y_1+y_0}-2\pi PR+Qh=o,$$

woraus:

$$Q=2PR.\frac{\pi(y_1+y_0)+fh}{h(y_1+y_0)-\frac{4}{3}\pi f(y_1^2+y_1 y_0+y_0^2)}.$$

Bezeichnet man durch r den mittleren Halbmesser, und durch b die Breite des Schraubengewindes, wo folglich: $r=\frac{1}{2}(y_1+y_0)$ oder $y_1+y_0=2r$, $y_1-y_0=b$, so wird:

$$y_1^2+y_1 y_0+y_0^2=3r^2+\frac{1}{4}b^2.$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man, wenn die Bewegung nach oben stattfindet:

$$Q=2PR.\frac{2\pi r-fh}{2hr+\frac{4}{3}\pi f(3r^2+\frac{1}{4}b^2)}=PR\frac{2\pi-\frac{fh}{r}}{h+2\pi f(r+\frac{1}{12}\frac{b^2}{r})},$$

und wenn die Bewegung nach unten stattfindet:

$$Q=PR.\frac{2\pi+\frac{fh}{r}}{h-2\pi f(r+\frac{1}{12}\frac{b^2}{r})}.$$

§. 216.

Wir werden ferner die Reibung eines Riemens an einem Cylinder betrachten. Nehmen wir diesen erst als feststehend an. Es sei (Fig. 116) AB = s der von dem Riemen umschlossene Bogen, r der Halbmesser des Cylinders, P und Q die an den beiden Endpunkten wirkende Kräfte und die Bewegung finde zur Seite der Kraft P statt.

Es sei DE = ds ein Element des Bogens s, so wird, wenn man die auf diesem Elemente zur Seite der Kraft Q wirkende Spannung gleich t setzt, die zur Seite der Kraft P wirkende gleich $t + dt$ sein. Es muss jetzt, wenn man die Masse des Riemens vernachlässigt, dieser Zuwachs der Spannung dt, gleich der an diesem Elemente stattfindenden Reibung sein.

Es ist aber nach §. 35 der an diesem Elemente stattfindende normale Druck gleich $\frac{t}{r} . ds$, folglich die Reibung gleich: $f . \frac{t}{r}$ ds, und $dt = f . \frac{t}{r} ds$, woraus:

$$\frac{dt}{t} = \frac{f}{r} . ds,$$

und, wenn man in Bezug auf t zwischen den Grenzen: $t = Q$ und $t = t$, in Bezug auf s zwischen den Grenzen $s = o$ und $s = s$ integrirt:

$$\log nat \left(\frac{t}{Q}\right) = \frac{f}{r} . s, \text{ oder: } t = Qe^{\frac{fs}{r}}.$$

Die auf dem Elemente ds stattfindende Reibung war gleich: $f . \frac{t}{r} ds$, oder, wenn man den Werth von t substituirt, gleich:

$$\frac{fQ}{r} e^{\frac{fs}{r}} ds.$$

Integrirt man diesen Ausdruck zwischen den Grenzen $s = o$ und $s = s$, so findet man die ganze zwischen dem Riemen und dem Cylinder stattfindende Reibung gleich:

$$Q (e^{\frac{fs}{r}} - 1).$$

Die dynamische Arbeit dieser Reibung wird, wenn man durch l den vom Riemen durchlaufenen Raum bezeichnet, gleich:

$$- Ql\left(e^{\frac{fs}{r}} - 1\right).$$

Die dynamische Arbeit der Kraft Q wird ebenso eine widerstehende, gleich: — Ql, und diejenige der Kraft P, welche eine bewegende sein wird: + Pl. Die totale dynamische Arbeit wird folglich gleich:

$$\left\{P - Q - Q\left(e^{\frac{fs}{r}} - 1\right)\right\} l = \left\{P - Qe^{\frac{fs}{r}}\right\} l.$$

Um die Bewegung des Riemens zu finden, muss diese Arbeit gleich dem Zuwachs der lebendigen Kraft gesetzt werden. Soll die Bewegung gleichförmig sein, so ist dieser Zuwachs gleich Null und man findet:

$$P = Qe^{\frac{fs}{r}}.$$

Bezeichnet man durch α den Winkel ACB, so wird $\frac{s}{r} = \alpha$ und $P = Qe^{f\alpha}$, folglich unabhängig von dem Halbmesser des Cylinders.

Wird der Cylinder durch die Reibung des Riemens bewegt, so muss (P — Q) l gleich der dynamischen Arbeit des Cylinders sein, wenn der Riemen nicht auf ihm gleiten soll. Wenn man durch einen Riemen eine Transmission der Arbeit zu Stande bringen will, und bezeichnet diese durch A, so muss folglich: $A = (P - Q)\, l$ sein, wo l den von dem Riemen durchlaufenen Bogen bezeichnet. Bezeichnet A die während einer Umdrehung des Cylinders entwickelte dynamische Arbeit, so wird $l = 2\pi r$, $A = (P - Q) \,.\, 2\pi r$, oder: $P - Q = \frac{A}{2\pi r}$. Diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung: $P = Qe^{f\alpha}$ giebt dann:

$$Q = \frac{A}{2\pi r\left(e^{f\alpha} - 1\right)}, \quad P = \frac{Ae^{f\alpha}}{2\pi r\left(e^{f\alpha} - 1\right)}.$$

§. 217.

Als letztes Beispiel werden wir den bei der Bewegung zweier Zahnräder stattfindenden Reibungswiderstand betrachten.

Es seien (Fig. 117 und 118) C und C′ die Mittelpunkte der beiden Räder, Ct und C′t die Halbmesser der primitiven Theilkreise, amb und a′mb′ die Bogen zweier an einander stossenden Zähne, welche der geometrischen Bedingung der gleichmässigen Bewegung, dass ihre gemeinschaftliche Normale tm immer durch den Berührungspunkt t der primitiven Theilkreise geht, genügen.

Bezeichnen wir durch R und R′ die Halbmesser der beiden Theilkreise, durch $tCm = \alpha$, $tC'm = \alpha'$ die von den Halbmessern von der Mittelpunktslinie aus beschriebenen Winkel, durch N den normalen Druck der beiden Zähne gegen einander.

Es seien $a_{,}m'b_{,}$ und $a'_{,}m''b'_{,}$ neue nach dem Verlaufe eines Zeitelementes von den beiden Bogen eingenommene Stellungen. Durch die um die Mittelpunkte C und C′ beschriebenen Bogen mm′ und mm″ bestimmen wir die Lage des vorigen Berührungspunktes m auf die neue Stellung der beiden Bogen. Man sieht dann leicht, dass m′ und m″ sich auf derselben Seite des neuen Berührungspunktes $m_{,}$ befinden werden, wenn m in der dem Punkte t am nächsten liegenden Hälfte der Chorde tn gelegen ist (Fig. 117), dass hingegen m′ und m″ sich auf entgegengesetzten Seiten des neuen Berührungspunktes $m_{,}$ befinden, wenn $m_{,}$ in der dem Punkte t am entferntesten Hälfte der Chorde tn gelegen ist. Im ersten Falle wird die gemeinschaftliche Tangente $pmp_{,}$ der beiden Bogen zwischen die beiden Mittelpunkte C und C′ gehen, im zweiten wird sie die beiden Mittelpunkte zu derselben Seite lassen.

Während dieser im Zeitelemente stattfindenden Bewegung werden die Bogen amb und a′mb′ zum Theil auf einander rollen, zum Theil auf einander gleiten. Der durch das Rollen hervorgerufene Reibungswiderstand kann unbedenklich vernachlässigt werden, so wie auch der durch das Gleiten der Zähne auf einander hervorge-

rufene Reibungswiderstand. Der letztere Reibungswiderstand wird gleich fN sein, und auf die Strecke $m'm''$ stattfinden; seine elementäre dynamische Arbeit wird folglich gleich: $fNm'm''$.

Projiciren wir die Punkte m' und m'' auf die gemeinschaftliche Tangente pp' in $m'_{,}$ und $m''_{,}$. Weil wir eine verschwindend kleine Verschiebung angenommen haben, wird die Projection $m'_{,}m''_{,}$ gleich dem Bogen $m'm''$ sein, und folglich die elementäre Arbeit der Reibung gleich $fNm'_{,}m''_{,}$.

Es ist jetzt im Falle der Fig. 117: $m'_{,}m''_{,} = mm'_{,} - mm''_{,}$, im Falle des Fig. 118: $m'_{,}m''_{,} = mm'_{,} + mm''_{,}$.

Betrachten wir erst den Fall Fig. 117. Es ist hier:

$$mm'_{,} = mm' \cos m'mm'_{,} = mm' \cos Cmt,$$

und weil

$$mm' = Cmd\alpha : mm'_{,} = Cm \,.\, \cos Cmt \,.\, d\alpha.$$

Ebenso ist:

$$mm''_{,} = mm'' \cos m''mm''_{,} = - mm'' \cos C'mt,$$

und weil

$$mm'' = C'md\alpha' \,.\, mm''_{,} = - C'm \cos C'mtd\alpha'.$$

Es wird folglich:

$$m'_{,}m''_{,} = mm'_{,} - mm''_{,} = Cm \cos Cmt\, d\alpha + C'm \,.\, \cos C'mtd\alpha'.$$

Bezeichnen wir jetzt durch n die Länge des Normals mt, so ist in beiden Fällen:

$$Cm \,.\, \cos Cmt = nk = pC = ps + sC = n + R \cos tCp\,;$$

$$- C'm \cos C'mt = C'm \cos mC'p' = c'p' = c's - p's' = R' \cos tC'p' - n$$

oder:

$$C'm \,.\, \cos C'mt = n - R' \cos tC'p' = n - R' \cos tCp.$$

Diese Werthe substituirt geben:

$$m'_{,}m''_{,} = (n + R \cos tCp)\, d\alpha + (n - R' \cos tCp)\, d\alpha'$$
$$= n\,(d\alpha + d\alpha') + \cos tCp\,(Rd\alpha - R'd\alpha').$$

Es sind aber jetzt die Umdrehungsgeschwindigkeiten der beiden Räder den Halbmessern ihrer Theilkreise umgekehrt proportional, folglich:

$$Rd\alpha = R'd\alpha',\ d\alpha' = \frac{R}{R'}d\alpha,\ m'_{,}m''_{,} = n\,(d\alpha + d\alpha') =$$
$$n\left(1 + \frac{R}{R'}\right)d\alpha = n\left(\frac{R+R'}{R'}\right)d\alpha.$$

Betrachten wir jetzt den Fall Fig. 118. Es ist dann:

$$m'_{,}m''_{,} = m\,m'_{,} + m\,m''_{,},$$
$$m\,m'_{,} = m\,m'\cos m'm\,m'_{,} = m\,m'\cos Cmt = Cm\cos Cmt\,d\alpha,$$
$$m\,m''_{,} = m\,m''\cos m''m\,m''_{,} = m\,m''\cos C'mt = C'm\cos C'mt\,d\alpha',$$

und folglich auch hier:

$$m'_{,}m''_{,} = C'm\cos Cmt\,d\alpha + C'm\cos C'mt\,d\alpha.$$

Es ist jetzt wie im vorigen Falle:

$$Cm\cos Cmt = n + R\cos tCp,$$

und:

$$C'm\cos C'mt = C'm\cos m\,C'p' = C'p' = p's' - c's' =$$
$$= n - R'\cos tC's' = n - R'\cos tCp.$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man folglich auch hier:

$$m'_{,}m''_{,} = (n + R\cos tCp)\,d\alpha + (n - R'\cos tCp)\,d\alpha' =$$
$$= n\,(d\alpha + d\alpha') + \cos tCp\,(Rd\alpha - R'd\alpha') = n\,(d\alpha + d\alpha') =$$
$$= n\left(\frac{R+R'}{R'}\right)d\alpha.$$

Die elementäre dynamische Arbeit wird folglich gleich:

$$-fN\,.\,m'_{,}m''_{,} = -fN\,.\,n\left(\frac{R+R'}{R'}\right)d\alpha.$$

Die Zähne werden gewöhnlich so konstruirt, dass immer zwei und nur zwei Paare einander zur gleichen Zeit berühren, und dass die Berührung eines neuen Paares dann eintritt, wenn die Berührung des vorhergehenden Paares gerade in der Mittelpunktslinie stattfindet (Fig. 119). Bezeichnen wir durch N den zum ersten Paare gehörigen normalen Druck und durch n die Grösse der Normale tm, durch N' und n' die dem zweiten Paare entsprechenden Werthe dieser Grössen; bezeichnen wir ferner durch a und a' die Werthe der Winkel α und α', wenn die Zähne einander im Punkte A verlassen, durch b und b' die Werthe dieser Winkel, wenn die Zähne einander im Punkte B angreifen.

Man findet dann während des Fortschreitens eines Zahnes die

dynamische Arbeit der Reibung am ersten Paare nach der Mittelpunktslinie gleich:

$$-f.\frac{R+R'}{R'}\int_0^a N\,n\,d\alpha = -f.\frac{R+R'}{R}\int_0^{a'} N\,n\,d\alpha'$$

und diejenige der am zweiten Paare stattfindenden Reibung vor der Mittelpunktslinie gleich:

$$-f\frac{R+R'}{R'}\int_0^b N'n'd\alpha = -f.\frac{R+R'}{R}\int_0^{b'} N'n'd\alpha.$$

Die totale dynamische Arbeit der Reibung während der Fortschiebung eines Zahnes wird folglich gleich der Summe dieser zwei Ausdrücke sein, gleich:

$$f-\frac{R+R'}{R'}\left\{\int_0^a N\,n\,d\alpha + \int_0^b N'n'd\alpha\right\}.$$

Bezeichnen wir durch Q die senkrecht auf der Mittelpunktslinie längs der gemeinschaftlichen Tangente der beiden Theilkreise wirkende Kraft, welche angewandt wird, um das geführte Rad zu bewegen, durch φ den Winkel, welchen diese Tangente mit der Normale n bildet, durch φ' denjenigen, welchen sie mit der Normale n' bildet. Es muss dann das Moment der Kraft Q gleich der Summe der Momenten der Kräfte N und N' in Bezug auf den Mittelpunkt C sein, und folglich:

$$QR = NR\cos\varphi + N'R\cos\varphi',$$

oder:

$$Q = N\cos\varphi + N'\cos\varphi'.$$

Die Vertheilung der Kraft Q in den beiden Kräften $N\cos\varphi$ und $N'\cos\varphi'$ ist von der Elasticität der Zähne in ihren während der Bewegung verschiedenen Stellungen abhängig.

Wenn die Anzahl der Zähne nicht sehr klein ist, so kann man indessen, welches auch die Form der Zähne sei, die Normalen gleich den entsprechenden Bogen auf dem Theilkreise setzen, folglich im ersten Integrale: $n = R\alpha = R'\alpha'$, und ebenso im zweiten Integrale: $n = R\alpha = R'\alpha$. Es werden dann auch die Grenzwerthe der kel α und β gleich $a = b$. Es werden dann ferner die Winkel

kel φ und φ' immer sehr klein sein, so dass man ihre Cosinusse gleich der Einheit, und folglich: $Q = N + N'$ setzen kann. Es wird dann die totale dynamische Arbeit der Reibung während des Fortschreitens eines Zahnes gleich:

$$-f.\frac{R+R'}{R'}\left\{\int_0^a NR\,\alpha d\alpha + \int_0^b N'R\,\alpha d\alpha\right\} = -f(R+R').\frac{R}{R'}\left\{\int_0^a N\alpha d\alpha + \int_0^a N'\alpha d\alpha\right\}$$

$$= -f(R+R').\frac{R}{R'}\int_0^a (N+N')\alpha d\alpha = -fQ(R+R')\frac{R}{R'}.\frac{Q^2}{2}.$$

Bezeichnet man jetzt durch A den Abstand zweier Theilpunkte der Zähne auf den Theilkreisen, welche auf beiden Theilkreisen gleich gross sein müssen, so ist $a = \frac{A}{R}$ und es wird folglich die dynamische Arbeit der Reibung während der Bewegung der Räder um diese Strecke A gleich:

$$-fQ(R+R').\frac{R}{R'}.\frac{A^2}{2R^2} = -fQ.\frac{R+R'}{RR'}.\frac{A^2}{2} =$$

$$= -fQ\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).\frac{A^2}{2}.$$

Dachte man sich die Reibung als am Berührungspunkte der beiden Theilkreise statt an den Berührungspunkten der Zähne stattfindend, so müsste dieser Widerstand, damit er während der Bewegung dieselbe dynamische Arbeit entwickelte, gleich:

$$fQ\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\frac{A}{2}$$

gesetzt werden, welcher Ausdruck der an den Theilkreisen stattfindende Reibungswiderstand genannt wird.

Bezeichnet man durch m und m' die Anzahl der Zähne der beiden Räder, so wird:

$$mA = 2\pi R,\ m'A = 2\pi R',$$

folglich:

$$\frac{1}{R} = \frac{2\pi}{mA},\ \frac{1}{R'} = \frac{2\pi}{m'A},$$

und der am Theilkreise wirkende Reibungswiderstand wird gleich:

$$\pi f Q\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right).$$

§. 218.

Wirkt das eine Rad inwendig im anderen, Fig. 120, so findet man genau auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphen die Strecke, auf welcher die gleitende Reibung stattfindet, gleich:

$$n(d\alpha' - d\alpha) = n\frac{R'-R}{R'}d\alpha,$$

und folglich die während des Fortschiebens eines Zahnes entwikkelte dynamische Arbeit des Reibungswiderstandes gleich:

$$-fQ\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)\frac{A^2}{2}.$$

oder den am Theilkreise wirkenden Reibungswiderstand gleich:

$$fQ\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)\frac{A}{2} = \pi fQ\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m'}\right).$$

Setzt man $R' = \infty$, so findet man die zwischen einer Zahnstange und einem Rade, Fig. 121, stattfindende Reibung gleich:

$$fQ.\frac{A}{2R} = \frac{\pi fQ}{m},$$

und seine dynamische Arbeit während des Fortschiebens eines Zahnes gleich:

$$-fQ.\frac{A^2}{2R}.$$

Im Falle eines durch eine Welle getriebenen Stampfwerkes, Fig. 122, ist die Anzahl der Zähne zwar klein, der Winkel a daher gross; es sind aber hier die Bogen der an der Welle angebrachten Zähne oder Däumlinge Devellopanten des Theilkreises. Es ist dann immer genau, $N = Q$, $n = R\alpha$, und die obenstehenden Formeln gelten daher genau für diesen Fall. Man sieht dies auch durch eine direkte Entwickelung. Bezeichnet amb eine Stellung des Däumlings, $a_{,}m_{,}b_{,}$ die nächste, so wird die Reibung auf dem Stücke $m_{,}m'$ stattfinden, und folglich die elementäre Arbeit der Reibung gleich: $-fQ.m_{,}m'$ sein. Es ist aber hier $m_{,}m' = R\alpha d\alpha$; dieser Werth substituirt giebt den Ausdruck: $-fQR\alpha d\alpha$, welches zwischen $\alpha = o$ und $\alpha = a$ integrirt werden muss, wenn der Däumling die Heblatte zuerst in der horizontalen Mittellinie angenommen wird, und a den grössten Werth der Winkel α be-

zeichnet im Augenblicke, wo der Däumling die Heblatte gerade loslässt. Es wird folglich die während eines Hubes entwickelte dynamische Arbeit gleich: $-fQR.\frac{a^2}{2}$. Bezeichnet man durch A die Hubhöhe, so wird $A = Ra$, oder $a = \frac{A}{R}$, und folglich die dynamische Arbeit der Reibung gleich:

$$-fQR.\frac{A^2}{2R^2} = -\frac{fQ.A}{2R}$$

wie oben bei der Zahnstange.

§. 219.

Bei konischen Rädern werden immer die Räder und folglich auch die Theilung der Theilkreise so klein wie möglich gemacht. Die Bewegung und die Reibung der Zähne an einander wird dann annäherungsweise in der tangirenden Ebene der mittleren konischen Oberfläche und normal auf die Längenrichtung der Zähne stattfinden. Es folgt hieraus, dass, wenn man dieselben Bezeichnungen wie im §. 217 behält, aber diese auf die Abwicklungen der mittleren konischen Oberfläche anwendet, auch fortwährend dieselben Formeln für die dynamische Arbeit der Reibung stattfinden. Während des Fortschiebens eines Zahnes wird folglich die dynamische Arbeit der Reibung gleich:

$$-fQ\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\frac{A^2}{2},$$

wenn R und R′ hier die Halbmesser der primitiven mittleren abgewickelten Theilkreise, A den mittleren Abstand der Zähne, und Q die in der tangirenden Ebene der beiden mittleren konischen Oberflächen senkrecht auf die Längenrichtung der Zähne wirkende Kraft bezeichnen.

§. 220.

Die dynamische Arbeit des drehenden Reibungswiderstandes wird ganz ebenso berechnet, wie diejenige des gleitenden. Es sei r der Halbmesser des Zapfens, Q der auf die Axe senkrechte

Druck, so ist der Reibungswiderstand gleich: Qf', und seine dynamische Arbeit während einer Umdrehung gleich:

$$-Qf'.2\pi r = -2\pi Qf'r,$$

oder während einer Zeiteinheit, wenn die Anzahl der in der Zeiteinheit stattfindenden Umdrehungen durch n bezeichnet wird, gleich:

$$-2\pi n\, Qf'r.$$

Die dynamische Arbeit des rollenden Reibungswiderstandes wird ebenso berechnet. Es ist hier nach §. 208 die Reibung gleich: $\frac{Q}{r}f''$, und folglich die während einer Umdrehung entwickelte dynamische Arbeit gleich:

$$-\frac{Q}{r}f''.2\pi r = -2\pi Qf'',$$

und während einer Zeiteinheit gleich: $-\pi n Qf'$. Die dynamische Arbeit ist folglich in diesem Falle von der Grösse des Halbmessers des rollenden Körpers unabhängig und hängt nur von der Anzahl der während der Zeiteinheit stattfindenden Umdrehungen ab.

§. 221.

Als Beispiel werden wir die Theorie des auf einer schiefen Ebene gezogenen einrädrigen Karrens entwickeln. Es sei α der Neigungswinkel der schiefen Ebene, R der Halbmesser des Rades, r der Halbmesser der Axe desselben, P das auf der Wagenaxe wirkende Gewicht des Wagens ohne das Rad, p das Gewicht des Rades, Q die auf die Wagenaxe wirkende bewegende Kraft, und β der Winkel, welchen diese mit der schiefen Ebene bildet.

Die Reibung findet hier auf zwei Stellen statt, erstens eine drehende Reibung zwischen der Axe und dem Rade, dann eine rollende Reibung zwischen dem Rade und der schiefen Ebene.

Um die erste Reibung, diejenige der Axe gegen das Rad, zu berechnen, sucht man erst den Druck. Dieser ist der Resultante der beiden Kräfte P und Q gleich. Der Neigungswinkel dieser

Kräfte gegen einander ist gleich: $90° + \alpha + \beta$, und ihre Resultante wird folglich gleich:

$$\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(90° + \alpha + \beta)} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\sin(\alpha + \beta)},$$

und die dynamische Arbeit dieser Kraft während einer Umdrehung des Rades wird folglich nach §. 220 gleich:

$$-\,2\pi f'r\,\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\sin(\alpha + \beta)}.$$

Um den rollenden Reibungswiderstand zu finden, berechnet man erst den im Berührungspunkte stattfindenden Druck. Dieser ist der Summe der auf der schiefen Ebene senkrechten Projectionen der beiden Kräfte $P + p$ und Q gleich, folglich:

$$(P + p)\cos\alpha - Q\sin\beta.$$

Die dynamische Arbeit dieses Widerstandes während einer Umdrehung des Rades wird nach dem vorigen Paragraphen gleich:

$$-\,2\pi f' \left\{(P+p)\cos - Q\sin\beta\right\}$$

Die totale Arbeit der Reibung während der Umdrehung des Rades wird folglich gleich:

$$-\,2\pi\left\{f'r\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\sin(\alpha+\beta)} + f''\left((P+p)\cos\alpha - Q\sin\beta\right)\right\}$$

Bezeichnet man die in einer Zeiteinheit durchlaufene Strecke durch s, und die während dieser Zeit stattgefundenen Umdrehungen des Rades durch n, so ist: $n = \frac{s}{2\pi R}$, folglich wird die während einer Zeiteinheit entwickelte dynamische Arbeit des Reibungswiderstandes, wenn man den obigen Ausdruck mit $n = \frac{s}{2\pi R}$ multiplicirt, gleich:

$$-\,s\left\{f'\frac{r}{R}\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\sin(\alpha+\beta)} + \frac{f''}{R}\Big((P+p)\cos\alpha - \sin\beta\Big)\right\}.$$

Die während desselben Zeitraumes entwickelte Arbeit der Last $P + p$ wird gleich: $\mp s(P + p)\sin\alpha$, und diejenige der Kraft Q gleich: $\pm sQ\cos\beta$, wo die oberen Zeichen genommen werden müssen, wenn der Wagen nach oben gezogen wird, die unteren, wenn er herunterrollt. Die totale dynamische Arbeit wird folglich gleich:

$$s \left\{ \pm Q \cos\beta \mp (P+p) \sin\alpha - f' \frac{r}{R} \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \sin(\alpha+\beta)} - \frac{f''}{R} \Big((P+p) \cos\alpha - Q \sin\beta \Big) \right\}.$$

Dieser Ausdruck, gleich dem Zuwachs der lebendigen Kraft gesetzt, giebt das Gesetz der Bewegung.

Nehmen wir sowohl die Ebene als die bewegende Kraft Q horizontal an, so wird $\alpha = o$, $\beta = o$ und die totale dynamische Arbeit gleich:

$$s \left\{ Q - f' \frac{r}{R} \sqrt{P^2 + Q^2} - \frac{f''}{R} (P+P) \right\}.$$

Soll die Bewegung eine stetige sein, so ist die lebendige Kraft constant, und es wird folglich:

$$Q - f' \frac{r}{R} \sqrt{P^2 + Q^2} - \frac{f''}{R} (P+p) = o.$$

Hieraus findet man dann:

$$Q = \frac{f'' R (P+p) + f' r \sqrt{R^2 P^2 + f'^2 r^2 P^2 - f''^2 (P+p)^2}}{R^2 + f'^2 r^2}.$$

Vernachlässigt man die in Bezug auf $R^2 P^2$ kleinen Grössen $f'r^2 P^2$ und $f''^2 (P+p)^2$, so findet man:

$$Q = \frac{f'' (P+p) + f' r P}{R}.$$

§. 222.

Tafeln der Reibungscoefficienten.

I. Gleitende Reibungscoefficienten.

Substanzen der auf einander gleitenden Flächen.	Richtung der Fasern gegen einander und gegen den Sinn der Bewegung.	Schmiermittel.	Reibungscoefficienten. Im Augenblicke der Bewegung, wenn die Körper einige Zeit in Berührung gewesen.	Reibungscoefficienten. Wenn die Bewegung stattfindet.
Eiche auf Eiche	parallel	Ohne Schmiere	0,62	0,48
	— —	Mit trockener Seife gerieben	0,44	0,16
	— —	Mit Talg bestrichen	0,16	0,08
	— —	Mit Wagenschmiere	—	0,26
	gekreuzt	Ohne Schmiere	0,54	0,34
	— —	Mit Wasser benetzt	0,71	0,25
	— —	Mit Wagenschmiere	—	0,25
	Aufrecht stehendes auf flach gelegtes Holz	Ohne Schmiere	0,43	0,19
Stark gegerbtes Ochsenleder auf Eiche	Das Leder flach	Ohne Schmiere	0,61	0,35
	Das Leder auf hoher Kante	Ohne Schmiere	0,43	0,30
	— —	Mit Wasser benetzt	0,79	0,29
Hanf in Fäden auf Eiche	parallel	Ohne Schmiere	0,80	0,52
	gekreuzt	Mit Wasser benetzt	—	0,33
Schmiedeeisen auf Eiche	Die Fasern der Eiche parallel der Bewegung	Ohne Schmiere	0,62	0,62
	— —	Mit Wasser benetzt	0,65	0,26
	— —	Mit trockener Seife gerieben	—	0,21
Gusseisen auf Eiche	Die Fasern der Eiche parallel der Bewegung	Ohne Schmiere	—	0,49
	— —	Mit Wasser benetzt	0,65	0,22
	— —	Mit trockener Seife gerieben	—	0,19
	— —	Mit Talg bestrichen	—	0,08
	— —	Mit Wagenschmiere	—	0,22
	Die Fasern der Eiche senkrecht auf die Bewegung	Ohne Schmiere	—	0,38
Kupfer auf Eiche	Die Fasern der Eiche parallel der Bewegung	Ohne Schmiere	0,62	0,62

Substanzen der auf einander gleitenden Flächen	Richtung der Fasern gegen einander und gegen den Sinn der Bewegung.	Schmiermittel.	Reibungscoefficienten. Im Augenblicke der Bewegung, wenn die Körper einige Zeit in Berührung gewesen.	Reibungscoefficienten. Wenn die Bewegung statt findet.
Gusseisen auf Gusseisen		Ohne Schmiere	0,16	0,15
		Mit Talg	0,10	0,10
		Schweinefett	—	0,07
		Oel	—	0,06
		Mit trockener Seife	—	0,20
		Fettig	—	0,14
		Wagenschmiere	—	0,31
Schmiedeeisen auf Gusseisen		Ohne Schmiere	0,19	0,19
		Talg	0,10	0,10
		Schweinefett	0,10	0,08
		Oel	0,11	0,07
		Fettig	0,12	—
		Wagenschmiere	—	0,12
Stahl auf Gusseisen		Ohne Schmiere	—	0,20
		Talg	0,11	0,11
		Schweinefett	—	0,08
		Oel	—	0,08
		Fettig	—	0,11
Messing auf Gusseisen		Ohne Schmiere	—	0,19
		Talg	—	0,07
		Schweinefett	—	0,07
		Oel	—	0,07
		Fettig	—	0,12
Bronze auf Gusseisen		Ohne Schmiere	—	0,22
		Talg	0,11	0,09
		Oel	—	0,08
		Fettig	—	0,11
Gegerbtes Ochsenleder auf Gusseisen	Flach daraufgelegt	Ohne Schmiere	—	0,56
	— —	Talg	—	0,16
	— —	Oel	0,13	0,13
	— —	Das Leder fettig auf genästem Metall	0,27	0,23
	— —	Nass	0,62	0,36
	Auf die hohe Kante	Mit Wasser sehr benetzt	0,62	—
		Oel	0,13	—
Hanf in Fäden auf Gusseisen	parallel	Talg	0,13	—
	Die Hanffäden senkrecht auf der Bewegung, wie bei den Stempeln der Maschinen	Talg	—	0,19

Substanzen der auf einander gleitenden Flächen.	Richtung der Fasern gegen einander und gegen den Sinn der Bewegung.	Schmiermittel.	Reibungscoefficienten. Im Augenblicke der Bewegung, wenn die Körper einige Zeit in Berührung gewesen.	Wenn die Bewegung stattfindet.
Hanf in Fäden auf Gusseisen	Die Hanffäden senkrecht auf der Bewegung, wie bei den Stempeln der Maschinen	Oel	—	0,15
Gayac (Franzosenholz) auf Gusseisen	Die Fasern parallel der Bewegung	Talg oder Oel	—	0,07
	— —	Fettig	—	0,12
Schmiedeeisen auf Schmiedeeisen	Die Streifen parallel	Ohne Schmiere	0,14	0,14
	— —	Talg	0,11	0,08
	— —	Schweinefett	—	0,08
	— —	Oel	—	0,07
	— —	Fettig	—	0,18
Stahl auf Schmiedeeisen	Die Streifen parallel der Bewegung	Talg	—	0,09
	— —	Schweinefett	—	0,08
Bronze auf Schmiedeeisen	Die Streifen parallel der Bewegung	Ohne Schmiere	—	0,16
	— —	Talg	—	0,08
	— —	Oel	—	0,07
	— —	Fettig	—	0,17
Gayac (Franzosenholz) auf Schmiedeeisen	Die Fasern parallel	Oel	—	0,07
	— —	Fettig	—	0,15
Bronze auf Bronze	— —	Ohne Schmiere	—	0,20
		Oel	—	0,06
		Fettig	—	0,13
Gegerbtes Ochsenleder auf Bronze	Flach darauf gelegt	Talg	—	0,24
	— —	Oel	—	0,19
	Auf die hohe Kante gelegt	Talg	—	0,14
	— —	Oel	—	0,13
Gayac auf Bronze	Die Fasern parallel der Bewegung	Talg	—	0,08
	— —	Oel	--	0,05
	— —	Fettig	—	0,15
Weicher Kalkstein auf weichem Kalkstein	— —	Ohne Schmiere	0,74	0,64
Harter Kalkstein auf weichem Kalkstein	— —	Ohne Schmiere	0,75	0,67
Gewöhnl. Kalkstein auf weichem Kalkstein	— —	Ohne Schmiere	0,67	0,65

Substanzen der auf einander gleitenden Flächen.	Richtung der Fasern gegen einander und gegen den Sinn der Bewegung.	Schmiermittel.	Reibungscoefficienten.	
			Im Augenblicke der Bewegung, wenn die Körper einige Zeit in Berührung gewesen.	Wenn die Bewegung stattfindet.
Eisen auf weichem Kalkstein	— —	Ohne Schmiere	—	0,69
Eiche auf weichem Kalkstein	Die Holzfasern senkrecht auf die Steinplatte	Ohne Schmiere	—	0,38
Gewöhnlicher Backstein auf hartem Kalkstein	— —	Ohne Schmiere	0,67	0,60
Eiche auf hartem Kalkstein	Die Holzfasern senkrecht auf die Steinplatte	Ohne Schmiere	—	0,64
Eisen auf hartem Kalkstein	— —	Ohne Schmiere	—	0,42

II. Drehende Reibungscoefficienten.

Substanz des Zapfens.	Substanz des Zapfenlagers.	Schmiermittel.	Reibungscoefficienten, wenn die Schmiermittel erneuert werden	
			auf eine nicht continuirliche Weise	auf eine continuirliche Weise
Eisen	Eisen	Oel, Schweinefett oder Seife	0,08	0,08
— —	— —	Fettig	0,14	—
— —	Bronze	Oel, Schweinefett, Seife	0,08	0,05
— —	— —	Fettig	0,19	—
— —	— —	Sehr wenig fettig	0,25	—
— —	Gayac (Franzosenholz)	Oel, Schweinefett	0,11	0,09
Bronze	Bronze	Oel, Schweinefett	0,10	—
— —	Eisen	Oel, Seife	—	0,05
Gayac	Eisen	Schweinefett	0,12	—
— —	— —	Fettig	0,15	—
— —	Gayac	Schweinefett	—	0,07

III. Rollende Reibungscoefficienten.

Wagenräder aus Holz mit Eisenbändern versehen,

Wagenräder aus Holz mit Eisenbändern versehen	auf einer Chaussee:	0,015 bis 0,065
	auf einer gepflasterten Strasse:	0,018 bis 0,024
	auf Holzbrettern:	0,010
Eiserne, gegossene Wagenräder	auf Eisenbahnen:	0,002 bis 0,003
	auf gut zusammengefügten Granitblöcken	0,001.

§. 223.

Wenn ein Seil gebogen werden soll, so ist dazu eine gewisse Kraft erforderlich. Es sei das um einen Cylinder gebogene Seil PMQ (Fig. 123); es trage an dem einen Ende eine Last Q und sei an dem andern Ende durch eine Kraft P bewegt, welche die Last Q aufwärts zieht. Es wird dann der Theil BQ wegen der Steifheit des Seiles sich von der ursprünglichen Richtung der Last Q entfernen, und das Moment dieser Last dadurch vergrössert werden. Der andere Theil AP des Seiles wird dagegen die Richtung der Kraft P beibehalten. Der durch diese Steifigkeit des Seiles hervorgebrachte Widerstand der Kraft Q kann durch die folgende Formel ausgedrückt werden:

$$\frac{d^m}{D}(a + bQ),$$

wo d den Durchmesser des Seiles, D denjenigen des Cylinders bezeichnet, Q die am Seile wirkende Last; m ist ein Coefficient, welcher für neue Seile gleich 2, für weniger oder mehr gebrauchte gleich $1\frac{1}{2}$ oder 1 gesetzt werden kann; endlich sind a und b zwei Coefficienten, deren Werthe für ungetheerte Hanfseile, wenn die Durchmesser in Zollen und das Gewicht Q in Pfunden angegeben werden und wenn die Seile trocken sind:

$$a = 3,\ b = 0{,}15,$$

wenn die Seile nass sind:

$$a = 6,\ b = 0{,}15$$

angenommen werden können.

Es sind übrigens stark zusammengedrehte Seile steifer als locker gedrehte, und gedrehte überhaupt steifer als geflochtene.

Cap. IV.

Gesetze des Gleichgewichts tropfbar-flüssiger Körper.

§. 224.

Wie im §. 131 schon erklärt, bezeichnet man als flüssige Körper solche, deren Molekülarkräfte sich nur einer Volumenveränderung widersetzen, ohne einen Widerstand gegen eine Formveränderung zu entwickeln; und zwar bezeichnet man als tropfbar-flüssige Körper solche, welche ein bestimmtes Volumen haben, das sie nicht zu vergrössern streben, im Gegensatze zu den luftförmig-flüssigen Körpern, welche sich nur im zusammengedrückten Zustande zeigen, und folglich immer ihr Volumen zu vergrössern streben.

Bei flüssigen Körpern wird folglich die kleinste Kraft hinreichen, um einen Theil von dem andern loszutrennen und irgendwo hinzubewegen. Diese Voraussetzung eines vollkommenen Flüssigkeitszustandes findet indessen bei keinem tropfbar-flüssigen Körper in absoluter Strenge statt; es giebt jedoch Körper, welche sich dieser Voraussetzung sehr nähern, und welche daher als absolut flüssig betrachtet werden können.

Die tropfbar-flüssigen Körper wurden früher auch oft unzusammendrückbare genannt, im Gegensatze zu den zusammendrückbaren luftförmigen Körpern. Es sind aber, wie genauere Untersuchungen gezeigt haben, auch die tropfbar-flüssigen Körper zu-

sammendrückbar, aber so wenig, dass sie in den Anwendungen der Mechanik ohne merklichen Fehler als unzusammendrückbar angesehen werden können. Die Zusammendrückbarkeit des luftfreien Wassers ist für den Druck einer Atmosphäre nur $\frac{1}{20000}$ seines ursprünglichen Volumens.

§. 225.

Wenn ein tropfbar-flüssiger Körper in ein Gefäss eingeschlossen unter der Wirkung irgend welcher Kräfte in Gleichgewicht ist, so wird er einen Druck ausüben auf die Wände des Gefässes, welche seine Bewegung hindern. Dieser Druck kann sich von einem Punkte zum andern ändern. Um seine Grösse in irgend einem Punkte zu bezeichnen, reducirt man ihn immer auf die Flächeneinheit, indem man das Verhältniss des auf irgend ein verschwindend kleines Element der Wand stattfindenden Druckes zur Oberfläche dieses Elementes angiebt; dieses Verhältniss wird dann als der in diesem Elemente auf die Flächeneinheit stattfindende Druck bezeichnet.

Dieser Druck muss in jedem Punkte normal auf die Oberfläche stattfinden. Fände nämlich derselbe schief gegen die Wand statt, so würde das drückende Molekül der Flüssigkeit von der mit der Wand parallelen Componente dieses Druckes bewegt werden, und folglich nicht Gleichgewicht stattfinden können. Die Wand des Gefässes übt dann auch in jedem Punkte einen dem Drucke gleichen und entgegengesetzten Gegendruck aus, welcher folglich auch in jedem Punkte normal auf die Oberfläche der Wand stattfindet.

§. 226.

Eine andere Grundeigenschaft der Flüssigkeiten ist, dass, wenn eine gewisse Menge einer Flüssigkeit, welche ein geschlossenes Gefäss genau füllt, unter der Einwirkung beliebiger Kräfte sich im Zustande des Gleichgewichts befindet, und man durch einen Kolben

auf einen Theil der Oberfläche irgend einen Druck ausübt, so wird dieser Druck mit derselben Intensität überall hin fortgepflanzt, so dass auf jedem Elemente der Oberfläche der auf die Flächeneinheit vorher stattfindende Druck um gleichviel vermehrt wird. Bezeichnen wir durch P den auf den Kolben stattfindenden Druck, durch a den Durchschnitt des Kolbens; es wird dann der auf die Flächeneinheit stattfindende Druck überall um dieselbe Grösse $\frac{P}{a}$ vermehrt werden.

Um diesen Satz aus dem allgemeinen Princip der virtuellen Geschwindigkeiten herzuleiten, kann man zuerst die übrigen gegebenen, durch die festen Wände des Gefässes im Gleichgewicht gehaltenen Kräfte und die durch sie gegen diese Wände hervorgebrachten normalen Drucke ausser Betracht setzen. Bezeichnen wir durch ω irgend ein Element der Oberfläche, und durch p den auf die Flächeneinheit stattfindenden vermehrten Druck; so wird folglich der auf dieses als eben betrachtete Element stattfindende vermehrte Druck gleich $p\omega$ sein. Denken wir uns jetzt dieses Element ω als die Grundfläche eines beweglichen Kolbens, auf welchen eine jenem Drucke $p\omega$ gleiche, aber entgegengesetzte Kraft wirkt. Es wird hierdurch das Gleichgewicht in Nichts geändert werden, weil dieser Kolben und die darauf wirkende Kraft den normalen Druck $p\omega$ eben so gut wie die feste Wand im Gleichgewicht halten wird. Man bewege jetzt den ersten Kolben um eine Grösse dx herunter, es muss dann der zweite Kolben um eine Grösse dy herausbewegt werden, wo $adx = \omega dy$, weil die Flüssigkeit fortwährend denselben Raum einnehmen wird. Wenden wir jetzt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten an. Weil zu der stattgefundenen Formveränderung wegen des flüssigen Zustandes keine Kraft nöthig gewesen ist, wird man nur die virtuelle Arbeit der beiden Kolben zu betrachten haben. Diejenige des ersten wird gleich: Pdx, diejenige des zweiten wird gleich: $-p\omega dy$. Die Gleichung des Gleichgewichts wird folglich: $Pdx = p\omega dy$,

woraus, wenn man mit der vorhergehenden Gleichung: $adx = \omega dy$ dividirt: $\frac{P}{a} = p$. Es wird folglich der auf die Flächeneinheit stattfindende vermehrte Druck p überall gleich sein.

§. 227.

Die in den beiden vorhergehenden Paragraphen entwickelten Hauptsätze gelten von dem inneren Drucke eben so gut, wie von dem an den äusseren Wänden stattfindenden. In der That, das Gleichgewicht und der in jedem Punkte stattfindende Druck wird dadurch nicht geändert, dass man annimmt, ein beliebiger Theil der Flüssigkeit erstarre zu einem festen Körper. Durch einen beliebigen Punkt im Innern der Flüssigkeit und in einer beliebigen Richtung kann man folglich eine feste Wand annehmen; der auf irgend ein Element dieser Wand stattfindende Druck wird folglich normal, und, wenn dieser Druck von einem auf die Oberfläche der Flüssigkeit, welche sonst das geschlossene Gefäss ausfüllt, ausgeübten Drucke herrührt, wird derselbe auf die Flächeneinheit überall jenem Drucke gleich sein.

Der in einem gegebenen inneren Punkte der Flüssigkeit stattfindende Druck wird ferner derselbe sein, welches auch die Richtung des Elementes der Oberfläche sei, auf welches er ausgeübt wird. Denn denkt man sich um einen solchen Punkt ein unendlich kleines Polyeder aus der Flüssigkeit gebildet, und lässt man dieses Polyeder erstarren, so wird es im Gleichgewicht verbleiben unter dem Einfluss der auf seine Oberfläche ausgeübten Drucke und der auf das Innere des Polyeders wirkenden Kräfte. Diese letzteren werden aber der Masse dieses kleinen Polyeders proportional sein müssen und folglich unendlich kleine Grössen dritten Grades sein, während die auf die Flächen des Polyeders auswendig ausgeübten Drucke der Ausdehnung dieser Flächen proportional und folglich unendlich kleine Grössen zweiten Grades sind. Bei einem verschwindenden Polyeder kann man folglich die auf sein Inne-

res wirkenden Kräfte im Verhältniss zu den von aussen her ausgeübten Drucken vernachlässigen und das Gleichgewicht als zwischen diesen auf die Flächen des Polyeders stattfindenden Drucken allein bestehend annehmen. Denkt man sich jetzt das Polyeder als flüssig, und die Flüssigkeit ausserhalb desselben als erstarrend, so wird hierdurch das Gleichgewicht in Nichts gestört, und auch nicht die gegenseitige Wirkung der Molekülen, folglich auch nicht die stattfindenden Drucke. Zwischen den auf die Wände des verschwindend kleinen polyedrischen Gefässes stattfindenden Drucken soll folglich fortwährend Gleichgewicht stattfinden, was nach dem vorigen Paragraph nur der Fall sein kann, wenn diese überall auf die Flächeneinheit reducirt gleich sind. Denkt man sich jetzt das Polyeder als in einen Punkt verschwindend, so werden alle Flächen des Polyeders annäherungsweise durch diesen Punkt gehen, und es wird folglich der Druck auf jede durch diesen Punkt gehende Ebene, ohne Rücksicht auf ihre Richtung, auf die Flächeneinheit reducirt in diesem Punkte überall gleich sein. Er wird darum der in diesem Punkte stattfindende Druck genannt.

§. 228.

Bezeichnen wir durch x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes einer Flüssigkeit, durch ϱ die Dichtigkeit, durch p den Druck auf die Flächeneinheit in diesem Punkte, durch X, Y, Z die Componenten der auf diesen Punkt wirkenden Kraft, auf die Masseneinheit zurückführt. Denkt man sich durch diesen Punkt ein Parallelepiped construirt, dessen drei durch den Punkt x, y, z gehende Seitenlinien die Zuwächse der Coordinaten: dx, dy, dz sind; die Masse der in diesem Parallelepiped eingeschlossenen Flüssigkeit wird dann gleich: $\varrho\, dx.dy.dz$, und die Componenten der auf dasselbe wirkenden Kraft gleich:

$$X \varrho\, dx.dy.dz, \quad Y \varrho\, dx.dy.dz, \quad Z \varrho\, dx.dy.dz.$$

Betrachtet man jetzt die mit der yz-Ebene parallelen Seitenflächen dieses Elementes. Es sind deren zwei, die eine durch den Punkt

x, y, z, die andere durch den Punkt x + dx, y, z gehend; die Ausdehnung beider ist gleich dydz. Der auf jede dieser Flächen ausgeübte Druck kann in Bezug auf die ganze Ausdehnung dieser verschwindend kleinen Flächen als constant betrachtet werden. Es wird folglich der auf die erste durch den Punkt x, y, z gehende Fläche ausgeübte Druck gleich: pdydz, und der auf die zweite damit parallele Ebene ausgeübte Druck gleich:

$$-(p + d_x p dx)\, dydz.$$

Diese beiden mit der x Achse parallelen, in entgegengesetzter Richtung wirkenden Drucke werden eine Resultante, gleich:

$$-d_x p\, dx\, dy\, dz$$

haben. Ebenso wird die Resultante der auf die beiden mit der xz-Ebene parallelen Flächen ausgeübten Drucke gleich:

$$-d_y p\, dx\, dy\, dz,$$

und die Resultante der auf die beiden mit der xy-Ebene parallelen Flächen ausgeübten Drucke wird gleich:

$$-d_z p\, dx\, dy\, dz.$$

Diese drei Kräfte, welche als im Mittelpunkte des Parallelepipeds wirkend angenommen werden können, müssen dann die Componenten der auf das Parallelepiped wirkenden gegebenen Kraft im Gleichgewicht halten, und man hat folglich die Gleichungen:

$$d_x p \,.\, dxdydz = X\varrho \,.\, dxdydz,\quad d_y p \,.\, dxdydz = Y\varrho \,.\, dxdydz,$$

$$d_z p \,.\, dxdydz = Z\varrho \,.\, dxdydz,$$

$$\text{oder: } d_x p = X\varrho,\ d_y p = Y\varrho,\ d_z p = Z\varrho,$$

woraus:

$$dp = \varrho\,(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Wenn Gleichgewicht stattfinden soll, muss folglich der Ausdruck: $\varrho\,(Xdx + Ydy + Zdz)$ ein vollständiges Differential sein, und sein Integral giebt den im Punkte x, y, z stattfindenden Druck. Um die bei der Integration vorkommenden willkührlichen Constanten zu bestimmen, ist es nothwendig, dass der in irgend einem Punkte stattfindende Druck gegeben wird.

§. 229.

Man bezeichnet mit dem Namen **Gleichdrucksfläche** oder auch **Niveauschicht** die durch alle Punkte gleichen Druckes gehende Fläche. Ihre Gleichung wird durch die Bedingung: $p = \text{const}$, oder $dp = o$ bestimmt, woraus:

$$Xdx + Ydy + Zdz = o.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die Richtung der auf irgend einen Punkt (x, y, z) dieser Fläche wirkenden Kraft, deren Componenten X, Y, Z sind, auf dieser Fläche normal ist. Ist die freie Oberfläche der Flüssigkeit einem gleichmässigen Drucke unterworfen, so wird sie selbst eine Gleichdrucksfläche.

Wenn: $Xdx + Ydy + Zdz$ das vollständige Differential einer Funktion $\varphi(x, y, z)$ ist, so wird: $dp = \varrho \,.\, d\varphi(x, y, z)$. Es muss dann hier, weil p eine Funktion von x, y, z sein soll, ϱ eine Funktion von $\varphi(x, y, z)$ sein. Es wird dann folglich ϱ constant, wenn $\varphi(x, y, z)$ constant ist, d. h. für jeden Punkt einer Gleichdrucksfläche. Diese sind folglich Flächen gleicher Dichtigkeit und gleichen und normalen Druckes.

§. 230.

Wenn die Schwere die einzige auf die Flüssigkeit wirkende Kraft ist, und man nimmt die z-Axe als vertical und positiv nach unten, so wird: $X = Y = o$, $Z = g$. Die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts wird dann:

$$dp = \varrho\, g\, dz.$$

Ist die Dichtigkeit ϱ constant, was man bei nur einer Flüssigkeit wegen der sehr kleinen Zusammendrückbarkeit annehmen kann, so wird folglich:

$$p = \varrho\, gz + c,$$

wo c die unbestimmte Constante bezeichnet. Ist der in irgend einer Höhe $z = h$ stattfindende Druck P gegeben, so wird $P = \varrho gh + c$, und folglich:

$$p = \varrho g(z - h) + P.$$

Die Gleichdrucksflächen sind dann horizontale Ebenen und der Druck p nur von der Höhe z abhängig.

Ist die Dichtigkeit ϱ veränderlich, so wird:

$$p = g\int \varrho \, dz.$$

§. 231.

Um den Druck einer schweren Flüssigkeit auf den Boden und die Wände eines Gefässes zu finden, nehme man den Anfangspunkt der Coordinaten in der freien Oberfläche dieser Flüssigkeit an, und wie früher die positive z-Axe vertical nach unten. Bezeichnet man durch P den auf die freie Oberfläche stattfindenden Druck der Atmosphäre, und durch ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so wird der Druck in der Tiefe z unter der freien Oberfläche der Flüssigkeit auf die Flächeneinheit gleich:

$$p = P + \varrho gz.$$

Gegen eine horizontale Ebene, wie z. B. den Boden des Gefässes, wird der Druck dem Flächeninhalt der Ebene proportional sein, und wenn diese gleich a gesetzt wird, gleich:

$$Pa + \varrho gza.$$

Um den gegen eine schiefe Ebene ausgeübten Druck zu finden, zerlege man diese in horizontale Elementarstreifen. Bezeichnet man den Inhalt eines solchen Elementes durch df, und seine Tiefe unter der freien Oberfläche der Flüssigkeit durch z, so wird der senkrecht auf diese Elementarstreifen ausgeübte Druck gleich: $P df + \varrho gz df$, und der ganze auf die schiefe Ebene ausgeübte Druck gleich:

$$P\int df + \varrho g\int z df.$$

Bezeichnet man durch f den Flächeninhalt der ganzen in die Flüssigkeit eingetauchten schiefen Ebene, durch ζ die Tiefe ihres Schwerpunktes unter der freien Oberfläche der Flüssigkeit, so wird $\int df = f$, $\int z df = \zeta f$, und folglich der gegen eine in die Flüssigkeit

eingetauchte schiefe Ebene ausgeübte Druck gleich:

$$Pf + \varrho g \zeta f.$$

d. h. gleich der Summe von dem Drucke der Atmosphäre auf dieselbe Ebene, und dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Grundfläche die Ebene, und deren Höhe die Tiefe des Schwerpunkts dieser Ebene ist.

Die Lage der Resultante aller auf die schiefen Ebene ausgeübten Elementardrucke wird nach den allgemeinen Formeln der Zusammensetzung paralleler Kräfte gefunden. Der Punkt, wo dieser Resultantendruck die schiefe Ebene trifft, wird der **Mittelpunkt des Druckes** genannt.

Nehmen wir in der schiefen Ebene zwei auf einander senkrechte Coordinatenaxen an (Fig. 124.) und zwar so, dass die eine, die y-Axe, die Durchschnittslinie der Ebene mit der freien Oberfläche der Flüssigkeit bildet. Bezeichnet man durch α den Neigungswinkel der schiefen Ebene, so wird die Tiefe z eines Punktes, dessen Coordinaten in der schiefen Ebene x und y sind, gleich: $z = x \sin \alpha$. Es seien jetzt y_0 und y_1 die zur Abscisse x gehörigen zwei Ordinaten der Grenzlinie der schiefen Ebene, so wird: $df = (y_1 - y_0)\,dx$ der Flächeninhalt eines horizontalen Elementarstreifens, und:

$$P(y_1 - y_0)\,dx + \varrho g \sin \alpha\, x (y_1 - y_0)\,dx$$

der auf dasselbe stattfindende Druck. Die Coordinaten des Wirkungspunktes dieses elementaren Druckes werden x und $\frac{y_1 + y_0}{2}$, und folglich die Coordinaten des Mittelpunktes aller dieser parallelen Elementarpressungen:

$$\xi = \frac{P\int x (y_1 - y_0)\,dx + \varrho g \sin \alpha \int x^2 (y_1 - y_0)\,dx}{P\int (y_1 - y_0)\,dx + \varrho g \sin \alpha \int x (y_1 - y_0)\,dx},$$

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} P\int (y_1^2 - y_0^2)\,dx + \frac{1}{2} \varrho g \sin \alpha \int x (y_1^2 - y_0^2)\,dx}{P\int (y_1 - y_0)\,dx + \varrho g \sin \alpha \int x (y_1 - y_0)\,dx}.$$

Nimmt man auf den Druck der Atmosphäre keine Rücksicht und

setzt man folglich $P = o$, so werden die Coordinaten des Mittelpunkts des Druckes:

$$\xi = \frac{\int x^2 (y_1 - y_0)\, dx}{\int x\, (y_1 - y_0)\, dx},\ \eta = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\int (y_1^2 - y_0^2)\, dx}{\int (y_1 - y_0)\, dx}.$$

Es sei als Beispiel die schiefe Ebene ein Paralleltrapez, dessen zwei parallele Grundlinien horizontal sind. (Fig. 124.) Es sei a die Länge der oberen Grundlinie, c ihre Tiefe unter der freien Oberfläche der Flüssigkeit, b die untere Grundlinie, h die Höhe des Trapezes. Es wird dann der Mittelpunkt des Druckes nothwendig in der die Halbirungspunkte beider parallelen Grundlinien vereinigenden Geraden liegen, und man braucht folglich nur noch die eine Ordinate, ξ, dieses Punktes zu suchen. Es wird dann hier der Abstand der zur Abscisse x gehörigen Ordinate der oberen Grundlinie des Trapezes gleich: $x - \frac{c}{\sin \alpha}$, und folglich die Länge dieser Ordinate im Trapeze:

$$y_1 - y_0 = a + \frac{(b-a)\left(x - \frac{c}{\sin \alpha}\right)}{h}.$$

Dieser Werth soll jetzt in den vorhergehenden Formeln substituirt, und in Bezug auf x zwischen den Grenzen: $x = \frac{c}{\sin \alpha}$ und $x = h + \frac{c}{\sin \alpha}$ integrirt werden. Statt dessen setze man: $x - \frac{c}{\sin \alpha} = x'$, folglich:

$$x = x' + \frac{c}{\sin \alpha},\ y_1 - y_0 = a + \left(\frac{b-a}{h}\right) x'$$

und integrire zwischen den Grenzen: $x' = o$, und $x' = h$. Man findet dann:

$$\int (y_1 - y_0)\, x^2\, dx = \int_0^h \left[a + \left(\frac{b-a}{h}\right) x'\right]\left[x' + \frac{c}{\sin \alpha}\right]^2 dx'$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(b+a)\, c^2\, h}{\sin^2 \alpha} + \tfrac{2}{3} \cdot \frac{(b + \frac{1}{2} a)\, c h^2}{\sin \alpha} + \tfrac{1}{4}\,(h + \tfrac{1}{3} a)\, h^3.$$

$$\int (y_1 - y_o)\, x dx = \int_0^h \left[a + \frac{b-a}{h} x'\right]\left[x' + \frac{c}{\sin \alpha}\right] dx'$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(b+a)\, c h}{\sin \alpha} + \tfrac{1}{3}(b + \tfrac{1}{2} a) h^2.$$

Hieraus findet man dann:

$$\xi = \frac{\tfrac{1}{2} \cdot \frac{(b+a)\, c^2 h}{\sin^2 \alpha} + \tfrac{2}{3}\frac{(b+\frac{1}{2}a)\, c h^2}{\sin \alpha} + \tfrac{1}{4}(b + \tfrac{1}{3} a) h^3}{\tfrac{1}{2} \cdot \frac{(b+a)\, c h}{\sin \alpha} + \tfrac{1}{3}(b + \tfrac{1}{2} a) h^2}.$$

Setzt man $\xi - \frac{c}{\sin \alpha} = \xi'$, wo folglich ξ' gleich dem Abstande des Mittelpunktes des Drucks von der oberen Grundlinie ist, so wird:

$$\xi' = \frac{\tfrac{1}{3} \cdot \frac{(b+\frac{1}{2}a)\, c h^2}{\sin \alpha} + \tfrac{1}{4}(b + \tfrac{1}{3} a) h^3}{\tfrac{1}{2} \cdot \frac{(b+a)\, c h}{\sin \alpha} + \tfrac{1}{3}(b + \tfrac{1}{2} a) h^2}$$

$$= \frac{2(a + 2b)\, c h + (a + 3b) h^2 \sin \alpha}{6(a+b)\, c + 2(a+2b)\, h \sin \alpha}.$$

Ist $c = o$, d. h. liegt die obere Grundlinie des Trapezes in der Oberfläche der Flüssigkeit, so wird:

$$\xi' = \frac{(a + 3b) h^2 \sin \alpha}{2(a+2b) h \sin \alpha} = \frac{(a+3b) h}{2(a+2b)},$$

und folglich von dem Neigungswinkel α unabhängig.

Wenn $a = b$, d. h. wenn das Trapez ein Parallelogramm ist, so wird:

$$\xi' = \frac{6 a c h + 4 a h^2 \sin \alpha}{12 a c + 6 a h \sin \alpha} = \frac{3 a c h + 2 a h^2 \sin \alpha}{6 a c + 3 a h \sin \alpha}.$$

Wenn zugleich $c = o$, so wird $\xi' = \frac{2}{3}$ h.

Wenn $a = o$, d. h. wenn das Trapez in ein Dreieck reducirt wird, dessen Spitze nach oben gekehrt und dessen Grundlinie horizontal ist, so wird:

$$\xi' = \frac{4 b c h + 3 b h^2 \sin \alpha}{6 b c + 4 b h \sin \alpha}.$$

Wenn zugleich $c = o$, d. h. die Spitze des Dreiecks sich in der Oberfläche der Flüssigkeit befindet, so wird: $\xi' = \frac{3}{4}$ h.

Wenn b = o, d. h. die Spitze des Dreiecks nach unten gekehrt und die Grundlinie fortwährend horizontal ist, so wird:

$$\xi' = \frac{2ach + ah^2 \sin\alpha}{6ac + 2ah \sin\alpha}.$$

Wenn zugleich c = o, d. h. wenn die Grundlinie des Dreiecks sich in der Oberfläche der Flüssigkeit befindet, so wird: $\xi' = \frac{1}{2}h$.

§. 232.

Die auf eine krumme Fläche stattfindenden Normaldrucke können nicht immer auf eine Kraft reducirt werden, wie die, welche gegen eine Ebene stattfinden, weil sie nicht wie diese unter einander parallel sind. Da man die Grösse und Richtung des auf jedes Element stattfindenden Druckes kennt, so kann man aber nach den im ersten Abschnitte Cap. V. gegebenen Gesetzen von der Reduction der Kräfte, diese Elementardrucke immer auf drei nach den Coordinatenaxen gerichtete Kräfte und auf drei in den Coordinatenebenen wirkende Kräftepaare reduciren, und diese wieder entweder zu einer Kraft und einem Kräftepaare oder zu zwei Kräften zusammensetzen. Man wird dann zugleich sehen, ob die für die Reduction auf eine Kraft nöthige Bedingung vorhanden ist oder nicht.

Will man nur den Druck der Flüssigkeit nach einer bestimmten Richtung hin finden, so decomponirt man alle Normaldrucke nach dieser Richtung hin und sucht die Resultante dieser parallelen Kräfte.

Es sei df ein Element der Fläche, α der Winkel, welchen die Normale dieses Elementes mit der gegebenen Richtung bildet, nach welcher hin man den Druck der Flüssigkeit sucht, endlich p der auf die Flächeneinheit stattfindende Druck, wo wie vorher: $p = P + \varrho gz$, so ist der auf dieses Element stattfindende Druck gleich pdf und seine Componente längs der gegebenen Richtung gleich:

$$p \cos\alpha\, df = P \cos\alpha\, df + \varrho gz \cos\alpha\, df.$$

Die Resultante dieser Componenten wird dann:

$$P \int \cos\alpha \, df + \varrho g \int z \cos\alpha \, df.$$

Es ist hier $\cos\alpha \, . \, df$ gleich der Projection des Flächenelementes df senkrecht auf die gegebene Richtung. Ist diese horizontal, und wird folglich der Horizontaldruck der Flüssigkeit auf eine krumme Fläche gesucht, so ist $\int \cos\alpha \, df$ gleich der vertikalen Projection der gegebenen Fläche, senkrecht auf die gegebene horizontale Richtung, welche wir durch V bezeichnen wollen. Bezeichnet man ferner durch ζ die Tiefe des Schwerpunktes dieser vertikalen Projection unter der horizontalen xy-Ebene, so wird, weil die vertikale Projection $\cos\alpha \, df$ dieselbe Tiefe wie das Element df selbst unter dieser Ebene hat:

$$\zeta = \frac{\int z \cos\alpha \, df}{\int \cos\alpha \, df},$$

und folglich:

$$\int z \cos\alpha \, df = \zeta \int \cos\alpha \, df = \zeta V.$$

Es wird daher der Horizontaldruck der Flüssigkeit gegen die gegebene Fläche gleich:

$$PV + \varrho g \zeta V.$$

Wenn die krumme Fläche so geformt ist, dass die vertikalen Projectionen zweier Theile derselben einander decken, so werden hier die auf derselben senkrechten horizontalen Componenten der Drucke in entgegengesetzter Richtung stattfinden, und, weil sie wegen gleicher Werthe von ζ und V gleich sind, einander heben. Zwei einander überdeckende Theile der vertikalen Projection einer krummen Fläche werden einander folglich tilgen. Ist die Fläche zusammenhängend wie die ganze Wand des Gefässes, welches die Flüssigkeit hält, oder wie die Oberfläche eines in die Flüssigkeit getauchten Körpers, so wird die ganze vertikale Projection aus zwei einander genau überdeckenden Theilen bestehen und folglich der Druck in jeder horizontalen Richtung gleich Null sein.

Ist die gegebene Richtung vertikal, und wird folglich der Ver-

tikaldruck der Flüssigkeit auf eine Fläche gesucht: so ist: $\cos\alpha\, df$ die horizontale Projection des Flächenelementes df, und $\varrho g z . \cos\alpha\, df$ gleich dem Gewichte eines verticalen Cylinders der Flüssigkeit, dessen untere Grundfläche das Flächenelement df ist, und welcher bis zur freien Oberfläche der Flüssigkeit reicht.

Wenn die krumme Fläche so geformt ist, dass die horizontalen Projectionen einander nirgends decken, so wird folglich $P \int \cos\alpha\, df$ gleich dem Druck der Atmosphäre auf die horizontale Projection der Flüssigkeit, und $\varrho g \int z \cos\alpha\, df$ gleich dem Gewichte einer cylinderförmigen Quantität der Flüssigkeit, welche unten durch die gegebene Fläche, oben durch die freie Oberfläche der Flüssigkeit begrenzt wird. Es kommt hierbei nicht darauf an, ob dieser cylinderförmige Raum wirklich mit der Flüssigkeit angefüllt ist oder nicht.

Decken dagegen die horizontalen Projectionen zweier Theile der Fläche AB und CD einander (Fig. 125), so werden hier die Drucke in entgegengesetzter Richtung stattfinden. Bei den Integralen $P \int \cos\alpha\, df$ werden dann diese Flächen zwei gleiche und entgegengesetzte Verticaldrucke geben, und einander folglich heben. Bei dem Integrale: $\varrho g \int z \cos\alpha\, df$ wird dagegen der auf die untere Fläche CD stattfindende Vertikaldruck gleich dem Gewichte der Flüssigkeitsquantität GCDH, und der auf die obere Fläche AB stattfindende gleich dem Gewichte der Flüssigkeitsquantität GABH. Weil diese Verticaldrucke hier in entgegengesetzten Richtungen stattfinden, müssen diese Gewichte subtrahirt werden und der resultirende Vertikaldruck wird folglich gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitsquantität ABCD. Wenn sich die Flüssigkeit in ABCD befindet, z. B. AB und CD Theile der Wände des Gefässes sind, so wird der Druck auf AB nach oben, auf CD nach unten gerichtet sein, und folglich jener resultirende Druck nach unten stattfinden. Wenn dagegen die Flüssigkeit sich ausserhalb ABCD befindet, z. B. AB und CD Theile der Oberfläche eines eingetauchten

Körpers sind, so wird der Druck auf AB nach unten, derjenige auf CD nach oben stattfinden, und jener resultirende Druck folglich nach oben gerichtet sein.

Es geht hieraus hervor, dass der verticale Druck einer Flüssigkeit auf die Wände und den Boden eines Gefässes gleich der Summe des auf die freie Oberfläche stattfindenden Druckes und des Gewichtes der Flüssigkeit ist. Es wird dieser verticale Druck nach unten gerichtet sein. Ebenso, dass bei einem ganz eingetauchten Körper der verticale Druck gleich dem Gewichte der Flüssigkeit ist, deren Platz er einnimmt. Es wird nämlich zwar der auf CD (Fig. 126) stattfindende, nach oben gerichtete Druck gleich der Summe des Gewichtes der Flüssigkeit, welche den Raum ABCD ausfüllen würde und des auf die horizontale Projection von CD, welche gleich AB ist, stattfindenden Druckes der Atmosphäre; es wird aber dieser letztere Theil von dem Drucke der Atmosphäre, welcher auf den über der Oberfläche der Flüssigkeit emporragenden Theil des Körpers stattfindet, im Gleichgewicht gehalten. Der auf den ganz untergetauchten Theil des Körpers stattfindende verticale Druck wird gleich dem Gewichte der Flüssigkeit, welche dessen Raum ausfüllen würde. Der ganze Druck auf den nur zum Theil eingetauchten Körper wird folglich ebenso, wie bei dem ganz untergetauchten gleich dem Gewichte der Flüssigkeit, deren Platz er einnimmt, sein. Dieser Druck wird vertical nach oben gerichtet sein, und sein Mittelpunkt wird der Schwerpunkt jenes Theils der Flüssigkeit sein.

§. 233.

Statt die auf die Oberfläche eines eingetauchten Körpers stattfindenden Drucke besonders zu betrachten, und in horizontale und verticale zu decomponiren, kann man auch gleich durch die folgende Betrachtungsweise die totale Wirkung finden.

Auf einen in eine Flüssigkeit eingetauchten Körper werden nämlich genau dieselben Drucke stattfinden, wie auf den Theil

der Flüssigkeit, welchen er verdrängt hat, und welchen man als erstarrt annehmen könnte. Da nun dieser Theil der Flüssigkeit in Ruhe sein würde, so müssten alle auf seine Oberfläche stattfindenden Drucke genau die Wirkung seiner Schwere aufheben, folglich gleich dieser in entgegengesetzter Richtung sein, und durch den Schwerpunkt dieses Theils der Flüssigkeit gehen. Die auf den eingetauchten Körper stattfindenden Drucke werden dieselbe Resultante haben, welche folglich dem Gewichte der Flüssigkeit, welche er aus ihrem Platze verdrängt hat, gleich ist, durch den Schwerpunkt dieser Flüssigkeit geht und vertical aufwärts gerichtet ist.

Auf einen in eine Flüssigkeit eingetauchten schweren Körper wirken folglich zwei verticale Kräfte in entgegengesetzten Richtungen, die eine gleich dem Gewichte des Körpers und in dessen Schwerpunkt wirkend, die andere gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit und in ihrem Schwerpunkte wirkend.

Dieses Princip der Hydrostatik eingetauchter Körper, — welches gewöhnlich so ausgesprochen wird, dass ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper so viel von seiner Schwere verliert, als das Gewicht der aus ihrem Platze verdrängten Flüssigkeit beträgt, — ist von Archimedes zuerst entdeckt worden.

§. 234.

Damit ein fester Körper, welcher theilweise in eine Flüssigkeit eingetaucht ist, im Gleichgewicht sei, ist es nach dem Vorhergehenden nothwendig, dass sein Gewicht gleich demjenigen der Flüssigkeit ist, welche er aus ihrem Platze verdrängt, und dass sein Schwerpunkt in derselben verticalen Linie mit dem Schwerpunkte jenes Theils der Flüssigkeit liegt. Ist sowohl die Flüssigkeit, wie der auf ihrer Oberfläche schwimmende Körper homogen, so wird dieser Schwerpunkt mit dem Schwerpunkte des eingetauchten Theiles des Körpers zusammenfallen. Um die Stellungen zu bestimmen, in welchen der schwimmende Körper im Gleichgewicht

sein kann, muss man ihn folglich mit einer Ebene so schneiden, dass der Rauminhalt des einen Theiles in demselben Verhältniss zu demjenigen des ganzen Körpers ist, wie die Dichtigkeit des Körpers zur Dichtigkeit der Flüssigkeit, und dass der Schwerpunkt jenes Theiles und derjenige des ganzen Körpers sich in einer auf der schneidenden Ebene senkrechten Geraden befinden. Man braucht alsdann nur den Körper so zu stellen, dass die schneidende Ebene mit der freien Oberfläche der Flüssigkeit zusammenfällt, und dass der in Betracht genommene Theil der untere wird.

Um ein Beispiel der Lösung einer Aufgabe dieser Art zu geben, betrachten wir ein homogenes dreiseitiges gerades Prisma, dessen Seiten horizontal und dessen Grundflächen folglich vertical sind. Es wird dann die schneidende Ebene mit den Seiten des Prismas parallel sein, und folglich den Inhalt des Prismas in demselben Verhältnisse theilen, wie sie die Grundflächen und jeden mit ihnen parallelen Querschnitt theilt. Schneidet man jetzt das Prisma in der Mitte zwischen den beiden Grundflächen und parallel mit diesen, so wird der Schwerpunkt des ganzen Prismas mit dem Schwerpunkte jenes Querschnittes zusammenfallen, und der Schwerpunkt des abgeschnittenen Theiles des Prismas mit dem Schwerpunkte des entsprechenden Theiles des Querschnittes. Man braucht folglich statt des Prismas nur jenen Querschnitt zu betrachten.

Es seien, Fig. 127 und 128, ABC jener Querschnitt, a, b, c die drei den Winkeln A, B, C entsprechenden Seiten. Es kommen dann zwei Fälle vor: entweder ist nur eine Kante des Prismas oder es sind zwei derselben untergetaucht.

Betrachten wir erst den Fall, dass nur eine Kante des Prismas untergetaucht ist (Fig. 127). Es sei diese die durch C gehende, MN der Durchschnitt mit der Oberfläche der Flüssigkeit. Man ziehe CD zur Mitte D der Seite AB, und mache $DG = \frac{1}{3}$ DC; es ist dann G der Schwerpunkt des Dreiecks ABC. Man ziehe ebenso CE zur Mitte E der Linie MN, und mache $EF = \frac{1}{3}$ EC;

es ist dann F der Schwerpunkt des Dreiecks CMN. Bezeichnet man jetzt durch n das Verhältniss der Dichtigkeit des Körpers zur Dichtigkeit der Flüssigkeit, welches Verhältniss kleiner als die Einheit sein muss, so ist es, damit Gleichgewicht stattfindet, nothwendig, dass: $\triangle CMN = n \,.\, \triangle ABC$, und dass die die beiden Schwerpunkte G und F vereinigende Gerade FG vertical, und folglich senkrecht auf MN ist. Zieht man die Gerade DE, so ist $DE = GF$; und es muss folglich DE senkrecht auf MN sein, und wegen $ME = EN$, folglich $DM = DN$. Setzt man jetzt $CM = x$, $CN = y$, so hat man die Proportion:

$$\triangle ABC : \triangle CMN = CA \,.\, CB : CN \,.\, CM = ab : xy.$$

Weil jetzt: $\triangle CMN = n \,.\, \triangle ABC$, wird folglich $xy = nab$.

Bezeichnet man ferner durch α und β die beiden Winkel ACD und BCD, und setzt $CD = f$, so ist:

$$MD^2 = CM^2 + CD^2 - 2CM.CD.\cos MCD = x^2 + f^2 - 2fx\cos\alpha.$$
$$DN^2 = CN^2 + CD^2 - 2CN.CD.\cos NCD = y^2 + f^2 - 2fy\cos\beta.$$

Weil $MD = DN$, wird folglich:

$$x^2 + f^2 - 2fx\cos\alpha = y^2 + f^2 - 2fy\cos\beta$$

oder:

$$x^2 - 2fx\cos\alpha = y^2 - 2fy\cos\beta.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung:

$$xy = nab,$$

ergiebt dann die zwei unbekannten Grössen x und y. Eliminirt man y, so findet man:

$$x^4 - 2fx^3\cos\alpha + 2nabfx\cos\beta - n^2a^2b^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat, weil das letzte Glied negativ ist, wenigstens zwei reelle Wurzeln, von denen die eine positiv, die andere negativ sein muss. Die letztere giebt keine Lösung der Aufgabe, welche lauter positive Werthe verlangt. Wenn die beiden übrigen Wurzeln reell sein sollen, so geht aus der Aufeinanderfolge der Zeichen hervor, dass sie beide positiv sein müssen. Es können sich folglich drei Stellungen des Gleichgewichts oder nur eine ergeben.

Betrachten wir jetzt den zweiten Fall, wenn zwei Kanten des Prismas und folglich zwei Spitzen des Querschnittes, z. B. A und B untergetaucht sind. Es wird dann der Schwerpunkt H des Vierecks NBAM in dieselbe Gerade mit den Schwerpunkten G und F fallen. Es muss folglich fortwährend FG und deshalb auch ED auf MN senkrecht oder ND gleich MD sein. Dies giebt wie vorher die Bedingungsgleichung:

$$x^2 - 2fx \cos\alpha = y^2 - 2fy \cos\beta.$$

Die zweite Bedingungsgleichung wird dagegen, dass

$$NBAM = n \,.\, ABC, \text{ folglich: } NCM = (1-n)\, ABC, \text{ oder:}$$

$$xy = (1-n)\, ab.$$

Hieraus findet man durch Elimination von y:

$$x^4 - 2fx^3 \cos\alpha + 2(1-n)\, abfx \cos\beta - (1-n)^2 a^2 b^2 = 0,$$

welche Gleichung ebenso, wie die im vorigen Falle, eine oder drei positive Wurzeln haben kann.

Wenn das Dreieck gleichschenklig ist, und zwar $a = b$, so wird auch $\beta = \alpha$, $\cos\beta = \cos\alpha = \frac{f}{a}$. Die beiden Gleichungen des ersten Falles, wenn die durch C gehende Kante untergetaucht ist, werden dann:

$$xy = na^2,\; x^2 - \frac{2f^2}{a}\, x = y^2 - \frac{2f^2}{a}\, y, \text{ oder: } x^2 - y^2 = \frac{2f^2}{a}\,(x-y).$$

Die letzte Gleichung giebt:

$$x - y = 0, \text{ oder } x + y = \frac{2f^2}{a}.$$

Die erste Lösung giebt:

$$x = y = a\sqrt{n}.$$

Die zweite Lösung giebt, wenn y eliminirt wird:

$$x^2 - \frac{2f^2}{a}\, x + na^2 = 0,$$

woraus:

$$x = \frac{f^2 \pm \sqrt{f^4 - na^4}}{a},\; y = \frac{f^2 \mp \sqrt{f^4 - na^4}}{a}.$$

Diese Werthe werden beide imaginär, und folglich keine Lösung geben, wenn $f^4 < na^4$, oder $\frac{f}{a} < \sqrt[4]{n}$. Es wird sich nur eine einzige

Lösung ergeben, wenn $\frac{f}{a} = \sqrt[4]{n}$, in welchem Falle $x = y = \frac{f^2}{a} = a\sqrt{n}$, welche Lösung mit der vorher gefundenen zusammenfällt. Beide Wurzeln werden endlich reell und verschieden, wenn $f^4 > na^4$, oder $\frac{f}{a} > \sqrt[4]{n}$. Diese Wurzeln werden aber nur dann Lösungen der Aufgabe entsprechen, wenn x und y kleiner als a sind, folglich wenn: $f^2 + \sqrt{f^4 - na^4} < a^2$ ist.

Der zweite Fall, wenn zwei Spitzen A und B untergetaucht sind, giebt dieselben Bedingungen, wenn man nur statt n in den vorhergehenden Gleichungen $1 - n$ setzt.

Wenn irgend eine andere Kante als die durch C gehende, oder irgend zwei andere als die durch A und B gehende untergetaucht sind, so wird man die vorhergehenden allgemeinen Formeln anwenden müssen.

Ist das Dreieck gleichseitig, folglich $a = b = c$, so wird $f^2 = \frac{3a^2}{4}$. Ist nur die eine Kante des Prismas untergetaucht, so wird, wenn $\frac{f}{a} =$ oder $< \sqrt[4]{n}$, d. h. wenn $\frac{\sqrt{3}}{2} =$ oder $< \sqrt[4]{n}$, oder $n =$ oder $> \frac{9}{16}$, nur eine Gleichgewichtsstellung vorkommen:

$$x = y = a\sqrt{n}.$$

Es werden dagegen noch zwei andere Gleichgewichtsstellungen:

$$x = \frac{f^2 \pm \sqrt{f^4 - na^4}}{a} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{9 - 16n}}{4}\right) a$$

$$y = \frac{f^2 \mp \sqrt{f^4 - na^4}}{a} = \left(\frac{3 \mp \sqrt{9 - 16n}}{4}\right) a,$$

stattfinden, wenn $n < \frac{9}{16}$, und $\frac{3 + \sqrt{9 - 16n}}{4} =$ oder < 1, folglich $\sqrt{9 - 16n} =$ oder < 1, $n =$ oder $> \frac{1}{2}$.

Wenn folglich $n < \frac{1}{2}$ oder $n =$ oder $> \frac{9}{16}$, so wird nur eine Gleichgewichtsstellung mit einer untergetauchten Kante stattfinden können; wenn dagegen $n =$ oder $> \frac{1}{2}$ aber $< \frac{9}{16}$ ist, so werden

drei Gleichgewichtsstellungen mit einer untergetauchten Kante stattfinden können.

Sind zwei Kanten untergetaucht, so wird immer eine Gleichgewichtsstellung stattfinden, nämlich: $x = y = a\sqrt{1-n}$, und ausserdem noch zwei andere:

$$x = \frac{f^2 \pm \sqrt{f^4 - (1-n)a^4}}{a} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{9-(1-n)16}}{4}\right)a = \left(\frac{3 \pm \sqrt{16n-7}}{4}\right)a$$

$$y = \left(\frac{3 \mp \sqrt{16n-7}}{4}\right)a,$$

wenn $\sqrt{16n-7} > 0$, und $=$ oder < 1 ist, folglich wenn $n > \frac{7}{16}$ und $=$ oder $< \frac{1}{2}$ ist.

Wenn folglich $n > \frac{9}{16}$ oder $< \frac{7}{16}$, so können nur zwei Gleichgewichtsstellungen stattfinden, die eine mit einer untergetauchten, die andere mit zwei untergetauchten Kanten, in welchen beiden Stellungen die eine Seite des Dreiecks horizontal ist. Wenn n zwischen $\frac{7}{16}$ und $\frac{1}{2}$ liegt, können ausserdem noch zwei Gleichgewichtsstellungen mit zwei untergetauchten Kanten stattfinden; wenn n zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{9}{16}$ liegt, können noch zwei Gleichgewichtsstellungen mit einer untergetauchten Kante stattfinden.

Ausser den hier betrachteten horizontalen Gleichgewichtslagen des Prismas giebt es noch eine verticale. In dieser Stellung werden der Schwerpunkt des ganzen Prismas und derjenige des untergetauchten Theiles immer in einer verticalen Linie liegen und hat man folglich nur die Höhe des untergetauchten Theiles zu suchen, welche in demselben Verhältniss zur Höhe des ganzen Prismas stehen muss, wie die Dichtigkeit des Prismas zur Dichtigkeit der Flüssigkeit.

§. 235.

Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers ist stetig oder unstetig, je nachdem der Körper, wenn er sehr wenig aus dieser Lage herausgebracht wird, in dieselbe zurückzukehren strebt oder nicht.

Bringt man folglich einen im Gleichgewichte schwimmenden Körper sehr wenig aus dieser Lage heraus, indem man allen sei-

nen Punkten verschwindend kleine Geschwindigkeiten mittheilt, so wird das Gleichgewicht ein stetiges sein, wenn die Entfernung des Körpers aus der ursprünglichen Gleichgewichtslage immer verschwindend klein verbleibt, dagegen ein unstetiges, wenn diese Entfernung einen endlichen Werth erhalten kann.

Es sei Fig. 129 die Lage eines schwimmenden Körpers im Gleichgewichtszustande, ANBJ der Durchschnitt mit dem Niveau der Flüssigkeit, G der Schwerpunkt des Körpers, O der Schwerpunkt der aus ihrem Platze verdrängten Flüssigkeit, OG gleich a, wo wir a als positiv annehmen werden, wenn O höher als G liegt, als negativ, wenn O tiefer als G liegt. Es ist dann OG senkrecht auf ANBJ. Es sei ferner V das Volumen des untergetauchten Theils des Körpers, ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, und M die Masse des ganzen Körpers, wo wegen des Gleichgewichtes $M = V\varrho$.

Die Fig. 130 stellt denselben Körper vor, in einer aus der Gleichgewichtslage sehr wenig verrückten Stellung. Es ist hier LM der neue Durchschnitt mit dem Niveau der Flüssigkeit, C der Schwerpunkt des zum Gleichgewichte gehörigen Niveauschnittes ANBJ, und A'NB'J eine durch diesen Punkt mit dem Niveauschnitte LM parallele Ebene. Man bezeichne durch Θ den Winkel, welchen die jetzt schiefe Gerade GO mit einer verticalen Linie bildet, welcher Winkel derselbe ist, den die Ebenen ANBJ und A'NB'J mit einander bilden; endlich durch ζ die Tiefe des Punktes C unter dem Niveau der Flüssigkeit.

Die Kräfte, welche jetzt auf den Körper wirken, sind die Schwere des Körpers, welche in G vertical nach unten wirkt, und der Verticaldruck der Flüssigkeit, welcher gleich dem Gewichte der aus ihrem Platze verdrängten Flüssigkeit und vertical aufwärts gerichtet ist.

Man bildet jetzt die Gleichung der lebendigen Kraft. Bezeichnet man durch v die Geschwindigkeit eines Elementes des Kör-

pers dM am Ende, durch v_0 am Anfang der verschwindend kleinen Bewegung, so wird die lebendige Kraft des Körpers gleich:

$$\tfrac{1}{2}\int v^2 dM - \tfrac{1}{2}\int v_0^2 dM,$$

wo die Integration auf alle Elemente des schwimmenden Körpers auszudehnen ist. Bei Berechnung der dynamischen Arbeit der Schwere und des Druckes wird man folglich die Grössen vernachlässigen können, welche in Bezug auf v^2 verschwindend klein sind, folglich unendlich kleine Grössen höherer als der zweiten Ordnung.

Die dynamische Arbeit der Schwere des Körpers wird gleich: $gM(z - z_0)$, wenn man durch z und z_0 die Tiefe des Schwerpunktes G des Körpers unter dem Niveau der Flüssigkeit in den beiden Stellungen Fig. 130 und Fig. 129 bezeichnet.

Um die dynamische Arbeit des Verticaldrucks auf den Körper LDM zu finden, berechne man erst die dynamische Arbeit des Verticaldrucks auf ADB, addire dazu die Differenz der Arbeiten des Druckes auf JBNM'J und auf JANL'J, und addire endlich diejenige des Druckes auf LMM'L' hinzu.

Der auf ADB stattfindende Druck ist gleich der Schwere $gV\varrho$ der Flüssigkeit, deren Platz dieser Körper einnimmt, und wirkt in dem Schwerpunkte dieser Flüssigkeit O. Die ursprüngliche Tiefe des Schwerpunktes O war $z_0 - a$, die jetzige ist $z - a\cos\Theta$. Es wird folglich die dynamische Arbeit des Verticaldrucks auf diesen Körper gleich:

$$- gV\varrho\,(z - a\cos\Theta - z_0 + a) = - gV\varrho\,(z - z_0) - gV\varrho\, a(1 - \cos\Theta),$$

oder, weil man $1 - \cos\Theta = \frac{\Theta^2}{2}$ setzen kann, indem man die höheren Potenzen der sehr kleinen Grösse Θ vernachlässigt:

$$- gV\varrho\,(z - z_0) - \tfrac{1}{2} gV\varrho\, a\Theta^2.$$

Um die dynamische Arbeit des auf JM'NBJ stattfindenden Druckes zu finden, decomponire man diesen Theil des Körpers in prismatische Elemente, deren Grundflächen die Elemente der Fläche

JBN und deren Axen vertical, folglich senkrecht auf JM′N sind. Es sei $d\omega$ die Grundfläche eines dieser Elemente, TR seine Höhe, RS senkrecht auf JN gezogen gleich u. Es ist dann der Winkel RST gleich Θ, die Höhe des prismatischen Elementes gleich $TR.\cos\Theta$, und folglich dessen Volumen gleich: $TR\cos\Theta d\omega$. Es ist aber jetzt $TR = u\sin\Theta$, folglich wird das Volumen des elementären Prismas gleich: $u\sin\Theta\cos\Theta d\omega$ oder gleich $u\Theta.d\omega$, wenn man die dritte und die höheren Potenzen der kleinen Grösse Θ vernachlässigt. Der Druck auf dieses Element wird folglich gleich $g\varrho u\Theta.d\omega$, und wird in seiner Mitte wirken, deren Tiefe unter dem Niveau LM gleich $\zeta + \frac{1}{2}TR = \zeta + \frac{1}{2}u\Theta$ ist. Es wird folglich die dynamische Arbeit des auf dieses Element ausgeübten Druckes gleich:

$$-g\varrho u\Theta.d\omega.(\zeta + \tfrac{1}{2}u\Theta) = -g\varrho u\Theta\zeta.d\omega - \tfrac{1}{2}g\varrho u^2\Theta^2.d\omega,$$

und wenn man in Bezug auf alle Elemente der Fläche JBN integrirt:

$$-g\varrho\Theta\zeta\int u d\omega - \tfrac{1}{2}g\varrho\Theta^2\int u^2 d\omega$$

die dynamische Arbeit des auf den Körper JM′NBJ stattfindenden Druckes.

Ebenso findet man die dynamische Arbeit des auf JL′NAJ stattfindenden Druckes gleich:

$$-g\varrho\Theta\zeta\int u d\omega + \tfrac{1}{2}g\varrho\Theta^2\int u^2 d\omega,$$

wo die Integrationen in Bezug auf alle Elemente der Fläche JAN stattfinden.

Diese zwei dynamischen Arbeiten sollen jetzt subtrahirt werden. Bezeichnet man die Werthe von u, welche JBN angehören, als positive, die, welche JAN angehören, als negative, so muss man in dem Ausdrucke der dynamischen Arbeit des auf JL′NAJ stattfindenden Druckes das Zeichen von u ändern, und findet folglich:

$$+g\varrho\Theta\zeta\int u d\omega + \tfrac{1}{2}g\varrho\Theta^2\int u^2 d\omega.$$

Dies von der dynamischen Arbeit des auf JM′NBJ stattfindenden Druckes subtrahirt, giebt:

$$- g\varrho\Theta\zeta\int u\,d\omega \;-\; \tfrac{1}{2}\,g\varrho\Theta^2\int u^2 d\omega,$$

wo die Integration in Bezug auf die ganze Fläche AJBNA auszudehnen ist, und zwar so, dass u auf der einen Seite von JN als positiv, auf der anderen als negativ anzunehmen ist.

Es wird dann, weil JN durch den Schwerpunkt dieser Ebene AJBNA geht, $\int u\,d\omega = 0$ sein. Es wird ferner $\int u^2 d\omega$ gleich dem Trägheitsmoment der Ebene AJBNA in Bezug auf JN. Bezeichnet man dieses Trägheitsmoment durch T, so findet man die Differenz der dynamischen Arbeiten der auf JM′NBJ und auf JL′NAJ stattfindenden Drucke gleich:

$$- \tfrac{1}{2}\,g\varrho\Theta^2 . T.$$

Um endlich den auf LML′M′ ausgeübten Druck zu finden, bemerke man, dass das Volumen dieser dünnen Scheibe annäherungsweise gleich dem Produkte der Grundfläche L′M′ und der Höhe ζ ist. Bezeichnet man den Flächeninhalt von L′JM′N durch b, so wird folglich das Volumen der dünnen Scheibe LML′M′ gleich: $b\zeta$, und der auf dieselbe ausgeübte Druck gleich $g\varrho b\zeta$. Die dynamische Arbeit dieses Druckes wird dann, weil der Schwerpunkt in der Tiefe $\frac{1}{2}\zeta$ unter dem Niveau LM liegt, gleich: $-\frac{1}{2}g\varrho b\zeta^2$.

Es wird folglich die ganze dynamische Arbeit des Druckes auf den schwimmenden Körper gleich:

$$- gV\varrho\,(z - z_0) - \tfrac{1}{2}gV\varrho a\Theta^2 - \tfrac{1}{2}g\varrho\Theta^2 . T - \tfrac{1}{2}g\varrho b\zeta^2.$$

Hierzu die dynamische Arbeit der Schwere, $gM(z - z_0)$, addirt, giebt die totale dynamische Arbeit gleich:

$$gM\,(z - z_0) - g\varrho V\,(z - z_0) - \tfrac{1}{2}\,g\varrho Va\Theta^2 - \tfrac{1}{2}g\varrho\Theta^2 . T - \tfrac{1}{2}\,g\varrho b\zeta^2,$$

oder weil $M = \varrho V$, und folglich die beiden ersten Glieder einander gegenseitig heben:

$$- \tfrac{1}{2}\,g\varrho Va\Theta^2 \;-\; \tfrac{1}{2}\,g\varrho\Theta^2 T \;-\; \tfrac{1}{2}\,g\varrho b\zeta^2$$
$$= - \tfrac{1}{2}\,g\varrho\Theta^2\,(T + aV) \;-\; \tfrac{1}{2}\,g\varrho b\zeta^2.$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft wird folglich:

$$\tfrac{1}{2}\int v^2 dM - \tfrac{1}{2}\int v_0^2\, dM = - \tfrac{1}{2}\,g\varrho\Theta^2\,(T + aV) - \tfrac{1}{2}\,g\varrho b\zeta^2.$$

oder:

$$\int v_0^2 dM - \int v^2 dM = g\varrho\Theta^2\,(T + aV) + g\varrho b\zeta^2.$$

Damit das Gleichgewicht stetig sei, müssen hier für kleine Werthe der Anfangsgeschwindigkeiten v_0 die Grössen Θ und ζ, welche die Entfernung des Körpers aus seiner ursprünglichen Lage bezeichnen, immer nur sehr kleine Werthe erhalten können. Dies wird immer der Fall sein, wenn a positiv ist, indem dann beide Glieder der rechten Seite immer positiv sind und folglich ihre Summe nur dann verschwindend klein sein kann, wenn jedes Glied einen verschwindend kleinen Werth hat.

Ist dagegen a negativ gleich — a', so wird auf der rechten Seite das Glied: $g\varrho\Theta^2(T+aV)=g\varrho\Theta^2(T-a'V)$ einen negativen Werth haben, wenn $a'V>T$ ist, oder gleich Null sein, wenn $aV=T$, und es können dann Θ und ζ als endliche Werthe gegeben werden und doch die Differenz $g\varrho b\zeta^2-g\varrho\Theta^2(a'V-T)$ einen verschwindend kleinen Werth erhalten. Es würde dann das Gleichgewicht ein unstetiges sein.

Damit das Gleichgewicht ein stetiges sei, muss folglich entweder a positiv, d. h. der Schwerpunkt des schwimmenden Körpers tiefer als der Schwerpunkt der Flüssigkeit, dessen Platz er einnimmt, liegen, oder, wenn er höher liegt, der Abstand beider Schwerpunkte, a, kleiner als das Verhältniss $\frac{T}{V}$ sein. Diese Ungleichheit: $a<\frac{T}{V}$ muss dann für alle Richtungen der Linie JN stattfinden, und folglich auch wenn man für T den kleinsten Werth des Trägheitsmomentes setzt, welcher der Fläche AJBN in Bezug auf irgend eine durch den Schwerpunkt C gehende Linie zukommt. Wenn folglich der Schwerpunkt des schwimmenden Körpers höher als der Schwerpunkt der Flüssigkeit, deren Platz er einnimmt, liegt, so muss, damit das Gleichgewicht ein stetiges sein soll, der Abstand dieser Punkte kleiner sein, als das kleinste Trägheitsmoment der Niveauebene des Körpers in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt dieser Ebene gehende Linie, dividirt durch das Volumen des untergetauchten Theiles des Körpers.

§. 236.

Als Beispiel werden wir die Bedingung der Stabilität eines schwimmenden homogenen Ellipsoids suchen. Es seien (Fig. 131.) A, B, C die Halbaxen dieses Ellipsoids und in der Gleichgewichtslage die eine Axe, etwa A, vertikal. Es sei ferner $B > C$. Bezeichnen wir durch D die Dichtigkeit des homogenen Ellipsoids, wo $D < \varrho$ sein muss, wenn das Ellipsoid schwimmen soll. Es sei x die Tiefe des untersten Scheitelpunktes N des Ellipsoids unter dem Niveau der Flüssigkeit. Es wird dann der Durchschnitt des Ellipsoids mit der Niveauebene der Flüssigkeit eine Ellipse bilden, deren grosse Halbaxe mit der B-Axe des Ellipsoids parallel ist und gleich:

$$\beta = \frac{B}{A}\sqrt{2Ax - x^2},$$

die kleine Halbaxe, mit der C-Axe parallel, ist gleich:

$$\gamma = \frac{C}{A}\sqrt{2Ax - x^2}.$$

Das kleinste Trägheitsmoment dieser Ellipse wird in Bezug auf die grössere Axe, 2β, stattfinden, und gleich:

$$T = \iint z^2\,dz\,dy,$$

wo die Integration in Bezug auf z von $z = -\frac{\gamma}{\beta}\sqrt{\beta^2 - y^2}$, bis $z = +\frac{\gamma}{\beta}\sqrt{\beta^2 - y^2}$ auszudehnen ist, und in Bezug auf y von $y = -\beta$, bis $y = +\beta$. Man findet dann:

$$T = \frac{2}{3}\frac{\gamma^3}{\beta^3}\int_{-\beta}^{+\beta}(\beta^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}dy = \frac{\pi}{4}\gamma^3\beta = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{C^3B}{A^4}(2A - x)^2x^2.$$

Um das Volumen V des eingetauchten Theils des Ellipsoids zu finden, bemerke man, dass der Flächeninhalt der Ellipse LM gleich:

$$\pi\beta\gamma = \pi\frac{BC}{A^2}(2Ax - x^2)$$

ist, und dass folglich:

$$V = \frac{\pi BC}{A^2}\int_0^x(2Ax - x^2)\,dx = \frac{\pi BC}{3A^2}(3A - x)\,x^2.$$

Um endlich die Lage des Schwerpunktes O dieses Volumens zu finden, hat man die Gleichung:

$$V.NO = \frac{\pi BC}{A^2}\int_0^x (2ax - x^2)\,xdx = \frac{\pi BC}{3A^2}(2A - \tfrac{3}{4}x)\,x^3.$$

Hieraus findet man dann:

$$NO = \frac{(2A - \frac{3}{4}x)\,x}{3A - x};$$

ferner den Abstand der beiden Schwerpunkte O und G:

$$a' = A - NO = A - \frac{(2A - \frac{3}{4}x)\,x}{3A - x} = \frac{3(A^2 - Ax + \frac{1}{4}x^2)}{3A - x} =$$

$$= \tfrac{3}{4}\cdot\frac{(2A - x)^2}{3A - x}.$$

Damit das Gleichgewicht ein stetiges sei, muss jetzt: $a' < \frac{T}{V}$ sein, folglich:

$$\tfrac{3}{4}\cdot\frac{(2A - x)^2}{3A - x} < \frac{3C^2}{4A^2}\,\frac{(2A - x)^2}{3A - x},$$

$$\text{oder: } 1 < \frac{C^2}{A^2} \text{ folglich } A < C.$$

Weil schon früher $B > C$ angenommen ist, wird folglich die Bedingung der Stabilität des Gleichgewichts, dass die verticale Axe des Ellipsoids die kleinste sei.

Cap. VI.

Gesetze der Bewegung tropfbar-flüssiger Körper.

§. 237.

Um aus den Gleichungen des Gleichgewichts diejenigen der Bewegung tropfbar-flüssiger Körper herzuleiten, braucht man nach dem d'Alembert'schen Princip nur in den ersten Gleichungen statt der auf ein Molekül dm wirkenden Kräfte: Xdm, Ydm, Zdm, die Differenzen zwischen diesen und den totalen Kräften:

$$Xdm - dm\,.\,d_t^2x = (X - d_t^2x)\,dm,\ (Y - d_t^2y)\,dm,\ (Z - d_t^2z)\,dm$$

zu setzen, oder statt der im Punkte x, y, z, auf die Masseneinheit wirkenden Kräfte: X, Y, Z, die Differenzen: $X - d_t^2 x$, $Y - d_t^2 y$, $Z - d_t^2 z$, zu setzen.

Die Variabeln x, y, z bezeichnen hier die Coordinaten eines bestimmten Moleküls der Flüssigkeit, und sind als solche Funktionen der einzigen unabhängigen variablen Grösse t. Diese Funktionen ändern sich aber von einem Molekül zum andern und hängen folglich auch von den Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Punktes ab, wo das zu betrachtende Molekül in einem bestimmten Augenblicke, welchen wir als Anfang der Zeit t annehmen werden, sich befand. Man muss folglich x. y, z als Funktionen von x_0, y_0, z_0 und t betrachten. Durch die Bestimmung des allgemeinen Ausdrucks dieser Funktionen wird auch die Bewegung eines jeden Moleküls vollständig bestimmt.

Wäre der allgemeine Ausdruck dieser Funktionen von x_0, y_0, z_0, t gefunden, so könnte man daraus auch x_0, y_0, z_0 als Funktionen von x, y, z und t bestimmen. Die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes x, y, z der Flüssigkeit zur Zeit t: $d_t x$, $d_t y$, $d_t z$, welche wir durch u, v, w bezeichnen werden, und welche Grössen Funktionen von x_0, y_0, z_0 und t sein müssen, könnten dann als Funktionen von x, y, z und t ausgedrückt werden. Dies leuchtet auch von selbst ein, denn erstens ändert die Geschwindigkeit irgend eines Moleküls der Flüssigkeit sich mit der Zeit, und zweitens ändert sie sich auch in demselben Augenblicke von einem Molekül zum andern.

Die Componenten u, v, w der Geschwindigkeit eines Moleküls der Flüssigkeit zur Zeit t, sind folglich Funktionen der Zeit t und der augenblicklichen Coordinaten dieser Moleküle, x, y, z, welche Coordinaten wieder Funktionen von t sind. Bezeichnet man durch $d_t u$, $d_t v$, $d_t w$ die partiellen Differential-Coefficienten dieser Geschwindigkeiten in Bezug auf t, wenn u, v, w als Funktionen von x, y, z, t betrachtet werden, und bemerkt man, dass die vollständigen Differential-Coefficienten dieser Grössen in Bezug auf

t mit der Masse der Moleküle dm multiplicirt die Componenten der totalen Kraft, $dm \,.\, d_t^2x$, $dm \,.\, d_t^2y$, $dm \,.\, d_t^2z$ sind, so findet man:

$$d_t^2x = d_tu + d_xu \,.\, d_tx + d_yu \,.\, d_ty + d_zu \,.\, d_tz = d_tu + ud_xu + vd_yu + wd_zu,$$
$$d_t^2y = d_tv + d_xv \,.\, d_tx + d_yv \,.\, d_ty + d_zv \,.\, d_tz = d_tv + ud_xv + vd_yv + wd_zv,$$
$$d_t^2z = d_tw + d_xw \,.\, d_tx + d_yw \,.\, d_ty + d_zw \,.\, d_tz = d_tw + ud_xw + vd_yw + wd_zw.$$

Um die Gleichungen der Bewegung zu finden, braucht man folglich nur in den allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts statt X, Y, Z, die Differenzen:

$$X - d_tu - ud_xu - vd_yu - wd_zu,\ Y - d_tv - ud_xv - vd_yv - wd_zv,$$
$$Z - d_tw - ud_xw - vd_yw - wd_zw,$$

zu substituiren. Die Gleichungen des Gleichgewichts waren im §. 228 gefunden:

$$d_xp = \varrho X,\ d_yp = \varrho Y,\ d_zp = \varrho Z,$$

und es werden folglich die allgemeinen Gleichungen der Bewegung einer Flüssigkeit, wenn man mit ϱ dividirt:

$$\frac{1}{\varrho} d_xp = X - d_tu - ud_xu - vd_yu - wd_zu,$$
$$\frac{1}{\varrho} d_yp = Y - d_tv - ud_xv - vd_yv - wd_zv,$$
$$\frac{1}{\varrho} d_zp = Z - d_tw - ud_xw - vd_yw - wd_zw.$$

§. 238.

Die drei Differentialgleichungen des vorigen Paragraphen sind indessen nicht hinreichend, um die fünf Funktionen, p, ϱ, u, v, w, zu bestimmen, oder, wenn, wie bei homogenen tropfbar-flüssigen Körpern der Fall ist, ϱ constant ist, die vier p, u, v, w. Es sind hierzu noch zwei oder eine Gleichung nöthig. Diese werden aus der Bedingung hergeleitet, dass die Masse der Flüssigkeit während der Bewegung nicht verändert wird. Betrachtet man ein elementäres Parallelepiped der Flüssigkeit, dessen drei Seiten Δx, Δy, Δz sind, und nimmt man an, die Dichtigkeit ϱ sei in der ganzen Ausdehnung dieses elementären Parallelepipeds constant, so wird dessen Masse gleich: $\varrho \,.\, \Delta x \,.\, \Delta y \,.\, \Delta z$. Dieser Ausdruck soll jetzt in Bezug auf die Zeit constant sein und folglich:

$$d_t[\varrho . \Delta x . \Delta y . \Delta z] = 0.$$

Es ist jetzt die Dichtigkeit ϱ eine Funktion von x, y, z, t, wo wieder x, y, z Funktionen von t sind. Bezeichnet man durch $d_t\varrho$ den partiellen Differentialcoefficienten von ϱ in Bezug auf t, wenn ϱ als eine Funktion von x, y, z, t betrachtet wird, so wird der vollständige Differentialcoefficient von ϱ in Bezug auf t gleich: $d_t\varrho + d_x\varrho . d_t x + d_y\varrho . d_t y + d_z\varrho . d_t z = d_t\varrho + ud_x\varrho + vd_y\varrho + wd_z\varrho$. Es wird ferner:

$$d_t[\Delta x . \Delta y . \Delta z] = \Delta x . \Delta y . \Delta z . \left[\frac{d_t(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{d_t(\Delta y)}{\Delta y} + \frac{d_t(\Delta z)}{\Delta z}\right] =$$
$$= \Delta x . \Delta y . \Delta z . \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta y} + \frac{\Delta w}{\Delta z}\right],$$

und folglich:

$$d_t[\varrho . \Delta x . \Delta y . \Delta z] = \Delta x . \Delta y . \Delta z . \left\{ d_t\varrho + ud_x\varrho + vd_y\varrho + wd_z\varrho + \right.$$
$$\left. + \varrho\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta y} + \frac{\Delta w}{\Delta z}\right)\right\}.$$

Dieser Ausdruck soll jetzt gleich Null sein, und man erhält folglich, wenn man mit $\Delta x . \Delta y . \Delta z$ dividirt, die Gleichung:

$$d_t\varrho + ud_x\varrho + vd_y\varrho + wd_z\varrho + \varrho\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta y} + \frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = 0,$$

oder, wenn man zu den Grenzwerthen der Differenzverhältnisse: $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta y}$, $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ übergeht:

$$d_t\varrho + ud_x\varrho + vd_y\varrho + wd_z\varrho + \varrho(d_x u + d_y v + d_z w) = 0,$$

welche Gleichung auch folgendermassen geschrieben werden kann:

$$d_t\varrho + d_x(\varrho u) + d_y(\varrho v) + d_z(\varrho w) = 0.$$

Diese Gleichung wird die Gleichung der Continuität genannt.

Es findet diese Gleichung für alle flüssigen Körper statt. Bei unzusammendrückbaren Flüssigkeiten muss noch besonders der vollständige Differentialcoefficient von ϱ in Bezug auf t gleich Null sein. Es kann demohngeachtet fortwährend ϱ eine Funktion von x, y, z, t sein, wenn nämlich die unzusammendrückbare Flüssigkeit eine heterogene ist. Für dieselben Moleküle wird dann ϱ constant, ändert sich aber von einem Molekül zum andern. Man hat dann die Gleichung:

$$d_t\varrho + ud_x\varrho + vd_y\varrho + wd_z\varrho = 0.$$

Diese Gleichung von derjenigen der Continuität subtrahirt und mit ϱ dividirt, giebt dann:

$$d_x u + d_y v + d_z w = 0.$$

Die zwei letzten Differentialgleichungen in Verbindung mit den im vorigen Paragraphen entwickelten drei Gleichungen bestimmen dann vollständig die Gesetze der Bewegung einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit.

§. 239.

Die fünf Differentialgleichungen:

$$\frac{1}{\varrho} d_x p = X - d_t u - u d_x u - v d_y u - w d_z u,$$
$$\frac{1}{\varrho} d_y p = Y - d_t v - u d_x v - v d_y v - w d_z v,$$
$$\frac{1}{\varrho} d_z p = Z - d_t w - u d_x w - v d_y w - w d_z w,$$
$$d_x u + d_y v + d_z w = 0,$$
$$d_t \varrho + u d_x \varrho + v d_y \varrho + w d_z \varrho = 0,$$

finden für alle Punkte des Innern tropfbar-flüssiger Körper statt; betrachtet man nur eine homogene Flüssigkeit, so verschwindet die letzte Gleichung. Wenn die Flüssigkeit unbegrenzt ist, braucht man hierzu nur die Bedingungen des Anfangszustandes hinzuzufügen. Ist dagegen die Flüssigkeit begrenzt, so finden besondere Gleichungen statt für die an ihrer freien oder begrenzten Oberfläche sich befindenden Punkte. Gewöhnlich nimmt man dann an, dass die Moleküle, welche am Anfang auf ihrer freien Oberfläche sich befanden, fortwährend da verbleiben, und dass die Moleküle, welche am Anfang in Berührung mit einer die Flüssigkeit begrenzenden Wand waren, auch fortdauernd während der Bewegung in Berührung mit dieser Wand verbleiben. Man schliesst folglich die Fälle aus, dass diese Moleküle von der Oberfläche wieder ins Innere der Flüssigkeit eintreten, oder sich von der freien zur begrenzten Oberfläche der Flüssigkeit bewegen.

Bezeichnet: $F = F(x, y, z, t) = 0$ die Gleichung einer durch eine Wand begrenzten Oberfläche, auf welcher ein Molekül während der Bewegung sich fortwährend befinden soll. Die Coordinaten x, y, z

dieses Moleküls, welche zur Zeit t dieser Gleichung entsprechen, sollen dann fortwährend dieser Gleichung entsprechen, wenn man t um dt wachsen lässt. Es wachsen dann die Coordinaten x, y, z um: $dx = udt$, $dy = vdt$, $dz = wdt$, und es muss folglich die Gleichung:

$$F(x + udt,\ y + vdt,\ z + wdt,\ t + dt) = 0$$

stattfinden. Es ist aber:

$$F(x + udt, y + vdt, z + wdt, t + dt) = F + d_tF.dt + d_xF.udt + d_yF.vdt + d_zF.wdt,$$

und es wird folglich, weil $F = 0$, auch:

$$d_tF + ud_xF + vd_yF + wd_zF = 0.$$

Betrachtet man eine feste Wand, so ist die Funktion F von t unabhängig, folglich $d_tF = 0$, und man erhält nur die Bedingungsgleichung:

$$ud_xF + vd_yF + wd_zF = 0.$$

Die freie Oberfläche der Flüssigkeit ist einem gegebenen Drucke ausgesetzt. Nimmt man diesen Druck für alle Punkte der freien Oberfläche gleich an, aber veränderlich mit der Zeit, und bezeichnet man ihn durch P, so wird für alle Punkte der freien Oberfläche $p = P$, oder $p - P = 0$, wo P eine Funktion von t ist. Man findet dann auf dieselbe Weise wie oben, wenn man statt F hier $p - P$ setzt:

$$d_tp + ud_xp + vd_yp + wd_zp = d_tP.$$

Diese Gleichungen, welche für die Grenzen der Flüssigkeit unter den angenommenen Voraussetzungen stattfinden, bestimmen dann in Verbindung mit dem Anfangszustande der Flüssigkeit alle bei der Integration der partiellen Differentialgleichungen vorkommenden willkührlichen Funktionen.

§. 240.

Die partiellen Differentialgleichungen der Bewegung tropfbarflüssiger Körper können unter gewissen Umständen auf die Integration einer einzigen Differentialgleichung zurückgeführt werden. Dies ist der Fall, wenn u, v, w die partiellen Differentialcoefficienten einer einzigen Funktion φ sind, so dass folglich:

$$udx + vdy + wdz = d\varphi$$

ist, oder:

$$u = d_x\varphi,\ v = d_y\varphi,\ w = d_z\varphi.$$

Die drei ersten Differentialgleichungen der Bewegung werden dann:

$$\frac{1}{\varrho} d_x p = X - d_t d_x\varphi - d_x\varphi \,.\, d_x^2\varphi - d_y\varphi \,.\, d_x d_y\varphi - d_z\varphi \,.\, d_x d_z\varphi,$$

$$\frac{1}{\varrho} d_y p = Y - d_t d_y\varphi - d_x\varphi \,.\, d_x d_y\varphi - d_y\varphi \,.\, d_y^2\varphi - d_z\varphi \,.\, d_y d_z\varphi,$$

$$\frac{1}{\varrho} d_z p = Z - d_t d_z\varphi - d_x\varphi \,.\, d_x d_z\varphi - d_y\varphi \,.\, d_y d_z\varphi - d_z\varphi \,.\, d_z^2\varphi.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit dx, dy, dz, addirt und bezeichnet durch das einfache Differentialzeichen d das vollständige Differential in Bezug auf die Coordinaten x, y, z, wo folglich:

$$dp = d_x p \,.\, dx + d_y p \,.\, dy + d_z p \,.\, dz,$$

$$d\varphi = d_x\varphi \,.\, dx + d_y\varphi \,.\, dy + d_z\varphi \,.\, dz,$$

$$d(d_x\varphi) = d_x^2\varphi \,.\, dx + d_x d_y\varphi \,.\, dy + d_x d_z\varphi \,.\, dz,$$

$$d(d_y\varphi) = d_x d_y\varphi \,.\, dx + d_y^2\varphi \,.\, dy + d_y d_z\varphi \,.\, dz,$$

$$d(d_z\varphi) = d_x d_z\varphi \,.\, dx + d_y d_z\varphi \,.\, dy + d_z^2\varphi \,.\, dz,$$

so erhält man:

$$\frac{1}{\varrho} dp = Xdx + Ydy + Zdz - d_t(d\varphi) - d_x\varphi \,.\, d(d_x\varphi) - d_y\varphi \,.\, d(d_y\varphi) - d_z\varphi \,.\, d(d_z\varphi)$$

$$= (Xdx + Ydy + dz) - d(d_t\varphi) - \tfrac{1}{2} d\left[(d_x\varphi)^2 + (d_y\varphi)^2 + (d_z\varphi)^2\right].$$

Wenn jetzt die Flüssigkeit homogen, folglich ϱ constant ist, und man nimmt an, Xdx + Ydy + Zdz ist ein vollständiges Differential, dessen Integral die Kräftefunktion U ist (§. 18.), so findet man durch Integration:

$$\frac{p}{\varrho} = U - d_t\varphi - \tfrac{1}{2}\left[(d_x\varphi)^2 + (d_y\varphi)^2 + (d_z\varphi)^2\right].$$

Eine unbestimmte Funktion von t braucht man bei dieser Integration nicht hinzuzufügen, weil schon φ eine in Bezug auf t unbestimmte Funktion ist.

Die Continuitätsgleichung:

$$d_x u + d_y v + d_z w = 0$$

giebt ferner die Differentialgleichung:

$$d_x^2\varphi + d_y^2\varphi + d_z^2\varphi = 0.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung giebt dann φ als Funktion von x, y, z. Die durch die Integration hervorgebrachten unbestimmten Funktionen werden durch den gegebenen Anfangszustand der Flüssigkeit bestimmt.

§. 241.

Wenn die Bedingung, dass u, v, w die partiellen Differentialcoefficienten einer Funktion φ von x, y, z sind, in irgend einem Augenblicke erfüllt ist, so finden sie auch für jeden folgenden Zeitpunkt der Bewegung statt. Es seien z. B. $u_,$, $v_,$, $w_,$ die Werthe von u, v, w, zum Zeitpunkte $t = t_,$, und

$$u_, dx + v_, dy + w_, dz = d\varphi_,,$$

ein vollständiges Differential, wo $\varphi_,$ eine Funktion von x, y, z ist. Sucht man jetzt die Werthe der Geschwindigkeiten u, v, w nach einem kleinen Zwischenraume, wenn $t = t_, + \varepsilon$, wo ε eine kleine Grösse ist, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können, so findet man:

$$u = u_, + \varepsilon d_{t_,} u_,, \quad v = v_, + \varepsilon d_{t_,} v_,, \quad w = w_, + \varepsilon d_{t_,} w_,.$$

Hieraus findet man dann:

$$udx + vdy + wdz = (u_, dx + v_, dy + w_, dz) + \varepsilon(d_{t_,} u_, . dx + d_{t_,} v_, dy + d_{t_,} w_, dz).$$

Damit jetzt auch udx + vdy + wdz ein vollständiges Differential ist, muss folglich:

$$d_{t_,} u_, . dx + d_{t_,} v_, . dy + d_{t_,} w_, . dz$$

ein vollständiges Differential sein. Es ist aber nach dem vorigen Paragraphen, weil $u_, = d_x\varphi_,$, $v_, = d_y\varphi_,$, $w_, = d_z\varphi_,$, zur Zeit $t = t_,$:

$$\frac{dp}{\varrho} = (Xdx + Ydy + Zdz) - d(d_{t_,}\varphi_,) - \tfrac{1}{2} d\Big[(d_x\varphi_,)^2 + (d_y\varphi_,)^2 + (d_z\varphi_,)^2\Big],$$

wo: $d(d_{t_,}\varphi_,) = d_{t_,}u_, . dx + d_{t_,}v_, . dy + d_{t_,}w_, . dz$. Es wird folglich:

$$d_{t_,}u_, . dx + d_{t_,}v_, . dy + d_{t_,}w_, . dz = (Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{dp}{\varrho} - \tfrac{1}{2} d\Big[(d_x\varphi_,)^2 + (d_y\varphi_,)^2 + (d_z\varphi_,)^2\Big].$$

Weil jetzt: $Xdx + Ydy + Zdz$ als ein vollständiges Differential der Kräftefunktion U angenommen worden ist, und für homogene tropfbar-flüssige Körper ϱ constant ist, so wird:

$$d_{t_{,}}u_{,} \,.\, dx + d_{t_{,}}v_{,} \,.\, dy + d_{t_{,}}w_{,} \,.\, dz$$

das vollständige Differential des Ausdruckes:

$$U - \frac{p}{\varrho} - \tfrac{1}{2}\left[(d_x\varphi_{,})^2 + (d_y\varphi_{,})^2 + (d_z\varphi_{,})^2\right].$$

Wenn folglich der Ausdruck $udx + vdy + wdz$ zur Zeit $t_{,}$ ein vollständiges Differential einer Funktion von x, y, z ist, so wird er auch während eines folgenden kleinen Zeitraumes ε ein vollständiges Differential verbleiben; dann wird er aber auch für einen darauf folgenden kleinen Zeitraum ein vollständiges Differential verbleiben, und so ferner für die ganze folgende Zeit.

Wenn folglich für den Anfangswerth der Geschwindigkeiten: $u_0dx + v_0dy + w_0dz$, ein vollständiges Differential ist, so wird auch für jeden Werth von t: $udx + vdy + wdz$ ein vollständiges Differential sein, und werden folglich die im vorigen Paragraphen entwickelten Reductionen stattfinden.

§. 242.

Die Differentialgleichungen der Bewegung eines tropfbar-flüssigen Körpers können in besonderen Fällen vortheilhaft in andere transformirt werden, wenn man statt zwei der variabeln Coordinaten, z. B. x und y, zwei neue Variabeln einführt. Es sei r der senkrechte Abstand des Punktes (x, y, z) von der z-Axe und θ der Winkel, welchen dieser Abstand mit der xz-Ebene bildet. Es werden dann:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Bezeichnet man durch μ die Geschwindigkeit, womit das Molekül (x, y, z) sich von der z-Axe zu entfernen sucht, durch ω die Umdrehungsgeschwindigkeit desselben Moleküls um die z-Axe, so wird: $\mu = d_tr$, $\omega = d_t\theta$. Es werden dann:

$$u = d_tx = \cos\theta d_tr - r\sin\theta d_t\theta = \mu\cos\theta - \omega r\sin\theta,$$

$$v = d_ty = \sin\theta d_tr + r\cos\theta d_t\theta = \mu\sin\theta + \omega r\cos\theta.$$

Differentiirt man die Gleichungen: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ in Bezug auf x, so findet man:

$$1 = \cos\theta \,.\, d_x r - r\sin\theta \,.\, d_x\theta, \quad 0 = \sin\theta \,.\, d_x r + r\cos\theta \,.\, d_x\theta.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\cos\theta$, die zweite mit $\sin\theta$ und addirt, so findet man: $d_x r = \cos\theta$. Multiplicirt man die erste mit $\sin\theta$, die zweite mit $\cos\theta$, subtrahirt und dividirt mit r, so findet man:

$$d_x\theta = -\frac{\sin\theta}{r}.$$

Ebenso findet man:

$$d_y r = \sin\theta, \quad d_y\theta = \frac{\cos\theta}{r}.$$

Es ist jetzt:

$$d_x u = d_r u \,.\, d_x r + d_\theta u \,.\, d_x\theta,$$
$$d_y u = d_r u \,.\, d_y r + d_\theta u \,.\, d_y\theta.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit:

$$u = \mu\cos\theta - \omega r\sin\theta,$$

die zweite mit: $v = \mu\sin\theta + \omega r\cos\theta$, addirt und fügt noch $w d_z u$ hinzu, so findet man:

$$u d_x u + v d_y u + w d_z u = \mu d_r u + \omega d_\theta u + w d_z u.$$

Ebenso findet man:

$$u d_x v + v d_y v + w d_z v = \mu d_r v + \omega d_\theta v + w d_z v,$$
$$u d_x w + v d_y w + w d_z w = \mu d_r w + \omega d_\theta w + w d_z w.$$

Differentiirt man jetzt die Gleichungen:

$$u = \mu\cos\theta - \omega r\sin\theta, \quad v = \mu\sin\theta + \omega r\cos\theta$$

in Bezug auf r, θ, z, so findet man:

$$d_r u = \cos\theta\, d_r\mu - r\sin\theta\, d_r\omega - \omega\sin\theta,$$
$$d_\theta u = \cos\theta\, d_\theta\mu - r\sin\theta\, d_\theta\omega - \mu\sin\theta - \omega r\cos\theta,$$
$$d_z u = \cos\theta\, d_z\mu - r\sin\theta\, d_z\omega,$$
$$d_r v = \sin\theta\, d_r\mu + r\cos\theta\, d_r\omega + \omega\cos\theta,$$
$$d_\theta v = \sin\theta\, d_\theta\mu + r\cos\theta \,.\, d_\theta\omega + \mu\cos\theta - \omega r\sin\theta,$$
$$d_z v = \sin\theta\, d_z\mu + r\cos\theta\, d_z\omega.$$

Diese Werthe substituirt, geben dann:

$$ud_x u + vd_y u + wd_z u = \mu d_r u + \omega d_\theta u + wd_z u =$$
$$= \mu \cos\theta\, d_r\mu - \mu r \sin\theta\, d_r\omega + -2\mu\omega \sin\theta + \omega\cos\theta\, d_\theta\mu - \omega^2 r\cos\theta$$
$$-\omega r \sin\theta\, d_\theta\omega + w\cos\theta\, d_z\mu - wr\sin\theta\, d_z v,$$
$$ud_x v + vd_y v + wd_z v = \mu d_r v + \omega d_\theta v + wd_z v =$$
$$= \mu\sin\theta\, d_r\mu + \mu r\cos\theta\, d_r\omega + 2\mu\omega\cos\theta + \omega\sin\theta\, d_\theta\mu - \omega^2 r\sin\theta$$
$$+\omega r\cos\theta\, d_\theta\omega + w\sin\theta\, d_z\mu + wr\cos\theta\, d_z\omega.$$

Die in den Differentialgleichungen der Bewegung vorkommenden partiellen Differentialcoefficienten $d_t u$ und $d_t v$ sind die Differentialcoefficienten von u und v, wenn man in denselben x, y, z als von t unabhängig ansieht. Wenn die neuen Variabeln r und θ statt x und y eingeführt sind, so findet man folglich $d_t u$ und $d_t v$, wenn man die Gleichungen:

$$u = \mu\cos\theta - \omega r\sin\theta,\quad v = \mu\sin\theta + \omega r\cos\theta$$

in Bezug auf t differentiirt, indem man r und θ als von t unabhängig ansieht. Man findet dann:

$$d_t u = \cos\theta\, d_t\mu - r\sin\theta\, d_t\omega,\quad d_t v = \sin\theta\, d_t\mu + r\cos\theta\, d_t\omega.$$

Es werden endlich:

$$d_x p = d_r p \,.\, d_x r + d_\theta p \,.\, d_x\theta = \cos\theta\, d_r p - \frac{\sin\theta}{r} d_\theta p,$$
$$d_y p = d_r p \,.\, d_y r + d_\theta p \,.\, d_y\theta = \sin\theta \,.\, d_r p + \frac{\cos\theta}{r} d_\theta p.$$

Substituirt man diese Werthe in den zwei ersten Differentialgleichungen:

$$\frac{1}{\varrho} d_x p = X - d_t u - ud_x u - vd_y u - wd_z u,$$
$$\frac{1}{\varrho} d_y p = Y - d_t v - ud_x v - vd_y v - wd_z v,$$

so findet man:

$$\frac{\cos\theta}{\varrho} \,.\, d_r p - \frac{\sin\theta}{r\varrho} \,.\, d_\theta p = X - \cos\theta\, d_t\mu + r\sin\theta\, d_t\omega - \mu\cos\theta\, d_r\mu +$$
$$+\mu r\sin\theta\, d_r\omega + 2\mu\omega\sin\theta - \omega\cos\theta\, d_\theta\mu +$$
$$+\omega^2 r\cos\theta + \omega r\sin\theta\, d_\theta\omega - w\cos\theta\, d_z\mu +$$
$$+ wr\sin\theta\, d_z\omega.$$

$$\frac{\sin\theta}{\varrho}\,d_r p + \frac{\cos\theta}{r\varrho}\,d_\theta p = Y - \sin\theta\, d_t \mu - r\cos\theta\, d_t\omega - \mu \sin\theta\, d_r \mu -$$
$$- \mu r \cos\theta\, d_r \omega - 2\mu\omega\cos\theta - \omega \sin\theta\, d_\theta \mu +$$
$$+ \omega^2 r \sin\theta - \omega r \cos\theta\, d_\theta \omega - w \sin\theta\, d_z \mu -$$
$$- w r \cos\theta\, d_z \omega.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\cos\theta$, die zweite mit $\sin\theta$ und addirt, so findet man:

$$\frac{1}{\varrho}\,d_r p = (X\cos\theta + Y\sin\theta) - d_t\mu - \mu d_r \mu - \omega d_\theta \mu - w d_z \mu + \omega^2 r.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $r\sin\theta$, die letzte mit $r\cos\theta$ und subtrahirt, so findet man:

$$\frac{1}{\varrho}\,d_\theta p = r(Y\cos\theta - X\sin\theta) - r^2 d_t\omega - \mu r^2 d_r\omega - \omega r^2 d_\theta \omega - w r^2 d_z \omega -$$
$$- 2\mu\omega r.$$

Die dritte Differentialgleichung der Bewegung:

$$\frac{1}{\varrho}\,d_z p = Z - d_t w - u d_x w - v d_y w - w d_z w,$$

giebt, wenn man den früher gefundenen Werth:

$$u d_x w + v d_y w + w d_z w = \mu d_r w + \omega d_\theta w + w d_z w,$$

substituirt:

$$\frac{1}{\varrho}\,d_z p = Z - d_t w - \mu d_r w - \omega d_\theta w - w d_z w.$$

Die Continuitätsgleichung ist: $d_x u + d_y v + d_z w = 0$. Es ist jetzt:

$$d_x u = \cos\theta\,.\,d_r u - \frac{\sin\theta}{r}\,d_\theta u = \cos^2\theta\, d_r \mu - r\sin\theta\cos\theta\, d_r \omega -$$
$$- \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\,d_\theta \mu + \sin^2\theta\, d_r \omega + \frac{\mu \sin^2\theta}{r}.$$

$$d_y v = \sin\theta\, d_r v + \frac{\cos\theta}{r}\,d_\theta v = \sin^2\theta\, d_r \mu + r\sin\theta\cos\theta\, d_r\omega +$$
$$+ \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\,d_\theta \mu + \cos^2\theta\, d_r\omega + \frac{\mu\cos^2\theta}{r},$$

folglich:

$$d_x u + d_y v = d_r \mu + d_r \omega + \frac{\mu}{r},$$

und die Continuitätsgleichung wird folglich:

$$d_r \mu + d\theta\omega + d_z w + \frac{\mu}{r} = 0.$$

§. 243.

Nimmt man an, dass während der Bewegung Alles in Bezug auf die z-Axe symmetrisch ist, so werden μ, ω, w und p von dem Winkel θ unabhängig sein müssen, und folglich:

$$d_\theta \mu = o,\ d_\theta \omega = o,\ d_\theta w = o,\ d_\theta p = o.$$

Die z-Axe wird alsdann die Axe der Bewegung genannt. Die Gleichungen der Bewegung werden dann:

$$\frac{1}{\varrho} d_r p = (X \cos\theta + Y \sin\theta) - (d_t \mu + \mu d_r \mu + w d_z \mu) + \omega^2 r,$$

$$0 = r(Y \cos\theta - X \sin\theta) - r^2(d_t \omega + \mu d_r \omega + w d_z \omega) - 2\mu\omega r.$$

$$\frac{1}{\varrho} d_z p = Z - (d_t w + \mu d_r w + w d_z w)$$

$$d_r \mu + d_z w + \frac{\mu}{r} = 0.$$

Bezeichnet man durch P die im Punkte x, y, z auf die Masseneinheit wirkende Kraft, deren Componenten X, Y, Z sind, so ist $X \cos\theta + Y \sin\theta$ gleich der Componente dieser Kraft in der Richtung des Radius-Vectors r, und $Y \cos\theta - X \sin\theta$ gleich der Projection derselben Kraft P in einer auf r senkrechten Richtung, parallel mit der xy-Ebene.

Nimmt man jetzt an, dass alle gegebenen Kräfte P durch die z-Axe gehen, oder mit derselben parallel sind, so verschwindet diese letzte Projection und es wird: $Y \cos\theta - X \sin\theta = 0$.

Die zweite der obigen Gleichungen wird dann:

$$0 = r^2 (d_t \omega + \mu d_r \omega + w d_z \omega) + 2\mu\omega r.$$

Betrachtet man die Bewegung desselben Moleküls während der Zeit t, so sind r und z Functionen von t, und

$$d_t \omega + \mu d_r \omega + w d_z \omega$$

der allgemeine Differentialcoefficient von ω in Bezug auf t.

Die letzte Gleichung giebt dann durch Integration in Bezug auf t:

$$r^2 \omega = a,$$

wo a eine für jedes Molekül während der ganzen Bewegung constante Grösse ist, welche durch die Anfangsgeschwindigkeit dieses Moleküls bestimmt wird.

Es folgt hieraus, dass: $\omega = \frac{a}{r^2}$, oder dass **die Umdrehungsgeschwindigkeit desselben Moleküls in verschiedenen Punkten der von ihm beschriebenen Bahn umgekehrt proportional ist mit dem Quadrate des jedesmaligen Abstandes dieses Moleküls von der Axe der Bewegung.**

§. 244.

Die Bewegung einer Flüssigkeit wird **linear** genannt, wenn es eine Linie giebt, so geformt, dass alle Moleküle, welche in einem gegebenen Augenblick in einer auf dieser Linie normalen Ebene liegen, auch fortwährend in einer gemeinschaftlichen Normalebene verbleiben. Diese Linie wird dann die Directrix der Bewegung genannt. Wenn die Ausdehnung dieser Normalebene überall klein in Bezug auf die entsprechenden Krümmungshalbmesser der Directrix ist, so werden die in derselben Normalebene gelegenen Moleküle annäherungsweise dieselbe Geschwindigkeit parallel mit dieser Linie haben. Nimmt man ferner an, dass die Ausdehnung und die Form der Normalebene sich nur allmählig ändert, und dass die gegebenen Kräfte entweder nur der Directrix parallel sind, oder, wie z. B. die Schwere der Flüssigkeit, auf alle Punkte eines Querschnittes gleich wirken, so werden die in der Normalebene stattfindenden Bewegungen sehr klein sein, und man wird die Geschwindigkeit, womit die Moleküle sich der Directrix nähern oder sich von ihr entfernen, so wie auch die Umdrehungsgeschwindigkeiten der Moleküle um die Directrix in Bezug auf deren Geschwindigkeiten parallel mit dieser Linie vernachlässigen können. Man wird alsdann ferner den Druck auf die Flächeneinheit als überall in jedem Querschnitte gleich annehmen können.

Man hat in diesem Falle nur zwei unbekannte Grössen, den Druck und die Geschwindigkeit, parallel mit der Directrix.

Es sei (Fig. 132.) EFCD ein diesen Bedingungen genügender Canal, worin die Flüssigkeit sich bewegt, und AMN die Directrix

der Bewegung, welche wir zugleich als durch die Schwerpunkte aller normalen Querschnitte gehend annehmen werden. Es sei:

Ω, O', ω, O der Flächeninhalt der Querschnitte CD, cd, $\alpha\beta$, ab;

z die Höhendifferenz der Schwerpunkte m und M der Querschnitte ab und $\alpha\beta$;

z' diejenige der Querschnitte ab und cd;

s, s', s_0 die Länge der Bogen Aμ, An, Am der Directrix;

u die Geschwindigkeit des Querschnittes $\alpha\beta$ zur Zeit t;

U diejenige des Querschnittes CD;

p, P, P' der Druck auf die Flächeneinheit im Querschnitte $\alpha\beta$, ab und cd;

ϱ die Masse einer Volumeneinheit, oder die Dichtigkeit der Flüssigkeit;

g die Geschwindigkeit, welche die Schwere einem Körper in einer Sekunde mittheilt.

Wegen der Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeit muss während desselben Zeitraumes durch jeden Querschnitt eine gleiche Quantität Flüssigkeit bewegt werden. Die senkrecht auf den Querschnitt, folglich parallel mit der Directrix, stattfindende Geschwindigkeit muss daher überall mit der Grösse dieses Querschnittes umgekehrt proportional sein, oder das Produkt der Geschwindigkeit mit dem Flächeninhalte des Querschnittes muss zu derselben Zeit überall gleich sein.

Es wird folglich: $\omega u = \Omega U$, oder $u = \frac{\Omega U}{\omega}$. Ebenso findet man die Geschwindigkeit des Querschnittes ab gleich: $\frac{\Omega U}{O}$, und diejenige des Querschnittes cd gleich: $\frac{\Omega U}{O'}$.

Legt man jetzt im Abstande ds vom Querschnitte $\alpha\beta$ einen ähnlichen Querschnitt $\alpha'\beta'$, so ist die Masse der zwischen demselben eingeschlossenen Flüssigkeit gleich: $\varrho\omega ds$. Es bewegt sich diese Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit u, und es wird folglich

deren lebendige Kraft gleich: $\frac{1}{2}\varrho\omega ds \,.\, u^2 = \frac{1}{2}\varrho\Omega^2 U^2 \frac{ds}{\omega}$. Integrirt man hier in Bezug auf s, von $s = s_0$ bis $s = s'$, so findet man die lebendige Kraft der Flüssigkeit abcd gleich:

$$\tfrac{1}{2}\varrho\Omega^2 U^2 \int_{s_0}^{s'} \frac{ds}{\omega}.$$

Differentiirt man nun diesen Ausdruck in Bezug auf die Zeit t, so findet man den Zuwachs der lebendigen Kraft der Masse abcd im Zeitelemente dt gleich:

$$\varrho\Omega^2 U d_t U dt \int_{s_0}^{s'} \frac{ds}{\omega} + \tfrac{1}{2}\varrho\Omega^2 U^2 d_t\left(\int_{s_0}^{s'} \frac{ds}{\omega}\right) dt.$$

Es ist jetzt:

$$d_t\left(\int_{s_0}^{s'} \frac{ds}{\omega}\right) = d_{s'}\left(\int_{s_0}^{s'} \frac{ds}{\omega}\right) . d_t s' + d_{s_0}\left(\int_{s_0}^{s'} \frac{ds}{\omega}\right) d_t s_0,$$

$$d_{s'}\left(\int_{s_0}^{s'} \frac{ds}{\omega}\right) = \frac{1}{O'},\; d_{s_0}\left(\int_{s_0}^{s'} \frac{ds}{\omega}\right) = -d_{s_0}\left(\int_{s'}^{s_0} \frac{ds}{\omega}\right) = -\frac{1}{O},$$

weil $\omega = O'$, wenn $s = s'$, und $\omega = O$, wenn $s = s_0$.

Es ist ferner $d_t s'$ gleich der Geschwindigkeit des Querschnittes cd, gleich $\frac{\Omega U}{O'}$; $d_t s_0$ gleich der Geschwindigkeit des Querschnittes ab, gleich $\frac{\Omega U}{O}$. Es wird folglich:

$$d_t\left(\int_{s_0}^{s'} \frac{ds}{\omega}\right) = \left(\frac{1}{O'^2} - \frac{1}{O^2}\right)\Omega U.$$

Substituirt man diesen Werth, so findet man den Zuwachs der lebendigen Kraft der Masse abcd während des Zeitelementes dt gleich:

$$\varrho\Omega^2 U d_t U \,.\, dt \,.\int_{s_0}^{s'} \frac{ds}{\omega} + \tfrac{1}{2}\varrho\,\Omega U^3 \left(\frac{\Omega^2}{O'^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right). dt.$$

Um die dynamische Arbeit der Schwere der Schicht $\alpha\beta\alpha'\beta'$ im Zeitelemente dt zu finden, bemerke man, dass die Schwere dieser Schicht gleich: $g\varrho\omega ds$ ist, deren Geschwindigkeit parallel mit der Directrix gleich u, und die Componente dieser Geschwindig-

keit in der Richtung der Schwere gleich: $ud_s z$. Hieraus findet man die dynamische Arbeit dieser Schicht im Zeitelemente dt gleich:

$$g\varrho\omega ds \,.\, ud_s z \,.\, dt = g\varrho\omega udz \,.\, dt = g\varrho\Omega Udz \,.\, dt.$$

Integrirt man hier in Bezug auf z von $z = o$, bis $z = z'$, so findet man die dynamische Arbeit der Masse abcd im Zeitelemente dt gleich:

$$g\varrho\Omega Udt \,.\, \int_o^{z'} dz = g\varrho\Omega Uz'dt.$$

Der auf die Flächeneinheit des Querschnittes ab stattfindende Druck ist gleich P, und daher auf den ganzen Querschnitt gleich PO. Die Geschwindigkeit dieses Querschnittes in der Richtung des Druckes ist gleich $\frac{\Omega U}{O}$. Es wird folglich die dynamische Arbeit dieses Druckes im Zeitelemente dt gleich:

$$P\Omega Udt.$$

Ebenso wird die dynamische Arbeit des auf cd stattfindenden Druckes gleich:

$$- P'\Omega Udt.$$

Es ist diese Arbeit eine widerstehende, folglich negativ, weil die Bewegung hier in der dem Drucke entgegengesetzten Richtung stattfindet.

Nach dem Gesetze der lebendigen Kraft soll jetzt der Zuwachs der lebendigen Kraft der Flüssigkeit abcd im Zeitelemente dt gleich der dynamischen Arbeit aller in diesem Zeitelemente auf dieselbe wirkenden Kräfte sein. Wenn man folglich keine anderen Kräfte als die Schwere und den Druck an den beiden Endflächen auf die Flüssigkeit wirkend annimmt, so wird:

$$\varrho\Omega^2 Ud_t U \,.\, dt \,.\int_{s_0}^{s'} \frac{ds}{\omega} + \tfrac{1}{2}\varrho\Omega U^3\left(\frac{\Omega^2}{O'^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right)dt$$
$$= g\varrho z'\Omega Udt + P\Omega Udt - P'\Omega Udt,$$

oder, wenn man mit ΩUdt dividirt:

$$1)\quad \varrho\Omega d_t U \int_{s_0}^{s'} \frac{ds}{\omega} + \tfrac{1}{2}\varrho U^2\left(\frac{\Omega^2}{O'^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) = g\varrho z' + P - P',$$

durch welche Gleichung U als Funktion von t bestimmt wird.

Bezeichnet man durch λ den Bogen mN, so ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Querschnitte ab gleich: $-d_t\lambda$, wo λ eine Funktion von z ist, welche durch die Gleichung der Directrix bestimmt wird. Es ist dann: $d_tU = d_\lambda U \cdot d_t\lambda$, und folglich:

$$d_tU = -\frac{\Omega U}{O} \cdot d_\lambda U.$$

Dieser Werth substituirt giebt die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\varrho U^2\left(\frac{\Omega^2}{O'^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) - \varrho\frac{\Omega^2 U}{O} \cdot d_\lambda U \int_{s_0}^{s'} \frac{ds}{\omega} = g\varrho z' + P - P',$$

durch welche Gleichung U als Funktion von λ bestimmt wird.

Setzt man in der Gleichung (1) s statt s′, so muss man z statt z′, p statt P′ und ω statt O' setzen. Man erhält alsdann:

$$2)\quad \varrho\Omega d_tU \cdot \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\omega} + \tfrac{1}{2}\varrho U^2\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) = g\varrho z + P - p.$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\omega} = N, \quad \int_{s_0}^{s'} \frac{ds}{\omega} = N',$$

und eliminirt d_tU zwischen dieser Gleichung und der Gleichung (1), so findet man:

$$3)\quad p = P - (P - P')\frac{N}{N'} + g\varrho\left(z - z'\frac{N}{N'}\right) - \tfrac{1}{2}\varrho U^2\left[\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) - \left(\frac{\Omega^2}{O'^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right)\frac{N}{N'}\right],$$

durch welche Gleichung der auf irgend einen Querschnitt stattfindende Druck bestimmt wird.

§. 245.

Bei der Berechnung des Druckes p haben wir die Centrifugalkraft der Flüssigkeit nicht berücksichtigt. Es hat nämlich diese Kraft keinen Einfluss auf die Bewegung der Flüssigkeit, indem sie senkrecht auf die Linie wirkt, welche wir als die Bahn der Moleküle angenommen haben, und durch den Widerstand der Wände gehoben wird. Die Centrifugalkraft wird den Druck gegen diese Wände auf die eine Seite hin vergrössern, auf die andere ver-

mindern. Es sei (Fig. 132.) $\alpha\beta$ ein Querschnitt des Canals, ME $=$ r der Krümmungshalbmesser, FG eine auf diesem Krümmungshalbmesser senkrechte Tangente des Umfanges des Querschnittes, u die Geschwindigkeit der Flüssigkeit senkrecht auf den Querschnitt. Es wird dann nach §. 86 die Centrifugalkraft in irgend einem Punkte des Querschnittes auf die Masseneinheit gleich:

$$\varrho \frac{u^2}{r} = \varrho \cdot \frac{\Omega^2}{\omega^2} \cdot \frac{U^2}{r}.$$

Ein Molekül im Punkte B wird dann die Wirkung dieser Kraft auf alle zwischen B und FG liegenden Moleküle empfinden. Zieht man BH $\perp$ FG und setzt BH $=$ y, so wird folglich der durch die Centrifugalkraft in B in der Richtung BK hervorgerufene Druck gleich:

$$\varrho y \cdot \frac{\Omega^2}{\omega^2} \cdot \frac{U^2}{r}.$$

Sucht man den Druck der Flüssigkeit auf die Flächeneinheit im Punkte K der Canalfläche, setzt HK $= y'$, und bezeichnet durch α' den Winkel, welchen die Normale der Canalfläche in diesem Punkte mit HK bildet, so wird:

$$\varrho y' \cdot \frac{\Omega^2}{\omega^2} \cdot \frac{U^2}{r} \cdot \cos \alpha'$$

die normale Componente des durch die Centrifugalkraft in K verursachten Druckes, und folglich:

$$p + \varrho y' \cdot \frac{\Omega^2}{\omega^2} \cdot \frac{U^2}{r} \cdot \cos \alpha'$$

gleich dem ganzen in dem Punkte K auf die Flächeneinheit stattfindenden normalen Drucke.

Ebenso findet man, wenn man LH $= y''$ setzt, und den Winkel, welchen die Normale der Canalfläche in L mit KH bildet, durch α'' bezeichnet, dass der in L auf die Flächeneinheit stattfindende normale Druck gleich:

$$p - \varrho y'' \cdot \frac{\Omega^2}{\omega^2} \cdot \frac{U^2}{r} \cdot \cos \alpha''$$

ist.

§. 246.

Nehmen wir an, dass der Canal stets gefüllt wird, so dass, wenn die oberste Schicht der Flüssigkeit sinkt, ihr Platz sogleich von einer andern eben so grossen Schicht eingenommen wird, welche dieselbe Geschwindigkeit besitzt. Nehmen wir ferner an, dass die unterste Schicht an der Oeffnung CD ist, und die Flüssigkeit aus dieser herausfliesst. Es wird dann O gleich dem Flächeninhalt der Oeffnung EF (Fig. 132), $s_o = o$, $s_,$ gleich dem Bogen AN, welchen wir durch S bezeichnen werden, und z' gleich der Höhendifferenz der Einfluss- und der Ausflussöffnung, welche wir durch H bezeichnen wollen. Es wird dann die Gleichung (1) des vorigen Paragraphen:

$$\varrho \Omega d_t U \cdot \int_o^S \frac{ds}{\omega} + \tfrac{1}{2} \varrho U^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) = g\varrho H + P - P',$$

wo P jetzt den auf die freie Oberfläche stattfindenden Druck, P′ den auf die Ausflussöffnung stattfindenden Druck auf die Flächeneinheit bezeichnet.

Man findet hieraus:

$$dt = \frac{2\Omega \int_o^S \frac{ds}{\omega} \cdot dU}{2g\left(H + \frac{P-P'}{g\varrho}\right) - \left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) U^2},$$

oder, wenn man der Kürze wegen:

$$2\Omega \int_o^S \frac{ds}{\omega} = A, \quad 2g\left(H + \frac{P-P'}{g\varrho}\right) = B$$

setzt:

$$dt = \frac{A\, dU}{B - \left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) U^2}.$$

Bei der Integrstion dieses Ausdruckes werden wir den Anfangswerth der Ausflussgeschwindigkeit U gleich Null annehmen. Es sind dann drei Fälle besonders zu unterscheiden, wenn $\Omega > O$, wenn $\Omega = O$, und wenn $\Omega < O$.

Wenn $\Omega > O$ oder die Ausflussöffnung grösser als die Einflussöffnung ist. Es wird alsdann $\frac{\Omega^2}{O^2} - 1$ positiv. Setzt man $\frac{\Omega^2}{O^2} - 1 = C$, so wird folglich:

$$dt = \frac{A\,dU}{B + CU^2}$$

und hieraus:

$$t = \frac{A}{\sqrt{BC}} . \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = U\sqrt{\frac{C}{B}}\right),\ U = \sqrt{\frac{B}{C}} . \operatorname{tang}\left(\frac{t\sqrt{BC}}{A}\right).$$

Die Ausflussgeschwindigkeit U wächst folglich sehr geschwind mit der Zeit t und wird unendlich gross, wenn:

$$\frac{t\sqrt{BC}}{A} = \frac{\pi}{2}.$$

Im zweiten Falle, wenn $\Omega = O$, wird:

$$dt = \frac{A}{B}dU,\quad t = \frac{A}{B}U,\quad U = \frac{B}{A}t.$$

Die Ausflussgeschwindigkeit ist dann der Zeit proportional und wächst mit dieser ins Unendliche. Bei einem bodenlosen Gefässe wird folglich die Flüssigkeit zuletzt mit einer unmessbar grossen Geschwindigkeit abfliessen und auch zufliessen müssen, um das Gefäss immer gefüllt zu erhalten.

Im dritten Falle, wenn $\Omega < O$ ist, so wird $1 - \frac{\Omega^2}{O^2}$ positiv. Setzen wir $1 - \frac{\Omega^2}{O^2} = D$, so wird:

$$dt = \frac{A\,dU}{B - DU^2},$$

und hieraus durch Integration:

$$t = \frac{A}{2\sqrt{BD}} \log\operatorname{nat}\left(\frac{\sqrt{B} + U\sqrt{D}}{\sqrt{B} - U\sqrt{D}}\right),\quad U = \frac{e^{\frac{2\sqrt{BD}}{A}.t} - 1}{e^{\frac{2\sqrt{BD}.t}{A}} + 1} . \sqrt{\frac{B}{D}}.$$

Weil hier der Coefficient $\frac{2\sqrt{BD}}{A}$ stets positiv ist, wird die Exponentialgrösse: $e^{\frac{2\sqrt{BD}}{A}.t}$ mit der Zeit geschwind wachsen, und

folglich U sich sehr geschwind einer constanten Grenze nähern. Bezeichnet man diese durch V, so wird:

$$V = \sqrt{\frac{B}{D}} = \sqrt{\frac{2\,g\left(H + \frac{P-P'}{g\varrho}\right)}{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}}.$$

Man findet auch diese Formel ohne Integration aus der Gleichung:

$$\varrho\, \Omega d_t U \int_0^s \frac{ds}{\omega} + \tfrac{1}{2}\varrho U^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) = g\varrho h + P - P',$$

wenn man in derselben statt U dessen Grenzwerth V setzt, und folglich $d_t U = d_t V = o$. Man erhält dann:

$$\tfrac{1}{2}\varrho V^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) = g\varrho h + P - P',$$

woraus wie oben:

$$V = \sqrt{\frac{2g\left(H + \frac{P-P'}{g\varrho}\right)}{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}}.$$

Wenn $P = P'$, welches der Fall ist, wenn der Druck auf beide Oeffnungen nur der Druck der Atmosphäre ist, so wird:

$$V = \sqrt{\frac{2\,gH}{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}}$$

Der Druck im Querschnitte $\alpha\beta$ in einer Tiefe z unter dem Einflussniveau wird nach der Formel (3) des vorigen Paragraphen, wenn man statt U dessen Grenzwerth V setzt:

$$p = P - (P\text{-}P')\frac{N}{N'} + g\varrho\left(z\text{-}H\frac{N}{N'}\right) - \tfrac{1}{2}\varrho V^2 \left[\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) - \left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right)\frac{N}{N'}\right].$$

Substituirt man hier den oben gefundenen Werth von V, so wird:

$$p = P + g\varrho z - (g\varrho H + P - P')\frac{N}{N'} - \frac{g\varrho H + P - P'}{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}\left[\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) - \left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right)\frac{N}{N'}\right]$$

$$= P + g\varrho z - \left(\frac{g\varrho H + P - P'}{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}\right) \cdot \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right)$$

$$= P + g\varrho z - \tfrac{1}{2}\varrho V^2 \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right).$$

Bezeichnet man, wie früher, durch u die Geschwindigkeit der Flüssigkeit senkrecht auf den Querschnitt $\alpha\beta$, durch v die Geschwindigkeit an dem Niveau EF, so wird:

$$u\omega = V\Omega, \quad vO = V\Omega,$$

und folglich:

$$p = P + g\varrho\left(z - \frac{u^2 - v^2}{2g}\right).$$

§. 247.

Die in dem vorhergehenden Paragraphen entwickelte Formel giebt auch die Ausflussgeschwindigkeit der Flüssigkeit aus einem beständig voll gehaltenen Gefäss. Es sei (Fig. 134.) ABEF ein solches Gefäss, AB das constante Niveau der Flüssigkeit. Obgleich man im Allgemeinen nicht die Bewegung der Flüssigkeit im Innern des Gefässes kennt, so sieht man doch ein, dass, wenn die freie Oberfläche AB in Bezug auf die Ausmündung CD gross ist, die Ausflussgeschwindigkeit nach dem Verlaufe einer kurzen Zeit constant sein wird. Berücksichtigt man folglich nicht die ersten Augenblicke der Bewegung, so kann man annehmen, dass alle Moleküle sich von den verschiedenen Punkten der freien Oberfläche AB zur Mündung CD in krummen Linien bewegen, welche während der Bewegung unverändert bleiben. Die freie Oberfläche der Flüssigkeit wird dann fortwährend eben und horizontal verbleiben, mit Ausnahme des Falles, wenn die Höhe dieser Oberfläche über der Mündung CD sehr klein ist, welchen Fall wir hier ausschliessen werden. Man kann folglich die Bewegung der Flüssigkeit als durch eine Menge enger Canäle stattfindend betrachten, deren Querschnitte alle verschwindend klein sind, deren Oeffnungen in der freien Oberfläche AB und in der Mündung CD liegen, und in demselben Verhältniss wie diese zu einander stehen. Findet der Ausfluss im freien Raume statt, so ist $P = P'$, und man hat folglich die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte CD, dessen Tiefe unter dem Niveau AB durch H bezeichnet wird, gleich:

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}},$$

wo Ω und O der Flächeninhalt der Mündung CD und der freien Oberfläche AB sind. Wenn die Mündung Ω sehr klein in Bezug auf den Inhalt der Oberfläche O ist, so kann man das Quadrat des Verhältnisses: $\frac{\Omega^2}{O^2}$, vernachlässigen und findet dann:

$$V = \sqrt{2gH},$$

folglich gleich der Endgeschwindigkeit eines von der Druckhöhe H frei herabfallenden Körpers.

Die Druckhöhe H wird umgekehrt aus der Geschwindigkeit V bestimmt durch die Formel:

$$H = \frac{V^2}{2g}.$$

Beobachtungen haben die ziemlich genaue Richtigkeit dieser Formel bestätigt, wenn der Ausfluss durch eine dünne Wand stattfindet, deren Dicke nicht zwei Zoll übersteigt und in jedem Fall kleiner als die kleinste Dimension der Mündung ist, oder durch eine dickere Wand, wenn die Mündung inwendig abgerundet ist. Die durch direkte Beobachtungen gefundenen Geschwindigkeiten sind in diesem Falle nur um 1 bis 3 Proc. kleiner, als die aus der vorhergehenden Formel hergeleiteten.

Den Fall, dass sich die Oeffnung in einer dickeren Wand befindet, ohne dass die inwendigen Kanten abgerundet worden sind, so wie den Fall, dass an der Oeffnung ein Ansatzrohr angebracht ist, werden wir nachher besonders untersuchen.

Ist die Mündung Ω nicht so klein in Bezug auf die Einflussöffnung O, dass man $\frac{\Omega^2}{O^2}$ vernachlässigen kann, so wird man die Formel:

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}}$$

anwenden müssen. Bezeichnet man die durch die Einflussöffnung

O stattfindende Geschwindigkeit mit u, so wird $O u = \Omega V$, und folglich: $\frac{\Omega}{O} = \frac{u}{V}$. Dieser Werth substituirt giebt:

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \frac{u^2}{V^2}}},$$

und hieraus:

$$V^2 - u^2 = 2gH,\ V^2 = 2gH + u^2,$$

und folglich:

$$V = \sqrt{2gH + u^2} = \sqrt{2g\left(H + \frac{u^2}{2g}\right)}.$$

Wenn folglich die Druckhöhe H nicht in einer stillstehenden Flüssigkeit gemessen werden kann, sondern nur in der mit einer gewissen Geschwindigkeit u bei constanter Oberfläche zufliessenden, so muss man die dieser Geschwindigkeit entsprechende Druckhöhe: $\frac{u^2}{2g}$, zur gemessenen, H, addiren.

§. 248.

Der Druck in irgend einem Punkte des Innern der Flüssigkeit kann im Allgemeinen nicht bestimmt werden, weil man die Form der von dem Punkte beschriebenen Bahn und die durch deren Krümmung hervorgerufene Centrifugalkraft nicht kennt. Wenn ein Theil des Gefässes die Form einer geraden oder nur wenig gekrümmten Röhre hat, kann man indessen die Formeln des vorigen Paragraphen anwenden, und folglich:

$$p = P + g\varrho\left(z - \frac{u^2 - v^2}{2g}\right)$$

setzen. Es bezeichnet hier z die Tiefe des Punktes unter dem Niveau der Flüssigkeit, u die Geschwindigkeit des Wassers in dem diesem Punkte entsprechenden Querschnitte der Röhre, und v die Eintrittsgeschwindigkeit der Flüssigkeit in dem Niveau des Gefässes.

Im Gleichgewichtszustande wäre der Druck gleich: $P + g\varrho z$. Die vorhergehende Formel ist von dieser letzteren nur in dem Factor des Coefficienten $g\varrho$ verschieden. Es wird hier z die hy-

drostatische Druckhöhe, $z - \frac{u^2 - v^2}{2g}$ die hydraulische Druckhöhe genannt, und man findet folglich den Druck während der Bewegung der Flüssigkeit, oder den hydraulischen Druck der Flüssigkeit aus dem während des Gleichgewichtes stattfindenden oder dem hydrostatischen Drucke, wenn man in dem letzteren die hydrostatische Druckhöhe oder die Tiefe des betreffenden Punktes unter dem Niveau der Flüssigkeit durch die hydraulische Druckhöhe ersetzt.

Diese letztere ist um $\frac{u^2 - v^2}{2g}$ kleiner als die erstere. Es ist hier $\frac{u^2}{2g}$ die der Geschwindigkeit u entsprechende Druckhöhe und $\frac{v^2}{2g}$ die der Geschwindigkeit v entsprechende. Es ist folglich die hydraulische Druckhöhe an irgend einer Stelle gleich der hydrostatischen Druckhöhe, vermindert um die Differenz der den Geschwindigkeiten der Flüssigkeit an dieser Stelle und an der Eintrittsstelle entsprechenden Druckhöhen.

Ist die freie Oberfläche der Flüssigkeit sehr gross in Bezug auf die Ausflussmündung, so wird v sehr klein sein und $\frac{v^2}{2g}$ vernachlässigt werden können. Es wird alsdann:

$$p = P + g\varrho\left(z - \frac{u^2}{2g}\right),$$

und es ist folglich in diesem Falle die hydraulische Druckhöhe gleich der hydrostatischen, um die der Geschwindigkeit an der gegebenen Stelle entsprechende Druckhöhe vermindert.

§. 249.

Um die Ausflussmenge der Flüssigkeit zu finden, muss man die Fälle besonders unterscheiden, wenn die Flüssigkeitselemente an der Mündung sich parallel unter einander und senkrecht auf die Ebene der Mündung bewegen, und wenn sie in convergenten Richtungen durch die Mündung gehen. Der erste Fall wird dann stattfinden, wenn die Mündung nach innen zu gehörig abgerundet ist.

In diesem Falle findet man die Ausflussmenge in der Zeiteinheit, wenn man die zu jedem Elemente der Oeffnung gehörige Geschwindigkeit mit der Grösse dieses Elementes multiplicirt. Ist die Ebene der Mündung horizontal, ihr Flächeninhalt gleich Ω, und ihre Tiefe unter dem constanten Niveau der Flüssigkeit gleich H, so findet man die Ausflussmenge in der Zeiteinheit gleich:

$$Q = \Omega \sqrt{2gH}.$$

Ist dagegen die Ebene der Mündung schräg oder vertical, so muss man sie in horizontale Elementarstreifen theilen, und die zu jedem Elemente gehörige Geschwindigkeit mit seinem Inhalte multipliciren.

Ist die Ebene der Ausflussöffnung vertical, bezeichnet man durch z die Tiefe eines horizontalen Elementes dieser Oeffnung unter der freien Oberfläche der Flüssigkeit, durch y ihre horizontale Breite, so wird die Ausflussmenge in der Zeiteinheit gleich:

$$Q = \int y \sqrt{2gz}\, dz,$$

wo die Integration von dem grössten bis zum kleinsten der Werthe von z auszudehnen ist.

Der Flächeninhalt Ω der Oeffnung wird gleich: $\int y dz$. Das Verhältniss: $\frac{Q}{\Omega}$ wird die mittlere Ausflussgeschwindigkeit genannt, und wird folglich gleich:

$$\frac{\int y \sqrt{2gz}\, dz}{\int y dz} = \sqrt{2g} \cdot \frac{\int y \sqrt{z}\, dz}{\int y dz}.$$

Diese mittlere Geschwindigkeit mit dem Flächeninhalte der Mündung multiplicirt, giebt dann die Ausflussmenge während der Zeiteinheit.

Die zur mittleren Ausflussgeschwindigkeit gehörige Druckhöhe wird die mittlere Druckhöhe der Ausflussöffnung genannt. Bezeichnen wir diese durch ζ, so ist:

$$\zeta = \left(\frac{\int y \sqrt{z}\, dz}{\int y dz}\right)^2,$$

und die Ausflussmenge gleich:

$$Q = \Omega\sqrt{2g\zeta}.$$

§. 250.

Es sei die Oeffnung ein Rechteck, dessen Seiten horizontal und vertical sind (Fig. 135.). Es sei C die Tiefe der obersten, C′ die Tiefe der untersten horizontalen Grundlinie unter der freien Oberfläche der Flüssigkeit, b die Breite, $h = C' - C$ die Höhe des Rechtecks. Es werden alsdann in der Formel des vorigen Paragraphen: $y = b$ constant, C und C′ die Grenzen der Integration in Bezug auf z, und folglich:

$$\int y\sqrt{z}\,dz = b\int_C^{C'}\sqrt{z}\,dz = \tfrac{2}{3}b\,(C'^{\frac{3}{2}} - C^{\frac{3}{2}}),$$

$$\int y\,dz = b\int_C^{C'} dz = b\,(C' - C) = bh,$$

und folglich:

$$\zeta = \tfrac{4}{9}\left(\frac{C'^{\frac{3}{2}} - C^{\frac{3}{2}}}{C' - C}\right)^2.$$

Bezeichnet man durch H die Tiefe des Mittelpunktes des Rechtecks, so wird: $C' = H + \frac{1}{2}h$, $C = H - \frac{1}{2}h$, und folglich:

$$C'^{\frac{3}{2}} - C^{\frac{3}{2}} = (H + \tfrac{1}{2}h)^{\frac{3}{2}} - (H - \tfrac{1}{2}h)^{\frac{3}{2}} =$$
$$= H^{\frac{3}{2}}\left[\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{h}{H}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{h}{H}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Es ist jetzt:

$$\left(1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{h}{H}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 + \tfrac{3}{4}\cdot\frac{h}{H} + \tfrac{3}{32}\cdot\frac{h^2}{H^2} - \tfrac{3}{384}\cdot\frac{h^3}{H^3} + \dots$$

$$\left(1 - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{h}{H}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 - \tfrac{3}{4}\cdot\frac{h}{H} + \tfrac{3}{32}\cdot\frac{h^2}{H^2} + \tfrac{3}{384}\cdot\frac{h^3}{H^3} - \dots$$

und hieraus:

$$C'^{\frac{3}{2}} - C^{\frac{3}{2}} = H^{\frac{3}{2}}\left[\tfrac{3}{2}\cdot\frac{h}{H} - \tfrac{3}{192}\cdot\frac{h^3}{H^3} - \dots\right]$$
$$= \tfrac{3}{2}h\sqrt{H}\left[1 - \tfrac{1}{96}\frac{h^2}{H^2} - \dots\right],$$
$$\zeta = H\left[1\ \tfrac{1}{48}\frac{h^2}{H^2} - \dots\right].$$

Es sei die Oeffnung ein Dreieck, dessen Grundlinie horizontal ist. Es sei C die Tiefe der Grundlinie, C′ die Tiefe der Spitze unter der freien Oberfläche der Flüssigkeit, b die horizontale Grundlinie, h die Höhe des Dreiecks. Wenn die Spitze nach unten gekehrt ist (Fig. 136.), wird:

$$y = \frac{b}{h}(C' - z),$$

$$\int y\sqrt{z}\,dz = \frac{b}{h}\int_C^{C'}(C'-z)\sqrt{z}\,dz = \frac{b}{h}\left[\tfrac{2}{3}C'(C'^{\frac{3}{2}}-C^{\frac{3}{2}}) - \tfrac{2}{5}(C'^{\frac{5}{2}}-C^{\frac{5}{2}})\right]$$

$$= \tfrac{2}{15}\,\frac{b}{h}\left(2C'^{\frac{5}{2}} - 5C'C^{\frac{3}{2}} + 3C^{\frac{5}{2}}\right).$$

Wenn die Spitze nach oben gekehrt ist (Fig. 137.), so wird:

$$y = \frac{b}{h}(z - C'),$$

$$\int y\sqrt{z}\,dz = \frac{b}{h}\int_{C'}^{C}(z-C')\sqrt{z}\,dz = \frac{b}{h}\left[\tfrac{2}{5}(C^{\frac{5}{2}}-C'^{\frac{5}{2}}) - \tfrac{2}{3}C'(C^{\frac{3}{2}}-C'^{\frac{3}{2}})\right]$$

$$= \tfrac{2}{15}\,\frac{b}{h}\left(2C'^{\frac{5}{2}} - 5C'C^{\frac{3}{2}} + 3C^{\frac{5}{2}}\right),$$

olglich in beiden Fällen gleich. Es ist ferner:

$$\int y\,dz = \tfrac{1}{2}bh, \text{ und folglich:}$$

$$\frac{\int y\sqrt{z}\,dz}{\int y\,dz} = \tfrac{4}{15}\,\frac{2C'^{\frac{5}{2}} - 5C'C^{\frac{3}{2}} + 3C^{\frac{5}{2}}}{(C'-C)^2},$$

$$\zeta = \tfrac{16}{225}\,\frac{\left(2C'^{\frac{5}{2}} - 5C'C^{\frac{3}{2}} + 3C^{\frac{5}{2}}\right)^2}{(C'-C)^4}.$$

Bezeichnet man durch H die Tiefe des Schwerpunktes des Dreiecks, so wird im ersten Falle (Fig. 136.):

$$C' = H + \tfrac{2}{3}h,\quad C = H - \tfrac{1}{3}h.$$

Man findet hieraus:

$$2C'^{\frac{5}{2}} - 5C'C^{\frac{3}{2}} + 3C^{\frac{5}{2}}$$

$$= H^{\frac{5}{2}}\left[2\left(1+\tfrac{2}{3}\cdot\frac{h}{H}\right)^{\frac{5}{2}} - 5\left(1+\tfrac{2}{3}\cdot\frac{h}{H}\right)\left(1-\tfrac{1}{3}\frac{h}{H}\right)^{\frac{3}{2}} + 3\left(1-\tfrac{1}{3}\frac{h}{H}\right)^{\frac{5}{2}}\right].$$

Es ist jetzt:

$$\left(1+\tfrac{2}{3}\frac{h}{H}\right)^{\frac{5}{2}}=1+\tfrac{5}{3}\cdot\frac{h}{H}+\tfrac{5}{6}\frac{h^2}{H^2}+\tfrac{5}{54}\cdot\frac{h^3}{H^3}-\tfrac{5}{648}\frac{h^4}{H^4}+\ldots.$$

$$\left(1+\tfrac{2}{3}\frac{h}{H}\right)\left(1-\tfrac{1}{3}\frac{h}{H}\right)^{\frac{3}{2}}=1+\tfrac{1}{6}\cdot\frac{h}{H}-\tfrac{7}{24}\cdot\frac{h^2}{H^2}+\tfrac{13}{432}\cdot\frac{h^3}{H^3}+\tfrac{19}{10368}\frac{h^4}{H^4}+\ldots.$$

$$\left(1-\tfrac{1}{3}\frac{h}{H}\right)^{\frac{5}{2}}=1-\tfrac{5}{6}\cdot\frac{h}{H}+\tfrac{5}{24}\cdot\frac{h^2}{H^2}-\tfrac{5}{432}\frac{h^3}{H^3}-\tfrac{5}{10368}\cdot\frac{h^4}{H^4}-\ldots$$

und hieraus:

$$2\left(1+\tfrac{2}{3}\cdot\frac{h}{H}\right)^{\frac{5}{2}}-5\left(1+\tfrac{2}{3}\frac{h}{H}\right)\left(1-\tfrac{1}{3}\frac{h}{H}\right)^{\frac{3}{2}}+3\left(1-\tfrac{1}{3}\frac{h}{H}\right)^{\frac{5}{2}}=$$

$$=\tfrac{15}{4}\cdot\frac{h^2}{H^2}-\tfrac{5}{192}\frac{h^4}{H^4}\ldots\ldots$$

$$2C'^{\frac{5}{2}}-5C'.C^{\frac{3}{2}}+3C^{\frac{5}{2}}=\tfrac{15}{4}.h^2\sqrt{H}\left[1-\tfrac{1}{144}\cdot\frac{h^2}{H^2}\ldots\right]$$

$$\zeta=H\left(1-\tfrac{1}{72}\cdot\frac{h^2}{H^2}\right),$$

wenn man die höhern Potenzen von $\frac{h}{H}$ vernachlässigt.

Im zweiten Falle (Fig. 137.), wenn die Spitze des Dreiecks nach oben gekehrt ist, hat man: $C = H + \frac{1}{3}h$, $C' = H - \frac{2}{3}h$. Man braucht folglich in den vorigen Formeln nur das Zeichen von h zu ändern, wodurch man fortwährend

$$\zeta=H\left(1-\tfrac{1}{72}\frac{h^2}{H^2}\right)$$

erhält.

Es sei endlich die Mündung ein Kreis (Fig. 138.), dessen Halbmesser R, und dessen Mittelpunkt in der Tiefe H unter der freien Oberfläche der Flüssigkeit ist.

Bezeichnet man durch r den Abstand eines Punktes B dieser Oeffnung von dem Mittelpunkte A, durch φ den Winkel, welchen dieser Abstand AB mit der vertikalen Linie AC bildet. Es ist dann $r\,dr\,d\varphi$ ein Element des Kreises, dessen Tiefe unter der freien Oberfläche der Flüssigkeit gleich: $H - r\cos\varphi$ ist. Es wird folglich die Ausflussgeschwindigkeit durch dieses Element gleich:

$$\sqrt{2g\,(H-r\cos\varphi)}$$

und die Ausflussmenge in einer Zeiteinheit gleich:

$$r\sqrt{2g\,(H-r\cos\varphi)}\,dr\,d\varphi.$$

Die Ausflussmenge durch die ganze Oeffnung wird dann:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R r\sqrt{2g(H-r\cos\varphi)}\,dr\,d\varphi.$$

Die mittlere Geschwindigkeit wird folglich gleich:

$$\frac{\sqrt{2g}\int_0^{2\pi}\int_0^R r\sqrt{H-r\cos\varphi}\,dr\,d\varphi}{\pi R^2},$$

und die mittlere Druckhöhe gleich:

$$\zeta=\left[\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\sqrt{H-r\cos\varphi}\,dr\,d\varphi}{\pi R^2}\right]^2.$$

Es ist jetzt:

$$\sqrt{H-r\cos\varphi}$$

$$=\sqrt{H}\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{r}{H}\cos\varphi-\tfrac{1}{8}\frac{r^2}{H^2}\cos^2\varphi-\tfrac{1}{16}\frac{r^3}{H^3}\cos^3\varphi-\tfrac{5}{128}\cdot\frac{r^4}{H^4}\cos^4\varphi\ldots\right)$$

$$\int_0^R r\sqrt{H-r\cos\varphi}\,dr=$$

$$=\sqrt{H}\int_0^R\left(r-\tfrac{1}{2}\frac{r^2}{H}\cos\varphi-\tfrac{1}{8}\frac{r^3}{H^2}\cos^2\varphi-\tfrac{1}{16}\frac{r^4}{H^3}\cos^3\varphi-\tfrac{5}{128}\cdot\frac{r^5}{H^4}\cos^4\varphi\ldots\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}R^2\sqrt{H}\left(1-\tfrac{1}{3}\frac{R}{H}\cos\varphi-\tfrac{1}{16}\frac{R^2}{H^2}\cos^2\varphi-\tfrac{1}{40}\frac{R^3}{H^3}\cos^3\varphi-\tfrac{5}{384}\frac{R^4}{H^4}\cos^4\varphi\ldots\right)$$

Hieraus findet man dann, wenn man bemerkt, dass $\int_0^{2\pi}\cos^n\varphi\,d\varphi$ gleich 0 ist, wenn n eine ungerade Zahl, und gleich: $2\pi.\frac{1.3.5\ldots n-1}{2.4.6\ldots n}$, wenn n eine gerade Zahl ist:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R r\sqrt{H-r\cos\varphi}\,dr\,d\varphi=\pi R^2\sqrt{H}\left(1-\tfrac{1}{32}\cdot\frac{R^2}{H^2}-\tfrac{5}{1024}\frac{R^4}{H^4}-\ldots\right)$$

und folglich:

$$\zeta=H\left(1-\tfrac{1}{16}\cdot\frac{R^2}{H^2}-\tfrac{9}{1024}\frac{R^4}{H^4}-\ldots\right),$$

oder, wenn man die vierte und die höheren Potenzen von $\frac{R}{H}$ vernachlässigt:

$$\zeta=H\left(1-\tfrac{1}{16}\frac{R^2}{H^2}\right)=H\left(1-\tfrac{1}{64}\frac{D^2}{H^2}\right),$$

wenn man durch D den Durchmesser des Kreises bezeichnet.

§. 251.

Wenn die Ebene der Oeffnung nicht vertikal, sondern schief ist, so braucht man nur die mittlere Ausflussgeschwindigkeit der vertikalen Projection der Oeffnung mit dem Flächeninhalt dieser Oeffnung zu multipliciren.

Bezeichnet man nämlich durch $d\omega$ ein Element der Oeffnung, durch z die Tiefe dieses Elementes unter der freien Oberfläche der Flüssigkeit, so wird: $\int\sqrt{2gz}\,d\omega$ gleich der in einer Zeiteinheit herauslaufenden Flüssigkeitsmenge. Bezeichnet man jetzt durch α den Winkel, welchen die Ebene der Oeffnung mit irgend einer vertikalen Ebene bildet, so dass also α kein rechter Winkel sein darf, so ist $\cos\alpha\,d\omega$ gleich der Projection des Elementes $d\omega$ auf diese Ebene, und:

$$\frac{\int\sqrt{2gz}\,.\cos\alpha\,d\omega}{\int\cos\alpha\,d\omega} = \frac{\int\sqrt{2gz}\,d\omega}{\int d\omega}$$

die mittlere Geschwindigkeit, welche der vertikalen Projection der Oeffnung entspricht. Es wird folglich die Ausflussmenge aus der schiefen Oeffnung: $\int\sqrt{2gz}\,d\omega$, gleich dem Produkte dieser seiner vertikalen Projection entsprechenden mittleren Geschwindigkeit in den Flächeninhalt der Oeffnung: $\int d\omega$.

§. 252.

Wenn sich die Oeffnung in einer dünnen Wand befindet, so werden die Wasserelemente in convergenten Richtungen durch die Mündung gehen und dadurch einen zusammengezogenen oder contrahirten Wasserstrahl hervorbringen. Man kann die Bewegung der Wasserelemente im Innern durchsichtiger Gefässe dadurch sichtbar machen, dass man feine pulverisirte Körper, welche ungefähr dasselbe specifische Gewicht wie die Flüssigkeit haben, mit dieser mischt. Am besten eignen sich hierzu chemische Niederschläge, wie z. B. eine Auflösung von salpetersaurem Silberoxyd in stark verdünnter Kochsalzauflösung. Man sieht dann, dass die

Flüssigkeitselemente in der Nähe der Oeffnung sich von allen Seiten nach der Oeffnung hin bewegen, indem sie krumme Linien mit einer stark beschleunigten Geschwindigkeit beschreiben.

Die Convergenz der Flüssigkeitsfäden im Innern des Gefässes wird bis zu einem kleinen Abstande ausserhalb der Mündung fortgesetzt, und man sieht deutlich den Flüssigkeitsstrahl sich nach und nach contrahiren, bis die Moleküle in einer gewissen Entfernung parallele Richtungen annehmen. Der Strahl ist bis hierhin vollkommen klar und durchsichtig. In einer grösseren Entfernung wird derselbe undurchsichtig und zeigt eine Abwechselung von Anschwellungen und Contractionen. Er löst sich hier in besondere Tropfen auf. Die Gestalt dieser Tropfen ändert sich während der Bewegung, und zwar oscillirt dieselbe um diejenige einer Kugel, indem die Tropfen abwechselnd die Form eines verlängerten und die eines zusammengedrückten Sphäroids annehmen.

Bei kreisförmigen Oeffnungen ist der Abstand des kleinsten Durchschnittes des contrahirten Wasserstrahls von der Ebene der Oeffnung ungefähr gleich der Hälfte des Durchmessers. Die Querschnitte des contrahirten Strahls sind fortwährend Kreise, wenn die Tiefe der Mündung unter der freien Oberfläche der Flüssigkeit in Bezug auf ihren Durchmesser gross ist.

Hat dagegen die Oeffnung irgend eine andere Form, so werden die Querschnitte des Strahls nicht dieselbe Form beibehalten, sondern diese fortwährend ändern, während sie sich von der Oeffnung entfernen. Die Fig. 140 zeigt die successiven Querschnitte eines Wasserstrahls bei quadratischer Mündung. Bei einer Untersuchung von Poncelet und Lesbros war die Seite der quadratischen Oeffnung ABCD: $0^{m},20$, die Druckhöhe $1^{m},68$. Der Querschnitt nahm in einem Abstande von $0^{m},15$ die Figur abcd, in einem Abstande von $0^{m},30$ die Figur a'b'c'd' an. Diese letztere war die des kleinsten Querschnittes. Aehnliche Aenderungen der Gestalt des Querschnittes finden auch bei anderen Formen der Mündung statt.

§. 253.

Bezeichnet man durch n das Verhältniss des kleinsten Querschnittes des contrahirten Strahls zum Inhalt der Mündung Ω, so wird dieser Querschnitt gleich $n\Omega$. Es wird dieser Coefficient n der Contractionscoefficient genannt. Bezeichnet man durch a das Verhältniss der in dem kleinsten Querschnitte stattfindenden Geschwindigkeit zu der aus der Formel $\sqrt{2gH}$ hergeleiteten, wo H die mittlere constante Druckhöhe bezeichnet, so wird diese Geschwindigkeit gleich: $a\sqrt{2gH}$. Es wird dieser Coefficient a der Geschwindigkeitscoefficient genannt. Er ist, wie schon im §. 247 bemerkt, sehr wenig von der Einheit verschieden, etwa 0,96 bis 0,98.

Das Produkt des Flächeninhalts des kleinsten Querschnittes in die auf ihm senkrechte Geschwindigkeit giebt dann die in einer Zeiteinheit stattfindende Ausflussmenge:

$$Q = an\Omega\sqrt{2gH}.$$

Die Coefficienten a und n können gesondert nicht genau bestimmt werden. Ihr Produkt kann dagegen durch direkte Messungen der Ausflussmenge sehr genau bestimmt werden. Dieses Produkt an wird der Ausflusscoefficient genannt. Wir werden ihn durch m bezeichnen, und folglich:

$$Q = m\Omega\sqrt{2gH}$$

setzen, wo H die nach §§. 249 und 250 berechnete mittlere Druckhöhe, und Ω den Flächeninhalt der Mündung bezeichnet.

§. 254.

Die genauesten Untersuchungen über den Ausfluss des Wassers durch grössere rectanguläre Seitenmündungen sind in Metz von Poncelet und Lesbros angestellt worden. Die Breite dieser Mündungen war durchgängig 2 Decimeter, ohngefähr $7\frac{1}{2}$ Zoll, die Höhen waren aber verschieden und wurden geändert von 1 Centimeter bis zu 2 Decimetern. Zur Herstellung dieser Mündun-

gen wurden 4 Millimeter dicke Messingbleche angewendet. Aus den Ergebnissen dieser Versuche haben Poncelet und Lesbros eine Tabelle für die Ausflusscoefficienten rectangulärer Oeffnungen berechnet.

Man benutzt dieselben Coefficienten auch für andere Oeffnungen, wenn dieselben nur keine einspringenden Ecken haben. Man nimmt dann in der folgenden Tabelle als Höhe die mittlere Höhe der Oeffnung an. Die Druckhöhen müssen an einer Stelle gemessen werden, wo das Wasser als stillstehend angesehen werden kann.

Tafel der Ausflusscoefficienten
für rectanguläre Mündungen in einer dünnen verticalen Wand.

Mittlere Druckhöhe H.	Oeffnungshöhen.					
	8 Zoll	4 Zoll	2 Zoll	1 Zoll	¾ Zoll	½ Zoll
¾ Zoll	—	—	—	—	0,668	0,690
1 „	—	—	—	0,652	0,666	0,686
1¼ „	—	—	—	0,651	0,663	0,682
1½ „	—	—	—	0,650	0,662	0,680
2 „	—	—	0,623	0,649	0,660	0,675
3 „	—	0,610	0,626	0,647	0,658	0,669
4 „	—	0,612	0,629	0,645	0,656	0,663
6 „	0,595	0,614	0,630	0,642	0,651	0,656
8 „	0,597	0,615	0,631	0,640	0,648	0,653
1 Fuss	0,599	0,616	0,630	0,637	0,644	0,648
2 „	0,603	0,616	0,627	0,633	0,638	0,641
3 „	0,605	0,615	0,625	0,630	0,634	0,634
4 „	0,604	0,614	0,623	0,625	0,627	0,624
6 „	0,602	0,610	0,615	0,613	0,613	0,612
8 „	0,601	0,606	0,610	0,611	0,611	0,610
10 „	0,601	0,602	0,606	0,609	0,610	0,609

Mit Oeffnungen von beinahe 5 Fuss Breite hat Morin Versuche angestellt, welche um $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{8}$ grössere Ausflusscoefficienten geben.

§. 255.

Fliesst das Wasser durch Ueberfälle oder Einschnitte in einer Wand (Fig. 141), so erleidet das Wasser eine Art von Contraction auch von der oberen Seite her. Bei den Untersuchungen, welche man über diese Art von Oeffnungen angestellt hat, sind immer die Einschnitte rectangulär gewesen, was in der Praxis fast auch immer der Fall ist.

Es zeigt sich dann, dass das Wasser von allen Seiten nach der Mitte des Ueberfalles hinströmt. Die Oberfläche des Wassers sinkt allmählich, wie das Wasser sich dem Einschnitt nähert, und zwar am meisten in der Mitte desselben. Ein Querschnitt des Wassers an der Ueberfallschwelle wird in Fig. 142 gezeigt. Das Niveau ist hier nach der Mitte hin concav.

Dieses Sinken des Niveaus des Wassers erstreckt sich nur ungefähr 3 Zoll auf jeder Seite des Einschnittes. Die Höhe des constanten Niveaus des stillstehenden Wassers über der Ueberfallschwelle wird daher wenige Zoll zur Seite der Ueberfallöffnung gesucht werden können. Es wird diese Höhe die Druckhöhe des Ueberfalles genannt.

Die Grösse der Senkung des Wassers in der Mitte der Mündung ist von dieser Druckhöhe und von der Breite der Oeffnung abhängig. Wenn die Druckhöhe nicht einen Zoll übersteigt, ist sie für alle Breiten der Oeffnung gleich $\frac{1}{6}$ der Druckhöhe. Für grössere Druckhöhen wächst die Senkung sowohl mit der Druckhöhe wie mit der Breite der Oeffnung. Das Verhältniss dieser Senkung zur Druckhöhe nimmt aber ab, wenn die Druckhöhe wächst, doch um so weniger, je breiter die Oeffnung ist. Der grösste Werth dieses Verhältnisses ist $\frac{1}{6}$, als seinen kleinsten Werth kann man $\frac{1}{12}$ annehmen.

Die Länge der Senkung ist natürlich auch in der Mitte am grössten, und wächst mit der Druckhöhe. Durchschnittlich kann

man annehmen, dass sie sich bis $1\frac{1}{2}$ Fuss innerhalb der Ebene der Oeffnung erstreckt.

Wenn man die Senkung des Wassers über der Schwelle als eine Contraction ansieht, und durch H die Höhe des stillstehenden Wassers über dieser Schwelle, oder die Druckhöhe der Ueberfallöffnung bezeichnet, so findet man nach §. 250 die mittlere Druckhöhe dieser Oeffnung, wenn man in der Formel:

$$\zeta = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{C'^{\frac{3}{2}} - C^{\frac{3}{2}}}{C' - C}\right)^2,$$

$C' = H$, $C = 0$ setzt, wodurch $\zeta = \frac{4}{9}H$ wird.

Bezeichnet man durch b die Breite der Oeffnung, so wird folglich die Ausflussmenge:

$$Q = mbH\sqrt{2g\zeta},$$

oder:

$$Q = \tfrac{2}{3}\, mbH\sqrt{2gH}.$$

Nach den in Toulouse von Castel angestellten Untersuchungen hängt der Ausflusscoefficient m sowohl von der Druckhöhe, wie von der Breite b und von dem Verhältnisse dieser Breite zur Breite der senkrechten Wand, in welcher die Oeffnung eingeschnitten ist, ab. Der kleinste Werth dieser Coefficienten wird eintreffen, wenn die Breite der Oeffnung gleich $\frac{1}{4}$ der Breite der Wand ist. In der Nähe dieses Verhältnisses wird er sich auch wenig ändern.

Wenn die Breite der Oeffnung 3 Zoll übersteigt und die Oeffnung bis $\frac{1}{3}$ der Breite der Wand, ändern sich die Werthe des Coefficienten nur von 0,59 bis 0,61, und man wird im Mittel $m = 0,60$ setzen können.

Wenn die Breite der Oeffnung $\frac{1}{3}$ der Breite der Wand übersteigt, ist der Ausflusscoefficient von der Druckhöhe beinahe unabhängig, ändert sich aber mit dem Verhältnisse dieser Breite nach der folgenden Tafel:

Verhältniss zwischen der Breite der Oeffnung und der Breite der Wand.	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
Ausflusscoefficient m	0,665	0,658	0,646	0,635	0,624	0,615	0,608	0,600

Wenn die Breite der Oeffnung kleiner als $\frac{1}{3}$ derjenigen der Wand ist, oder wenn sie kleiner als 3 Zoll ist, ändert sich der Coefficient nur mit der absoluten Breite der Oeffnung; nur wenn die Breite kleiner als 1 Zoll ist, nimmt der Coefficient auch etwas ab, wenn die Druckhöhe zunimmt. Berücksichtigt man bei starken Druckhöhen nicht diese letzten schmalen Oeffnungen, so kann man die folgende Tafel anwenden:

Breite der Oeffnung.	3 Zoll	2 Zoll	1 Zoll	$\frac{1}{2}$ Zoll
Ausflusscoefficient m	0,60	0,61	0,64	0,67

§. 256.

Bei der von **Poncelet** und **Lesbros** angestellten Untersuchung über die Ausflusscoefficienten waren die Oeffnungen auf einer vertikalen Wand hinlänglich von allen anderen Seiten des Reservoirs entfernt, so dass das Wasser von allen Seiten her der Oeffnung zuströmen konnte und ein ringsherum contrahirter Strahl gebildet wurde. Es kann indessen auch der Fall vorkommen, dass das Wasser nur von einer oder einigen Seiten her gegen die Oeffnung strömt, und deshalb ein nur theilweise contrahirter Strahl gebildet wird. Man nennt diese eine **unvollständige** oder **partielle** Contraction. Eine solche partielle Contraction wird stattfinden, wenn die Mündung in der ebenen dünnen Wand durch andere Wände in der Richtung des Strahls auf einer oder mehreren Seiten eingefasst ist.

Versuche über die partielle Contraction sind von **Bidone** in Turin und später von **Weisbach** in Freiberg angestellt worden. Die Ausflusscoefficienten nehmen dann mit dem Verhältnisse des eingefassten Theiles, wo keine Contraction stattfindet, zum ganzen

Umfange gleichmässig zu, den Fall ausgenommen, wenn der Theil des Umfanges, wo die Contraction stattfindet, sehr klein wird, in welchem Falle die Coefficienten rascher zunehmen.

Bezeichnet man durch n jenes Verhältniss, so kann man für kreisförmige Oeffnungen den Ausflusscoefficienten gleich:

$$m\,(1 + 0{,}128\,n),$$

für rectanguläre Oeffnungen gleich:

$$m\,(1 + 0{,}145\,n)$$

setzen, wo m die in der Tafel des §. 254 gegebenen Ausflusscoefficienten bezeichnet.

§. 257.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die Mündungen in einer ebenen Wand angebracht waren. Die Form der Wand kann aber auch eine andere sein, und der Ausflusscoefficient wird dann grösser oder kleiner ausfallen. Er würde am grössten, gleich 1 sein, wenn die Wasserfäden alle unter einander parallel durch die Oeffnung hinausströmten; er ist nur kleiner, wenn sie schief convergirend gegen einander sind. Wenn man um die Oeffnung eine von der Wand begrenzte Kugelfläche construirt, deren Halbmesser zwei bis dreimal so gross wie der Durchmesser der Oeffnung ist, so werden die Wasserfäden alle beinahe normal die Oberfläche dieses Kugelsegmentes durchströmen.

Je grösser die Ausdehnung dieses Kugelsegmentes ist, je mehr convergirend werden die Wasserfäden zur Oeffnung herankommen, und je kleiner wird der Ausflusscoefficient sein. Wenn die Oeffnung in einer ebenen Wand angebracht ist, wird dieses Kugelsegment eine Halbkugel. Bei der in Fig. 143 dargestellten Oeffnung ist es grösser, und bei der in Fig. 144 dargestellten umfasst es beinahe die ganze Kugelfläche. In dem letzten Falle ist der Ausflusscoefficient am kleinsten und sinkt bis 0,5.

Wenn die die Oeffnung umgebende Wand nach der Figur des contrahirten Strahls geformt ist, wird der Ausflusscoefficient

am grössten, nämlich gleich dem Geschwindigkeitscoefficienten. Bei kreisförmigen Oeffnungen muss diese Wand oder die Abrundung in einer dickeren Wand die Form einer Umdrehungsfläche haben (Fig. 145). Der innere Durchmesser AB wird gleich 1,2 des äusseren Durchmessers CD, und EF = CD gemacht. Es ist dann der Ausflusscoefficient m = 0,97.

In der Praxis kommen durch convergente Wände herbeigeführte Veränderungen des Ausflusscoefficienten sehr oft vor. Namentlich tritt der Fall bei Schützen ein, wenn diese gegen den Horizont geneigt sind, wie in Fig. 146. Man hat darüber Messungen von Poncelet für den Fall, dass nur eine partielle Contraction stattfindet, indem der Boden und die verticalen Seiten der Oeffnung in der Verlängerung der Wände angebracht sind. Er fand m = 0,8, wenn das Schutzbrett 45° geneigt war, oder bei einer Böschung von 1, und m = 0,74 bei einer Neigung von $63\frac{1}{2}°$, d. h. bei einer Böschung von $\frac{1}{2}$.

§. 258.

Wenn man die Druckhöhe nicht in stillem Wasser messen kann, sondern nur den Wasserstand des bewegten, der Mündung mit einer gewissen Geschwindigkeit u zufliessenden Wassers, so wird nach §. 247 die Ausflussgeschwindigkeit: $V = \sqrt{2gH + u^2}$, und die Ausflussmenge folglich:

$$Q = m\Omega\sqrt{2gH + u^2},$$

wo m den der Druckhöhe $H + \frac{u^2}{2g}$ entsprechenden Ausflusscoefficienten bezeichnet.

Gewöhnlich kann indessen die Geschwindigkeit u nicht durch directe Messungen bestimmt werden. Dies kommt insbesondere dann vor, wenn es darauf abgesehen ist, das in Gerinnen und Canälen fliessende Wasser zu messen, weil es hier nur selten möglich ist, das Wasser durch eine die Ausflussöffnung enthaltende Wand gehörig aufzustauen. Bezeichnet dann H die Höhe des

Wasserspiegels im Beharrungszustande über der Mitte der Ausflussöffnung, O den Querschnitt des Wasserstromes in der Rinne oder in dem Canale, $m\Omega$ den mit dem Ausflusscoefficienten multiplicirten Querschnitt der Ausflussöffnung, so wird nach §. 247:

$$Q = m\Omega\sqrt{\frac{2gH}{1 - \frac{m^2\Omega^2}{O^2}}}.$$

Diese Formel könnte man auch aus der obigen Formel herleiten, wenn man: $u = \frac{Q}{O}$ setzt, wodurch:

$$Q = m\Omega\sqrt{2gH + \frac{Q^2}{O^2}},$$

und hieraus:

$$Q^2\left(1 - \frac{m^2\Omega^2}{O^2}\right) = m^2\Omega^2 \cdot 2gH,$$

oder wie oben:

$$Q = m\Omega\sqrt{\frac{2gH}{1 - \frac{m^2\Omega^2}{O^2}}}.$$

Unter der Quadratwurzel kann man für m einen mittleren Werth, 0,64, annehmen.

Entwickelt man dann die Formel nach den Potenzen von $\frac{m\Omega}{O}$, so findet man:

$$Q = m\Omega\sqrt{\frac{2gH}{1 - 0{,}4\frac{\Omega^2}{O^2}}} = m\Omega\sqrt{2gH\left(1 + 0{,}4\,\frac{\Omega^2}{O^2}\right)}$$

$$= m\Omega\left(1 + 0{,}2\,\frac{\Omega^2}{O^2}\right)\sqrt{2gH},$$

wo m der Ausflusscoefficient ist, welcher der Druckhöhe: $H\left(1 + 0{,}4\,\frac{\Omega^2}{O^2}\right)$ entspricht.

Bei Ueberfällen würde

$$Q = mbH\sqrt{\tfrac{4}{9} \cdot 2gH + u^2} = \tfrac{2}{3}\, mbH\sqrt{2gH + \tfrac{9}{4}\, u^2}$$

sein.

§. 259.

Veränderungen in dem Querschnitte eines Reservoirs oder einer Röhre geben auch entsprechende Veränderungen in der Geschwindigkeit des Wassers. Wenn die Wasserfäden sich senkrecht zu diesen Querschnitten bewegen, und die Geschwindigkeit überall in demselben Querschnitte als gleich angenommen werden kann, so muss nämlich wegen der Continuität der Flüssigkeit die Geschwindigkeit überall dem Querschnitte umgekehrt proportional sein. Tritt jene Veränderung plötzlich ein, so stossen die mit grösserer Geschwindigkeit kommenden Moleküle an die anderen plötzlich an, und es entsteht hierdurch ein Verlust der lebendigen Kraft, gerade wie bei dem Stosse fester Körper, welche nach dem Stosse sich gar nicht mehr trennen, sondern an einander festgeklebt bleiben. Die diesem Verlust der lebendigen Kraft entsprechende dynamische Arbeit geht hier ebenso, wie in den festen Körpern, in den Molekülarschwingungen des Körpers verloren, was man auch deutlich an den Wirbeln des Wassers sehen kann.

Betrachten wir ein Gefäss (Fig. 147), dem ähnlich, welches wir bisher betrachtet haben, dessen Inneres aber eine plötzliche Verengung darbietet. Es sei O der Inhalt der freien Oberfläche AB, ω der Flächeninhalt der Verengung a′b′, O′ der Inhalt des Querschnittes A′B′ des Reservoirs nach der Verengung da, wo die Wirbel aufhören und die Wasserfäden sich wieder parallel bewegen, Ω die Ausflussöffnung ab, U die Ausflussgeschwindigkeit aus ab, W die Geschwindigkeit der freien Oberfläche, W′ die Geschwindigkeit im Querschnitte A′B′, u diejenige der Verengung a′b′, m und m′ die der Oeffnung ab und a′b′ entsprechenden Ausflusscoefficienten. Wegen der Contraction des Wasserstrahls muss dann $m'\omega$ als der Querschnitt des durch a′b′ contrahirten Wasserstrahls und $m\Omega$ als der Querschnitt des Ausflussstrahls angesehen werden. Es ist dann wegen der Continuität der Flüssigkeit:

$$WO = m'u\omega = W'O' = U\Omega,$$

und hieraus:

$$W = \frac{mU\Omega}{O},\; u = \frac{mU\Omega}{m'\omega},\; W' = \frac{mU\Omega}{O'}.$$

Es strömt dann im Zeitelemente dt eine Wasserschicht durch die Oeffnung a'b', deren Volumen $m'u\omega dt$, und deren Masse folglich: $\varrho m'u\omega dt$ ist. Diese verschwindend kleine Wasserschicht stösst mit der Geschwindigkeit u auf eine endliche Wassermenge, deren Geschwindigkeit kleiner, gleich W' ist. Es wird hierdurch nach §. 201, wenn man daselbst $P = g\varrho m'u\omega dt$ setzt, und als gegen P verschwindend klein annimmt, die durch den Stoss verlorene lebendige Kraft gleich:

$$\tfrac{1}{2}\varrho m'u\omega dt\,(u - W')^2 = \tfrac{1}{2}\varrho m'u\omega dt\left(\frac{mU\Omega}{m'\omega} - \frac{mU\Omega}{O'}\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\varrho mU^3\Omega dt\left(\frac{m\Omega}{m'\omega} - \frac{m\Omega}{O'}\right)^2.$$

Diese lebendige Kraft, welche in den Wirbeln des Wassers auf der anderen Seite der Verengung verloren geht, muss dann in die allgemeine Differentialgleichung der Bewegung des §. 244 auf der linken Seite zugefügt werden. Man erhält dann, wenn man in der Formel dieses Paragraphen statt O' und Ω den Querschnitt des ausfliessenden contrahirten Strahls $m\Omega$, und statt z die Höhe H setzt:

$$\varrho m^2\Omega^2 U d_t U . dt\int_0^s\frac{ds}{\omega} + \tfrac{1}{2}\varrho m\Omega U^3\left(1 - \frac{m^2\Omega^2}{O^2}\right)dt + \tfrac{1}{2}\varrho m\Omega U^3\left(\frac{m\Omega}{m'\omega} - \frac{m\Omega}{O'}\right)^2 dt$$
$$= mg\varrho H\Omega U dt + mP\Omega U dt - mP'\Omega U dt,$$

Dividirt man hier mit $m\Omega U dt$, so findet man statt der Gleichung 1 des §. 244 die folgende Gleichung:

$$\varrho m\Omega d_t U\int_0^s\frac{ds}{\omega} + \tfrac{1}{2}\varrho U^2\left[\left(1 - \frac{m^2\Omega^2}{O^2}\right) + \left(\frac{m\Omega}{m'\omega} - \frac{m\Omega}{O'}\right)^2\right] = g\varrho H + P - P'.$$

Man braucht folglich in den Formeln des §. 244, so wie in den daraus hergeleiteten Formeln des folgenden Paragraphen nur statt des Coefficienten von U^2, D, den Coefficienten:

$$\left[\left(1 - \frac{m^2\Omega^2}{O^2}\right) + \left(\frac{m\Omega}{m'\omega} - \frac{m\Omega}{O'}\right)^2\right] \text{ zu setzen.}$$

Bezeichnet man, wie früher, durch V den constanten Grenzwerth der Ausflussgeschwindigkeit aus der Oeffnung ab, welcher Werth bald nach den ersten Augenblicken der Bewegung erreicht wird, so findet man, wenn man in der obigen Gleichung

$$U = V, \; d_t U = d_t V = 0$$

setzt:

$$\tfrac{1}{2}\varrho V^2\left[\left(1 - \frac{m^2\Omega^2}{O^2}\right) + \left(\frac{m\Omega}{m'\omega} - \frac{m\Omega}{O'}\right)^2\right] = g\varrho H + P - P',$$

und hieraus:

$$V = \sqrt{\frac{2g\left(H + \frac{P-P'}{g\varrho}\right)}{\left(1 - \frac{m^2\Omega^2}{O^2}\right) + \left(\frac{m\Omega}{m'\omega} - \frac{m\Omega}{O'}\right)^2}}.$$

Auf dieselbe Weise kann man den Ausfluss des Wassers durch zusammengesetzte Gefässe berechnen. Es seien, (Fig. 148), O, O′, O″ die Querschnitte der Gefässe, ω' und ω'' die der Verengungen, m′ und m″ die entsprechenden Ausflusscoefficienten, Ω die Ausflussöffnung und m der entsprechende Ausflusscoefficient. Es wird dann die Ausflussgeschwindigkeit:

$$V = \sqrt{\frac{2g\left(H + \frac{P-P'}{g\varrho}\right)}{1 - \frac{m^2\Omega^2}{O^2} + \left(\frac{m\Omega}{m'\omega'} - \frac{m\Omega}{O'}\right)^2 + \left(\frac{m\Omega}{m''\omega''} - \frac{m\Omega}{O''}\right)^2}},$$

$$Q = m\Omega V.$$

Für jede Verengung ω_n und darauf folgende Erweiterung O_n kommt folglich im Nenner ein Glied $\left(\frac{m\Omega}{m_n\omega_n} - \frac{m\Omega}{O_n}\right)^2$ zu. Es wird dieser Zuwachs, welcher dem Quadrat des Verhältnisses der Geschwindigkeitsänderung $u_n - W_n$ zur Ausflussgeschwindigkeit V gleich ist, der der Verengung ω_n entsprechende Widerstandscoefficient genannt. Bezeichnet man ihn durch w_n, so wird:

$$V = \sqrt{\frac{2g\left(H + \frac{P-P'}{g\varrho}\right)}{1 - \frac{m^2\Omega^2}{O^2} + w_1 + w_2 + \ldots + w_n}}.$$

Findet der Ausfluss in freier Luft statt, so sind P und P' gleich. Wenn ferner die freie Oberfläche O des Reservoirs in Bezug auf die Ausflussöffnung Ω sehr gross ist, so kann man $\frac{\Omega^2}{O^2}$ vernachlässigen und findet dann:

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{1 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n}}.$$

Bei Berechnung der Widerstandscoefficienten w_1, w_2, ... w_n, muss man zuerst einen vorläufigen Werth von V berechnen, indem man statt der Ausflusscoefficienten m, m', m'' u. s. w. einen mittleren Werth 0,61 setzt. Aus diesem vorläufigen Werthe von V berechnet man dann die jeder Verengung ω_n entsprechende Geschwindigkeit, welche gleich $\frac{\Omega}{\omega_n} . V$ gesetzt werden kann, und setzt m_n gleich dem zu dieser Geschwindigkeit, oder der entsprechenden Druckhöhe $\frac{1}{2g}\left(\frac{\Omega}{\omega_n} . V\right)^2$ gehörigen Ausflusscoefficienten. Der Ausflusscoefficient m wird der Geschwindigkeit V oder der Höhe $\frac{V^2}{2g}$ entsprechend genommen. Hieraus können dann die genaueren, von den zuerst gefundenen immer sehr wenig abweichenden Werthe der Widerstandscoefficienten berechnet werden. Gewöhnlich kann man sich auch mit der ersten Annäherung begnügen.

Aus der obigen Formel findet man:

$$\frac{V^2}{2g}(1 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n) = H,$$

oder:

$$\frac{V^2}{2g} = H - \frac{V^2}{2g}(w_1 + w_2 + \ldots + w_n).$$

Es wird hier $\frac{V^2}{2g} . w_n$ der durch die Verengung ω_n verursachte Höhenverlust genannt. Bezeichnet man ihn durch h_n, so wird:

$$h_n = w_n . \frac{V^2}{2g} = \frac{(u_n - W_n)^2}{V^2} . \frac{V^2}{2g} = \frac{(u_n - W_n)^2}{2g},$$

und ſolglich der Druckhöhenverlust gleich der der Geschwindigkeitsänderung $u_n - W_n$ entsprechenden Druckhöhe. Es wird dann:

$$\frac{V^2}{2g} = H - (h_1 + h_2 + \ldots + h_n),$$

und:

$$V = \sqrt{2g\{H - (h_1 + h_2 + \ldots + h_n)\}}\ .$$

Es können diese Formeln nur dann angewendet werden, wenn die Geschwindigkeit V gegeben ist, und die Verengung gesucht wird.

Bei dem Gebrauche der obigen Formeln muss bemerkt werden, dass die Continuität des Wassers, auf deren Voraussetzung sie gegründet sind, nur dann stattfindet, wenn nirgends die Geschwindigkeit des Wassers in einer Verengung die Geschwindigkeit $u = \frac{m\,\Omega}{m'\omega} \cdot V$ die Grenze: $\sqrt{2g\left(z + \frac{P}{g\varrho}\right)}$ überschreitet, wo z die Tiefe der Verengung unter dem Niveau des Wassers bezeichnet. Diese Grenze entspricht nämlich der Ausflussgeschwindigkeit im leeren Raume. Wenn der Werth von u_n diese Grenze überschreitet, wird nämlich eine Theilung des Wassers mit einem dazwischenliegenden luftleeren Raume entstehen, und die Continuität folglich aufhören. In der obigen Grenzformel wird z negativ gerechnet, wenn die Verengung höher als das Niveau des Wassers liegt, was bei Röhrenleitungen vorkommen kann.

§. 260.

Wenn $\omega_n = O_n$, welches der Fall ist, wenn, wie in der Fig. 149, ein prismatischer Ansatz die Verbindung zwischen dem Reservoir und der Mündung bildet, so wird der Widerstandscoefficient:

$$w_n = \left(\frac{m\Omega}{m_n\omega_n} - \frac{m\Omega}{O_n}\right)^2 = \left(\frac{1}{m_n} - 1\right)^2\left(\frac{m\Omega}{O_n}\right)^2.$$

Es ist dies auch der Widerstandscoefficient, welcher dem Eintritt des Wassers in eine Röhre entspricht, wenn O_n den Querschnitt der Röhre bezeichnet. Nimmt man für m_n einen mittleren Werth 0,613 an, so wird

$$\left(\frac{1}{m_n}-1\right)^2 = 0{,}4, \text{ und}$$

$$w_n = 0{,}4\left(\frac{m\Omega}{O_n}\right)^2.$$

Bezeichnet man durch u die Geschwindigkeit in der Röhre, deren Querschnitt Q_n ist, durch V, wie früher, die Ausflussgeschwindigkeit, so wird:

$$\frac{u}{V}=\frac{m\Omega}{O_n},$$

und folglich:

$$w_n = \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{u}{V}\right)^2;\ h_n = \frac{V^2}{2g}\cdot w_n = \frac{4}{9}\cdot\frac{u^2}{2g}.$$

Ist $\omega_n = O_n = \Omega$, welches der Fall ist, wenn der Ausfluss durch eine prismatische Ansatzröhre oder in einer dicken Wand stattfindet (Fig. 150), welche hinreichend lang oder dick ist, um einen vollen Ausfluss zu bilden, so werden an der Oeffnung Ω die Wasserfäden parallel auslaufen, und wird folglich hier keine Contraction stattfinden. Es wird dann: $m = 1$, und folglich:

$$w_n = \left(\frac{1}{m_n}-1\right)^2,\ h_n = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{1}{m_n}-1\right)^2.$$

Finden keine anderen Verengungen statt, so wird folglich:

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}},\quad h = H.\frac{\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2},$$

$$Q = \Omega\sqrt{\frac{2gH}{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}},$$

welche Formeln den Ausfluss des Wassers aus einem grossen Reservoir durch ein kurzes Ansatzrohr, oder in der dicken Wand bei vollem Ausflusse geben. Es bezeichnet hier m den dem Querschnitte der Oeffnung und der Geschwindigkeit $\frac{V}{m}$ entsprechenden Ausflusscoefficienten. Man kann indessen mit hinreichender Genauigkeit für m einen mittleren Werth 0,613 annehmen, woraus:

$$w = 0{,}4\,,\ h = \frac{0{,}4}{1 + 0{,}4}\,.\ H = \frac{2}{7}H,$$

$$V = \sqrt{2g\,(H - h)} = \sqrt{2g\,.\,\frac{5}{7}H} = 0{,}845\sqrt{2gH}$$

$$Q = 0{,}845\,\Omega\sqrt{2g\,H}\,.$$

Wenn nur eine plötzliche Erweiterung stattfindet, wenn z. B. wie in Fig. 151 bei a′b′, keine Contraction stattfindet, und folglich $m' = 1$ ist, so wird der entsprechende Widerstandscoefficient:

$$w = m^2 \Omega^2 \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{O'}\right)^2.$$

Bezeichnet man durch u die Geschwindigkeit im Querschnitte O', so ist: $m\Omega V = O'u$, und es wird folglich:

$$w = \left(\frac{O'u}{V}\right)^2 \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{O'}\right)^2 = \left(\frac{u}{V}\right)^2 \left(\frac{O'}{\omega} - 1\right)^2,$$

und der entsprechende Höhenverlust:

$$h = \frac{V^2}{2g}\,.\,w = \frac{u^2}{2g}\left(\frac{O'}{\omega} - 1\right)^2.$$

Es wird folglich:

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{1+w}} = \sqrt{2g\,(H - h)}\,,\ Q = m\Omega V.$$

Wenn zugleich $O' = \Omega$, $m = 1$, wie in der Fig. 152, wo nach einer inwendig abgerundeten Verengung a′b′ ein weiteres Zusatzrohr angefügt worden ist, welches einen vollen Ausfluss bildet, so wird:

$$w = \left(\frac{\Omega}{\omega} - 1\right)^2,\ V = \sqrt{\frac{2g\,H}{1 + \left(\frac{\Omega}{\omega} - 1\right)^2}}\,.$$

Der Höhenverlust wird gleich:

$$h = \frac{V^2}{2g} = H\,.\,\frac{\left(\frac{\Omega}{\omega} - 1\right)^2}{1 + \left(\frac{\Omega}{\omega} - 1\right)^2},$$

und hieraus wieder:

$$V = \sqrt{2g\,(H - h)},\quad Q = \Omega V.$$

Findet dagegen eine Contraction bei der Verengung statt, wie

in Fig. 153, und bezeichnet m den dieser Verengung entsprechenden Ausflusscoefficienten, so wird:

$$w = \left(\frac{\Omega}{m\omega} - 1\right)^2, \quad V = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{\Omega}{m\omega} - 1\right)^2}},$$

$$h = \frac{V^2}{2g} w = H \cdot \frac{\left(\frac{\Omega}{m\omega} - 1\right)^2}{1 = \left(\frac{\Omega}{m\omega} - 1\right)^2},$$

$$Q = \Omega V = \sqrt{\frac{2gH}{\frac{1}{\Omega^2} + \left(\frac{1}{m\omega} - \frac{1}{\Omega}\right)^2}}.$$

Sind alle die Erweiterungen O′, O″ u. s. w. sehr gross in Bezug auf die Ausflussöffnung Ω, so findet man:

$$Q = m\Omega \cdot \sqrt{\frac{2gH}{1 + \left(\frac{m\Omega}{m'\omega'} - \frac{m\Omega}{O'}\right)^2 + \left(\frac{m\Omega}{m''\omega''} - \frac{m\Omega}{O''}\right)^2 + \dots}}$$

$$= \sqrt{\frac{2gH}{\frac{1}{m^2\Omega^2} + \left(\frac{1}{m'\omega'} - \frac{1}{O'}\right)^2 + \left(\frac{1}{m''\omega''} - \frac{1}{O''}\right)^2 + \dots}},$$

woraus, wenn man $\frac{1}{O'}$, $\frac{1}{O''}$ u. s. w. vernachlässigt:

$$Q = \sqrt{\frac{2gH}{\frac{1}{m^2\Omega^2} + \frac{1}{m'^2\omega'^2} + \frac{1}{m''^2\omega''^2} + \dots}}$$

§. 261.

Um den Ausfluss des Wassers aus Röhren und Gefässen zu reguliren, oder in den Maschinen seine Bewegung zu gewissen Zeiten zu hindern, werden Schieber, Hähne, Klappen und Ventile angewendet, welche dem Durchgang des Wassers Widerstände entgegensetzen, die sich auf ähnliche Weise, wie die in dem letzten Paragraphen abgehandelten Fälle bestimmen lassen. Da aber hier das Wasser noch besondere Richtungsänderungen und Zertheilungen erleidet, so werden die dabei vorkommenden Contractionscoefficienten am besten durch direkte Beobachtungen bestimmt.

Die folgenden Tabellen geben nach Weisbach die Widerstandscoefficienten w für die wichtigsten vorkommenden Fälle. Bezeichnet u die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre ausserhalb der Verengung, so wird der dieser Verengung ω entsprechende Druckhöhenverlust gleich:

$$h = w \cdot \frac{u^2}{2g}.$$

I. Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Schieber oder Schubventile im parallelepipedischen Rohre.

Fig. 154.

Querschnittsverhältniss: $\frac{\omega}{O}$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Stellhöhe	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$
Widerstandscoefficient: $w = \left(\frac{O}{m\omega} - 1\right)^2$	0,00	0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	193
Contractionscoefficient: m.	1	0,86	0,77	0,72	0,68	0,66	0,65	0,64	0,65	0,67

II. Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Schieber im cylindrischen Rohre. Fig. 155.

Querschnittsverhältniss: $\frac{\omega}{O}$	1,000	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
Stellhöhe	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$
Widerstandscoefficient: $w = \left(\frac{O}{m\omega} - 1\right)^2$	0,00	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8
Contractionscoefficient: m	1	0,84	0,77	0,71	0,67	0,64	0,62	0,58

III. Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch einen Hahn im parallelepipedischen Rohre. Fig. 156.

Stellwinkel.	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	$66\frac{3}{4}$°
Querschnittsverhältniss: $\frac{\omega}{O}$	0,926	0,849	0,769	0,687	0,604	0,520	0,436	0,352	0,269	0,188	0,110	0
Widerstandscoefficient: $w = 2\left(\frac{O}{m\omega} - 1\right)^2$	0,05	0,31	0,88	1,84	3,45	6,15	11,2	20,7	41,0	95,3	275	∞
Contractionscoefficient: m	0,93	0,85	0,78	0,74	0,72	0,70	0,68	0,67	0,67	0,71	0,72	—

IV. Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch einen Hahn im cylindrischen Rohre. Fig. 156.

Stellwinkel	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
Querschnittsverhältniss: $\frac{\omega}{O}$	0,926	0,850	0,772	0,692	0,613	0,535	0,458	0,385	0,315	0,250
Widerstandscoefficient: $w = 2\left(\frac{O}{m\omega} - 1\right)^2$	0,05	0,29	0,75	1,56	3,10	5,47	9,68	17,3	31,2	52,6
Contractionscoefficient: m	0,93	0,85	0,80	0,77	0,73	0,70	0,68	0,66	0,64	0,65

Stellwinkel	55°	60°	65°	$82\frac{1}{2}$°
Querschnittsverhältniss: $\frac{\omega}{O}$	0,190	0,137	0,091	0
Widerstandscoefficient: $w = 2\left(\frac{O}{m\omega} - 1\right)^2$	106	206	486	∞
Contractionscoefficient: m	0,64	0,65	0,66	—

V. Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Drehklappen oder Droselventile im parallelepipedischen Rohre. Fig. 157.

Stellwinkel	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
Querschnittsverhältniss: $\frac{\omega}{O}$	0,913	0,826	0,741	0,658	0,577	0,500	0,426	0,357	0,293	0,234
Widerstandscoefficient: $w = \left(\frac{O}{m\omega} - 1\right)^2$	0,28	0,45	0,77	1,34	2,16	3,54	5,72	9,27	15,07	24,9
Contractionscoefficient: m	0,72	0,72	0,72	0,71	0,70	0,69	0,69	0,69	0,70	0,71

Stellwinkel	55°	60°	65°	70°	90°
Querschnittsverhältniss: $\frac{\omega}{O}$	0,181	0,134	0,094	0,060	0
Widerstandscoefficient: $w = \left(\frac{O}{m\omega} - 1\right)^2$	42,7	77,4	158	368	∞
Contractionscoefficient: m	0,73	0,76	0,78	0,82	—

VI. Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Drehklappen im cylindrischen Rohre. Fig. 157.

Stellwinkel	5°	10°	15°	20	25°	30°	35°	40°	45°	50°
Querschnittsverhältniss: $\frac{\omega}{O}$	0,913	0,826	0,741	0,658	0,577	0,500	0,426	0,357	0,293	0,234
Widerstandscoefficient: $w = \left(\frac{O}{m\omega} - 1\right)^2$	0,24	0,52	0,90	1,54	2,51	3,91	6,22	10,8	18,7	32,6
Contractionscoefficient: m	0,74	0,70	0,69	0,68	0,67	0,67	0,67	0,65	0,64	0,64

Stellwinkel	55°	60°	65°	70°	90°
Querschnittsverhältniss: $\frac{\omega}{O}$	0,181	0,134	0,094	0,060	0
Widerstandscoefficient: $w = \left(\frac{O}{m\omega} - 1\right)^2$	58,8	118	256	751	∞
Contractionscoefficient: m	0,64	0,63	0,63	0,59	—

In diesen Tafeln sind die Werthe der Querschnittsverhältnisse und der entsprechenden Widerstandscoefficienten nach **Weisbach** angeführt, die Werthe der Contractionscoefficienten nach den zugefügten Formeln der Widerstandscoefficienten berechnet. Wegen der grossen Aenderung der letzteren und der kleinen Aenderung der Contractionscoefficienten muss man bei Interpolation in diesen Tafeln immer vorziehen, den Werth von m erst durch Interpolation zu bestimmen, und hieraus nach der Formel des Widerstandscoefficienten erst diesen zu berechnen.

Bei Kegelventilen (Fig. 158) ist: $w = \left(\frac{O}{m\omega} - 1\right)^2$, wo nach **Weisbach**: $m = 0{,}61$. Es bezeichnet hier O den Röhrenquerschnitt, und ω eine Mittelzahl zwischen der Oeffnung im Ventilringe und der etwas grösseren Ringfläche um das geöffnete Ventil.

Für ein Klappenventil (Fig. 159), bei welchem das Querschnittsverhältniss zwischen der Verengung und der Röhre 0,535 betrug, giebt **Weisbach** die folgende Tafel:

Widerstandscoefficienten für Klappenventile.

Oeffnungswinkel	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
Widerstandscoefficient	90	62	42	30	20	14	9,5	6,6	4,6	3,2	2,3	1,7

§. 262.

Wenn der Ausfluss statt in freie Luft in ein anderes Gefäss stattfindet, welches mit Wasser bis zu einer gewissen Höhe h über der Oeffnung gefüllt ist (Fig. 160), so wird der gegen die Oeffnung auf die Flächeneinheit stattfindende Druck P′ gleich der Summe des Druckes der Atmosphäre und des Gewichtes einer Wassersäule von der Höhe h. Es wird folglich: $P' = P + g\varrho h$, und $H + \frac{P-P'}{g\varrho} = H - h$. Man muss folglich in allen vorhergehenden Formeln als Druckhöhe den Höhenunterschied der beiden Wasserspiegel annehmen.

Der Ausflusscoefficient wird in diesem Falle, wie besondere Beobachtungen gezeigt haben, denselben Werth erhalten, wie derjenige, welcher dem Ausfluss in freier Luft und einer dem Höhenunterschied gleichen Druckhöhe entspricht.

Ist die Oeffnung nur theilweise untergetaucht, so muss man besonders den Ausfluss durch den oberen freien und durch den unteren untergetauchten Theil der Oeffnung berechnen.

Dies gilt auch von den untergetauchten oder unvollständigen Ueberfällen (Fig. 160). Man betrachtet diese als aus zwei besonderen Oeffnungen bestehend; die obere einen Ueberfall bildend, dessen Höhe AC gleich dem Unterschied des constanten Niveaus des Wassers oberhalb und unterhalb der Oeffnung ist; die untere Oeffnung, eine untergetauchte Oeffnung CB bildend, deren Druckhöhe bis A gerechnet wird.

§. 263.

Lange Ansatzröhren verzögern den Ausfluss um so mehr, je länger dieselben sind. Die Hindernisse, welche die Röhrenwände

der Bewegung des Wassers entgegensetzen, sind zweierlei Art, indem sie theilweise von der Adhäsion oder Klebrigkeit des Wassers an den Wänden, theilweise aber auch von einer Reibung des Wassers gegen dieselben herrühren. Die Reibung ist indessen hier wesentlich von der zwischen zwei festen Körpern stattfindenden Reibung verschieden, indem sie hier in dem Verlust der lebendigen Kraft besteht, welchen die von den Unebenheiten der Wände zurückgestossenen Theilchen und die dadurch bewirkten kleinen Wirbel des Wassers verursachen, während bei der Reibung der festen Körper der Verlust der lebendigen Kraft von den Schwingungen der in einander greifenden Theile um ihre Gleichgewichtslage herrührt. Während bei festen Körpern die Amplitude und folglich die grösste Geschwindigkeit dieser Schwingungen nur von der Tiefe des Ineinandergreifens der Moleküle und folglich von dem Drucke abhängt, dagegen von der relativen Geschwindigkeit der Körper unabhängig ist, werden die bei den flüssigen Körpern stattfindenden Wirbel nur von der Geschwindigkeit der Flüssigkeit abhängig, dagegen von dem Drucke unabhängig sein. Der durch diese Wirbel verursachte Verlust der lebendigen Kraft muss dem Quadrate dieser Geschwindigkeit proportional sein. Den durch die Adhäsion verursachten Widerstand kann man dagegen der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional annehmen.

Beide Arten von Widerständen müssen auch der Länge der Röhre oder des Canals und dem Perimeter des genässten Theils derselben proportional angenommen werden.

Man wird durch diese Betrachtungen zu der folgenden Formel geführt für den Widerstand einer Röhre oder eines Canals:

$$\varrho p l (\alpha u + \beta u^2),$$

wo ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, p den genässten Perimeter, l die Länge der Röhre, und u die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre bezeichnet.

Die dynamische Arbeit dieses Widerstandes in einem Zeitelemente dt wird gleich:

$$\varrho pl\,(\alpha u + \beta u^2)\,udt.$$

Diese widerstehende Arbeit muss dann von der bewegenden Arbeit der Schwere und des Druckes in der allgemeinen Differentialgleichung der Bewegung subtrahirt werden. Dividirt man, wie im §. 259, mit $m\Omega Udt = u\omega dt$, wo ω den Querschnitt der Röhre bezeichnet, so findet man:

$$\varrho m\Omega d_t U \int_0^s \frac{ds}{\omega} + \tfrac{1}{2}\varrho U^2\left(1 - \frac{m^2\Omega^2}{O^2}\right) =$$

$$g\varrho(H - \Sigma h) + P - P' - \frac{\varrho pl}{\omega}(\alpha u + \beta u^2),$$

wo Σh die Summe der durch die verschiedenen plötzlichen Verengungen und Erweiterungen verursachten Höhenverluste bezeichnet.

Bezeichnet man, wie früher, durch V den constanten Grenzwerth der Ausflussgeschwindigkeit, so findet man diesen, indem man in der obigen Gleichung: $U = V$, $d_t U = d_t V = o$ setzt, wodurch:

$$\tfrac{1}{2}\varrho V^2\left(1 - \frac{m^2\Omega^2}{O^2}\right) = g\varrho\,(H - \Sigma h) + P - P' - \frac{\varrho pl}{\omega}(\alpha u + \beta u^2),$$

und folglich:

$$V = \sqrt{\frac{2g\left(H - \Sigma h + \dfrac{P-P'}{g\varrho} - \dfrac{pl}{g\omega}(\alpha u + \beta u^2)\right)}{1 - \dfrac{m^2\Omega^2}{O^2}}}.$$

Der durch die Reibung und Adhäsion verursachte Höhenverlust wird folglich gleich:

$$h' = \frac{pl}{g\omega}(\alpha u + \beta u^2),$$

und hieraus der Widerstandscoefficient w, wegen der Gleichung:

$$h' = \frac{V^2}{2g}\cdot w:$$

$$w' = \frac{2gh'}{V^2} = \frac{2pl}{\omega}\left(\frac{\alpha u + \beta u^2}{V^2}\right),$$

oder, weil $u\omega = m\Omega V$, $V = \frac{u\omega}{m\Omega}$, gleich:

$$w' = 2 \cdot \frac{pl}{\omega} \cdot \frac{m^2\Omega^2}{u^2\omega^2}(\alpha u + \beta u^2) = 2\,\frac{pl}{\omega} \cdot \frac{m^2\Omega^2}{\omega^2}\left(\beta + \frac{\alpha}{u}\right).$$

Durch Hülfe dieses Widerstandscoefficienten wird:

$$V = \sqrt{\frac{2g\left(H + \frac{P - P'}{g\varrho}\right)}{1 - \frac{m^2\Omega^2}{O^2} + W + w'}},$$

wenn man durch $W = \Sigma w = \frac{V^2}{2g}\Sigma h$ die Summe der durch die verschiedenen plötzlichen Verengungen und Erweiterungen stattfindenden Widerstandscoefficienten bezeichnet.

Es ist in diesen Formeln bei Ausfluss des Wassers in freier Luft: $P - P' = 0$, und bei untergetauchter Oeffnung: $H + \frac{P - P'}{g\varrho}$ gleich dem Höhenunterschied der beiden Wasserspiegel.

Bezeichnen wir diesen Höhenunterschied ebenso wie die Druckhöhe bei freier Oeffnung durch H und vernachlässigen wir das Verhältniss $\frac{\Omega}{O}$, so wird folglich:

$$V = \sqrt{2g(H - \Sigma h - h')} = \sqrt{\frac{2gH}{1 + W + w'}}.$$

Die Geschwindigkeit u des Wassers in der Röhre hängt von der Ausflussgeschwindigkeit V durch die Gleichung: $u = \frac{m\Omega}{\omega} \cdot V$ ab. Man berechnet daher erst annäherungsweise V, indem man die Reibung und Adhäsion vernachlässigt; aus diesem approximirten Werthe von V berechnet man dann einen approximirten Werth von u, und daraus den Druckhöhenverlust oder den Widerstandscoefficienten w′, und hieraus wieder einen genaueren Werth von V. Wenn es nöthig sein sollte, berechnet man hieraus wieder einen zweiten genaueren Werth von u, und daraus wieder h′ oder w′ und V.

Nach d'Aubuisson ist, wenn der Fuss als Längeneinheit angenommen wird:

$$\alpha = 0{,}000589, \quad \frac{\alpha}{g} = 0{,}000\ 0188,$$

$$\beta = 0{,}003359, \quad \frac{\beta}{g} = 0{,}000\ 1074.$$

Weisbach nimmt statt $\alpha u + \beta u^2$ die Funktion:

$$\alpha' u \sqrt{u} + \beta' u^2$$

an, und setzt folglich:

$$h' = \frac{pl}{\omega} \cdot \frac{\alpha' u \sqrt{u} + \beta' u^2}{g}, \quad w' = 2 \frac{pl}{\omega} \cdot \frac{m^2 \Omega^2}{\omega^2} \left(\beta' + \frac{\alpha'}{\sqrt{u}}\right)$$

Er gibt für α' und β' die Werthe:

$$\alpha' = 0{,}002115; \quad \frac{\alpha'}{g} = 0{,}000\ 0676,$$

$$\beta' = 0{,}001798; \quad \frac{\beta'}{g} = 0{,}000\ 0575.$$

Nach Prony, Eytelwein und d'Aubuisson gelten die angeführten Werthe der Coefficienten α und β für alle Arten Röhren. Nach Weisbach sollen sie für Holzröhren $1{,}_{75}$ mal so gross sein, wie die oben angegebenen, welche insbesondere aus Beobachtungen mit Metallröhren hergeleitet sind.

§. 264.

Will man den Ausfluss eines Reservoirs durch eine lange Röhre berechnen, und es findet sonst kein anderer Widerstand, als der durch den Eintritt des Wassers in die Röhre statt, so wird nach §. 260:

$$m\Omega = \omega, \; u = V, \; \Sigma h = \left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2 \cdot \frac{V^2}{2g} = 0{,}4 \frac{V^2}{2g},$$

und man findet folglich:

$$V = \sqrt{2g(H - \Sigma h - h')} = \sqrt{2g\left[H - 0{,}4 \frac{V^2}{2g} - \frac{pl}{g\omega}(\alpha V + \beta V^2)\right]}$$

Hieraus findet man wieder:

$$V^2 = 2gH - 0{,}4 V - \frac{2pl}{\omega}(\alpha V + \beta V^2),$$

oder:

$$V^2 \left(1{,}4 + 2\beta \frac{pl}{\omega}\right) + 2\alpha \frac{pl}{\omega} V = 2gH,$$

woraus:

$$V = -\frac{\alpha \cdot \frac{pl}{\omega}}{1{,}_4 + 2\beta \cdot \frac{pl}{\omega}} + \sqrt{\left\{\frac{2gH}{1{,}_4 + 2\beta \cdot \frac{pl}{\omega}} + \left(\frac{\alpha \cdot \frac{pl}{\omega}}{1{,}_4 + 2\beta \cdot \frac{pl}{\omega}}\right)^2\right\}} =$$

$$= \frac{-l + \sqrt{\left\{l^2 + \frac{H\omega}{p}\left(\frac{2{,}_8 g}{\alpha^2} \cdot \frac{\omega}{p} + \frac{4g\beta}{\alpha^2} \cdot l\right)\right\}}}{\frac{1{,}_4}{\alpha} \cdot \frac{\omega}{p} + \frac{2\beta}{\alpha} \cdot l}$$

oder, wenn man die Werthe von α, β, g substituirt:

$$V = \frac{-l + \sqrt{\left\{l^2 + \frac{H\omega}{p}\left(252600\,000 \cdot \frac{\omega}{p} + 1212000\; l\right)\right\}}}{2377 \cdot \frac{\omega}{p} + 11{,}_{41}\; l}.$$

Bei sehr langen Röhren kann man die mit $\frac{\omega}{p}$ multiplicirten Glieder in Bezug auf die mit l multiplicirten vernachlässigen, und man erhält dann die Formel:

$$V = -\frac{\alpha}{2\beta} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2 + \frac{g}{\beta} \cdot \frac{H\omega}{pl}}$$

$$= -0{,}0877 + \sqrt{0{,}00769 + 9315 \cdot \frac{H\omega}{pl}}.$$

Ist die Geschwindigkeit V gegeben, so findet man hieraus umgekehrt für sehr lange Röhren:

$$\frac{H\omega}{pl} = \frac{\alpha V + \beta V^2}{g} = 0{,}000\,0188\; V + 0{,}0001074\; V^2.$$

Bezeichnet man die Ausflussmenge durch Q, so ist: $V = \frac{Q}{\omega}$. Dieser Werth in die Formel:

$$2gH = 1{,}_4\, V^2 + \frac{2pl}{\omega}(\alpha V + \beta V^2)$$

substituirt, giebt die zu einer gegebenen fortzuführenden Wassermenge nöthige Druckhöhe gleich:

$$H = \frac{1{,}_4}{2g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2} + \frac{pl}{\omega}\left(\frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q}{\omega} + \frac{\beta}{g} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2}\right)$$

Ist die Druckhöhe gegeben und sucht man die Ausflussmenge Q, so hat man die Gleichung:

$$Q = \omega V = -\frac{\alpha pl}{1{,}_4 + 2\beta \frac{pl}{\omega}} + \sqrt{\left\{\frac{2gH\omega^2}{1{,}_4 + 2\beta \cdot \frac{pl}{\omega}} + \left(\frac{\alpha pl}{1{,}_4 + 2\beta \cdot \frac{pl}{\omega}}\right)^2\right\}}.$$

§. 265.

Bei Röhrenleitungen mit kreisrunden Oeffnungen ist: $\omega = \frac{1}{4}\pi d^2$, $p = \pi d$, wenn d den Durchmesser der Röhren bezeichnet. Substituirt man diese Werthe in den Formeln des vorhergehenden Paragraphen, so findet man die um eine gegebene Wassermenge fortzuführen nöthige Druckhöhe gleich:

$$H = \frac{11,2}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q^2}{d^4} + \frac{64\beta}{\pi^2 g} \cdot \frac{l}{d^5} (Q^2 + \frac{\pi\alpha}{4\beta} Q d^2),$$

oder, wenn die Werthe von α, β, g substituirt werden:

$$H = 0,0363 \cdot \frac{Q^2}{d^4} + 0,000696 \, \frac{l}{d^5} (Q^2 + 0,1377 \, Q d^2).$$

Ist umgekehrt die Druckhöhe gegeben, und sucht man die Ausflussmenge, so wird:

$$Q = - \frac{\frac{\alpha\pi}{8\beta} \cdot l d^2}{1 + \frac{1,4}{8\beta} d} + \sqrt{\left\{ \frac{\frac{\pi^2 g}{64\beta} \cdot H d^5}{1 + \frac{1,4}{8\beta} d} + \left(\frac{\frac{\alpha\pi}{8\beta} l d^2}{1 + \frac{1,4}{8\beta} d} \right)^2 \right\}}.$$

Substituirt man hier die Werthe von α, β, g, so findet man:

$$Q = - \frac{0,0689 \, l d^2}{1 + 52,1 \, d} + \sqrt{\left\{ \frac{1437 \, H d^5}{1 + 52,1 \, d} + \left(\frac{0,689 \, l d^2}{1 + 52,1 \, d} \right)^2 \right\}}.$$

Sucht man endlich den Durchmesser der Röhrenleitung, welcher nothwendig ist, um bei einer gegebenen Länge und Druckhöhe eine gegebene Wassermenge fortzuführen, so hat man hierzu die erste obige Gleichung in Bezug auf d geordnet:

$$d^5 - \left(\frac{16\alpha}{\pi g} \cdot \frac{lQ}{H} \cdot d^2 + \frac{11,2}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q^2}{H} \cdot d + \frac{64\beta}{\pi^2 g} \cdot \frac{lQ^2}{H} \right) = 0.$$

Um diese Gleichung annäherungsweise aufzulösen, kann man erst den Durchmesser gleich:

$$d' = \sqrt[5]{\frac{64\beta}{\pi^2 g} \cdot \frac{lQ^2}{H}}$$

setzen, und nachher einen zweiten angenäherten Werth durch die Gleichung:

$$d^5 = \frac{64\beta}{\pi^2 g} \cdot \frac{lQ^2}{H} + \frac{11,2}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q^2}{H} d' + \frac{16\alpha}{\pi g} \cdot \frac{lQ}{H} \cdot d'^2$$

bestimmen. Substituirt man die Werthe von α, β, g, so findet man die Formeln:

$$d' = \sqrt[5]{0{,}000696 \frac{lQ^2}{H}} = 0{,}233 \sqrt[5]{\frac{lQ^2}{H}},$$

$$d^5 = 0{,}000696 \cdot \frac{lQ^2}{H} + 0{,}0363 \frac{Q^2}{H} d' + 0{,}000\,0958 \frac{lQ}{H} d'^2.$$

Ist die Länge der Röhrenleitung sehr gross, so kann man bei Berechnung der nöthigen Druckhöhe das erste Glied, in welchem l nicht vorkommt, vernachlässigen. Man findet dann:

$$H = \frac{64\beta}{\pi^2 g} \cdot \frac{l}{d^5} \left(Q^2 + \frac{\pi\alpha}{4\beta} Qd^2\right) = 0{,}000696 \frac{l}{d^5} (Q^2 + 0{,}1377\, Qd^2).$$

Ebenso kann man bei Berechnung der Ausflussmenge das Glied $\frac{1{,}4}{8\beta} \cdot d$ in Bezug auf l vernachlässigen, wodurch man findet:

$$Q = -\frac{\alpha\pi}{8\beta} d^2 + \sqrt{\left\{\frac{\pi^2 g}{64\beta} \cdot \frac{Hd^5}{l} + \left(\frac{\alpha\pi}{8\beta} d\right)^2\right\}} =$$

$$= -0{,}0689\, d^2 + \sqrt{1437 \frac{Hd^5}{l} + (0{,}0689\, d^2)^2}.$$

Endlich hat man in diesem Falle für die Berechnung des Durchmessers:

$$d^5 = \frac{64\beta}{\pi^2 g} \cdot \frac{lQ^2}{H} + \frac{16\alpha}{\pi g} \cdot \frac{lQ}{H} \cdot d^2 = \frac{64\beta}{\pi^2 g} \cdot \frac{lQ}{H} \left(Q + \frac{\pi\alpha}{4\beta} d^2\right),$$

oder:

$$d^5 = 0{,}000696 \cdot \frac{lQ}{H} (Q + 0{,}1377\, d^2),$$

wo auf der rechten Seite statt d der erste angenäherte Werth:

$$d = 0{,}233 \sqrt[5]{\frac{lQ^2}{H}}$$

gesetzt werden muss.

§. 266.

Gewöhnlich ist das Ende der Röhrenleitung mit einem engeren Ansatzrohr versehen. Bezeichnet man durch Ω die Mündung dieses Ansatzrohres, durch m dessen Ausflusscoefficienten, so wird: $u = \frac{m\Omega}{\omega} \cdot V$, und folglich:

$$\Sigma h = 0{,}4 \cdot \frac{u^2}{2g} = 0{,}4 \cdot \frac{m^2\Omega^2}{\omega^2} \cdot \frac{V^2}{2g},$$

$$h' = \frac{pl}{g\omega}(\alpha u + \beta u^2) = \frac{pl}{g\omega} \cdot \frac{m\Omega}{\omega}\left(\alpha V + \frac{m\Omega}{\omega}\beta V\right).$$

Diese Werthe in der Gleichung:

$$V = \sqrt{2g(H - \Sigma h - h')}, \quad \text{oder:} \quad 2gH = V^2 + 2g\Sigma h + 2gh'$$

substituirt, geben:

$$2gH = V^2\left(1 + 0{,}4\,\frac{m^2\Omega^2}{\omega^2}\right) + \frac{2pl}{\omega} \cdot \frac{m\Omega}{\omega}\left(\alpha V + \frac{m\Omega}{\omega}\beta V^2\right),$$

oder, wenn man $V = \frac{Q}{m\Omega}$ substituirt:

$$2gH = \left(1 + 0{,}4 \cdot \frac{m^2\Omega^2}{\omega^2}\right) \cdot \frac{Q^2}{m^2\Omega^2} + \frac{2pl}{\omega} \cdot \frac{Q}{\omega}\left(\alpha + \frac{\beta Q}{\omega}\right).$$

Hieraus findet man dann die nöthige Druckhöhe:

$$H = \frac{1 + 0{,}4 \cdot \frac{m^2\Omega^2}{\omega^2}}{2g} \cdot \frac{Q^2}{m^2\Omega^2} + \frac{pl}{g\omega} \cdot \frac{Q}{\omega}\left(\alpha + \frac{\beta Q}{\omega}\right),$$

und die Ausflussmenge:

$$Q = -\frac{\alpha pl}{0{,}4 + \frac{\omega^2}{m^2\Omega^2} + 2\beta \cdot \frac{pl}{\omega}} + \sqrt{\left\{\frac{2gH\omega^2}{0{,}4 + \frac{\omega^2}{m^2\Omega^2} + 2\beta \cdot \frac{pl}{\omega}}\right\} + \left(\frac{\alpha pl}{0{,}4 + \frac{\omega^2}{m^2\Omega^2} + 2\beta \cdot \frac{pl}{\omega}}\right)^2}.$$

Bei Röhrenleitungen mit kreisrunden Querschnitten und runder Mündung wird: $p = \pi d$, $\omega = \frac{1}{4}\pi d^2$, $\Omega = \frac{1}{4}\pi\delta^2$, wenn δ den Durchmesser der Oeffnung bezeichnet. Es wird dann:

$$H = \frac{8}{\pi^2 g}\left(1 + 0{,}4\,m^2\,\frac{\delta^4}{d^4}\right) \cdot \frac{Q^2}{m^2\delta^4} + \frac{64\beta}{\pi^2 g} \cdot \frac{1}{d^5}\left(Q^2 + \frac{\pi\alpha}{4\beta}Qd^3\right)$$

$$= \frac{8}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q^2}{m^2\delta^4} + \frac{0{,}32}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q^2}{d^4} + \frac{64\beta}{\pi^2 g} \cdot \frac{1}{d^5}\left(Q^2 + \frac{\pi\alpha}{4\beta}Qd^3\right),$$

oder, wenn man die Werthe von α, β, g substituirt:

$$H = 0{,}02591\,\frac{Q^2}{m^2\delta^4} + 0{,}01036 \cdot \frac{Q^2}{d^4} + 0{,}000696 \cdot \frac{1}{d^5}\left(Q^2 + 0{,}1377\,Q\,d^3\right).$$

$$Q = -\frac{\frac{\alpha\pi}{8\beta}\cdot \mathrm{l}d^2}{1+\left(\frac{1}{8\beta}\cdot\frac{d^4}{m^2\delta^4}+\frac{1}{20\beta}\right)d}$$

$$+\sqrt{\left\{\frac{\frac{\pi^2 g}{64\beta}Hd^5}{\mathrm{l}+\left(\frac{1}{8\beta}\cdot\frac{d^4}{m^2\delta^4}+\frac{1}{20\beta}\right)d}+\left(\frac{\frac{\alpha\pi}{8\beta}\cdot \mathrm{l}d^2}{\mathrm{l}+\left(\frac{1}{8\beta}\cdot\frac{d^4}{m^2\delta^4}+\frac{1}{20\beta}\right)d}\right)^2\right\}}$$

oder, wenn man die Werthe von α, β, g substituirt:

$$Q = -\frac{0{,}0689\ \mathrm{l}d^2}{\mathrm{l}+\left(37{,}2\frac{d^4}{m^2\delta^4}+14{,}89\right)d}$$

$$+\sqrt{\left\{\frac{1437\ Hd^5}{\mathrm{l}+\left(37{,}2\frac{d^4}{m^2\delta^4}+14{,}89\right)d}+\left(\frac{0{,}0689\ \mathrm{l}d^2}{\mathrm{l}+\left(37{,}2\frac{d^4}{m^2\delta^4}+14{,}89\right)d}\right)^2\right\}}.$$

Wird der Durchmesser der Mündung δ gesucht, so findet man ihn aus der ersten dieser Gleichungen:

$$\delta^4 = \frac{1}{m^2}\left\{\frac{\frac{8}{\pi^2 g}\cdot Q^2 d^5}{Hd^5-\frac{0{,}32}{\pi^2 g}\cdot Q^2 d+\frac{64\beta}{\pi^2 g}\cdot \mathrm{l}\left(Q^2+\frac{\pi\alpha}{4\beta}Qd^2\right)}\right\},$$

oder, wenn die Werthe substituirt werden:

$$\delta^4 = \frac{1}{m^2}\left\{\frac{0{,}0259\ Q^2 d^5}{Hd^5-0{,}01036\ Q^2 d+0{,}000696\ \mathrm{l}\,(Q^2+0{,}1377\ Qd^2)}\right\}.$$

§. 267.

Bildet die Röhrenleitung ein Knie, so findet sowohl wegen der plötzlichen Aenderung der Richtung, wie wegen der im Knie stattfindenden Contraction des Wasserstrahls (Fig. 161), eine plötzliche Veränderung der Geschwindigkeit und daher ein Verlust der lebendigen Kraft statt. Dieser, und folglich der durch das Knie verursachte Höhenverlust wird dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sein. Die hierüber an verschiedenen Knieen angestellten Versuche haben nach Weisbach auf den folgenden Ausdruck des Höhenverlustes geführt:

$$h = \left(0{,}9457 \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi + 2{,}047 \sin^4 \tfrac{1}{2}\varphi\right)\frac{u^2}{2g},$$

wo φ den Kniewinkel bezeichnet.

Bei einem rechtwinklichen Knie (Fig. 162) wird $\varphi = 90°$, $\sin^2 \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}$, und folglich:

$$h = 0{,}9848 \,.\, \frac{u^2}{2g}\,.$$

Der Höhenverlust wird folglich hier beinahe gleich der Geschwindigkeitshöhe: $\frac{u^2}{2g}$.

Gekrümmte Röhren (Fig. 163) geben unter übrigens gleichen Umständen einen viel kleineren Höhenverlust als Knieröhren. Bezeichnet man durch r den Halbmesser der Röhrenleitung, welche man mit kreisförmigem Querschnitt annimmt, durch R den mittleren Krümmungshalbmesser der Axenlinie AB, durch n° die Anzahl von Graden des Ablenkungswinkels ACB, durch u die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre, durch V die Ausflussgeschwindigkeit, so ist nach Weisbach der Höhenverlust gleich:

$$h = \left(0{,}131 + 1{,}847 \,.\, \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{7}{2}}\right) \frac{n°}{180°} \cdot \frac{u^2}{2g}\,.$$

Substituirt man statt der Geschwindigkeit u die Wassermenge Q durch Hülfe der Formel: $u = \frac{Q}{\pi r^2}$, so wird der Höhenverlust:

$$h = \left(0{,}131 + 1{,}847 \,.\, \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{7}{2}}\right) \frac{n°}{180°} \cdot \frac{Q^2}{2g\pi^2 r^4}\,.$$

Navier und Morin wenden die folgende Formel an:

$$h = (0{,}0124 + 0{,}0186\ R)\, \frac{b}{R^2} \cdot \frac{u^2}{2g},$$

wo b die Länge des Bogens AB der Axenlinie bezeichnet, folglich:

$$\frac{b}{R} = \pi \,.\, \frac{n°}{180°},$$

oder:

$$h = \left(\pi \,.\, 0{,}0186 + \pi \,.\, 0{,}0124 \,.\, \frac{1}{R}\right) \cdot \frac{n°}{180°} \cdot \frac{u^2}{2g} =$$

$$= \left(0{,}0585 + 0{,}0142 \,.\, \frac{1}{R}\right) \cdot \frac{n°}{180°} \cdot \frac{u^2}{2g},$$

folglich von r, oder dem Halbmesser der Röhre, unabhängig.

§. 268.

Wenn eine Röhrenleitung in die freie Luft mündet, und die Mündung nach oben gerichtet ist, so giebt sie einen springenden Wasserstrahl. Damit ein solcher möglichst hoch steige, ist es nöthig, nicht nur in der Röhrenleitung die Hindernisse gegen die Bewegung des Wassers so klein wie möglich zu machen, sondern auch solche Mundstücke anzuwenden, welche dem Wasser die kleinsten Hindernisse in den Weg legen, und denen folglich die grössten Geschwindigkeitscoefficienten entsprechen. Es sind diese die Mündungen in der dünnen Wand, und die nach dem contrahirten Wasserstrahl geformten Ansatzröhren. Mündungen in der dünnen Wand werden deswegen nicht angewendet, weil der durch diese gebildete Wasserstrahl, wie im §. 252 bemerkt, bald abwechselnde Knoten und Bäuche bildet, und dadurch von der äusseren Luft früh zertheilt wird. Es werden deswegen bei Springbrunnen und Feuerspritzen nach dem contrahirten Wasserstrahl geformte Ansatzröhren mit einer wenig conisch-convergenten Verlängerung angewendet (Fig. 164). Diese Ansatzröhren dürfen jedoch nicht lang sein, weil alsdann das Wasser, welches hier seine grösste Geschwindigkeit hat, durch die Reibung einen bedeutenden Druckverlust erleidet.

Die Ausflussgeschwindigkeit V wird dann durch die Formeln des §. 266 gegeben werden:

$$V = \sqrt{2g(H - \Sigma h - h')}.$$

Bei Springbrunnen sind gewöhnlich die Ansatzröhren so kurz, dass man die Reibung des Wassers in denselben vernachlässigen kann; bei Feuerspritzen muss man sie dagegen mitrechnen.

Die zu der Geschwindigkeit V gehörige Sprunghöhe würde im luftleeren Raume gleich: $S = \frac{V^2}{2g}$ sein. In der Luft kann man sie gleich: $S_{\prime} = \frac{V^2}{2g}\left(1 - 0{,}00314\,\frac{V^2}{2g}\right) = S(1 - 0{,}00314\ S)$ annehmen.

§. 269.

Wenn das Wasser aus einer Hauptröhre in zwei Seitenröhren geleitet wird, und die Verbindung der Seitenröhren mit der Hauptröhre so eingerichtet ist, dass kein merklicher Verlust an lebendiger Kraft dadurch verursacht wird, so kann man die Geschwindigkeit des Wassers in der Hauptröhre und den beiden Seitenröhren dadurch bestimmen, dass die am Theilungspunkte der Röhren wirkende Druckhöhe des Wassers überall gleich ist.

Bezeichnen wir durch H die Höhe des Reservoirs über dem Theilungspunkte der Röhrenleitung, durch L die Länge, durch D den Durchmesser der Hauptröhre und durch V die Geschwindigkeit des Wassers in derselben; durch h die Höhe des Theilungspunktes über der Ausflussöffnung der einen Seitenröhre, durch l seine Länge, durch d seinen Durchmesser, durch u die Geschwindigkeit des Wassers in derselben und durch δ den Durchmesser seiner Ausflussöffnung; endlich durch h′, l′, d′, u′, δ' die entsprechenden Grössen der zweiten Seitenröhre.

Es wird dann der Höhenverlust des Wassers in der Hauptröhre an dem Theilungspunkte gleich:

$$\frac{4L}{gD}(\alpha V + \beta V^2),$$

und folglich die wirkende Druckhöhe gleich:

$$H - \frac{4L}{gD}(\alpha V + \beta V^2).$$

Die zur Bewegung des Wassers in der ersten Seitenröhre nöthige Druckhöhe findet man aus §. 266, wenn man daselbst den Widerstandscoefficienten $W = 0$, den Ausflusscoefficienten $m = 1$, und die Ausflussmenge: $Q = \omega u = \frac{1}{4}\pi d^2 u$ setzt, gleich:

$$\frac{u^2}{2g} \cdot \frac{d^4}{\delta^4} + \frac{4\,l}{g\,d}(\alpha u + \beta u^2).$$

Ebenso findet man die zur Bewegung des Wassers in der zweiten Seitenröhre nöthige Druckhöhe gleich:

$$\frac{u'^2}{2g} \cdot \frac{d'^4}{\delta'^4} + \frac{4\,l'}{g\,d'}(\alpha u' + \beta u'^2).$$

Diese drei Druckhöhen müssen dann gleich sein, was die zwei Gleichungen giebt:

$$H - \frac{4L}{gD}(\alpha V + \beta V^2) = \frac{u^2}{2g} \cdot \frac{d^4}{\delta^4} + \frac{4l}{gd}(\alpha u + \beta u^2) =$$

$$= \frac{u'^2}{2g} \cdot \frac{d'^4}{\delta'^4} + \frac{4l'}{gd'}(\alpha u' + \beta u'^2).$$

Ausserdem hat man noch die Continuitätsgleichung, welche ausdrückt, dass die in der Hauptröhre bewegte Wassermenge gleich der Summe derjenigen in beiden Seitenröhren bewegten ist, folglich:

$$VD^2 = ud^2 + u'd'^2.$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich dann die drei Geschwindigkeiten: V, u, u', berechnen.

Finden in den Röhren andere Hindernisse wie Kniee, Verengungen u. s. w. statt, so müssen die dadurch verursachten Höhenverluste zu den durch die Reibung verursachten addirt werden.

§. 270.

Den Druck des Wassers in einem beliebigen Punkte der Röhrenleitung findet man aus der Formel des §. 259:

$$V = \sqrt{2g\left(H + \frac{P - P'}{g\varrho} - \Sigma h\right)},$$

wo V die Geschwindigkeit des Wassers in dem gegebenen Querschnitte der Röhrenleitung, H die Tiefe dieses Querschnittes unter dem Niveau des Reservoirs, P den Druck der Atmosphäre auf dieses Niveau, P' den gesuchten Druck des Wassers in dem gegebenen Querschnitte und Σh die Summe aller zwischen dem Reservoir und dem gegebenen Querschnitte stattfindenden Druckhöhenverluste bezeichnet. Man findet dann hieraus:

$$P' = P + g\varrho\left(H - \frac{V^2}{2g} - \Sigma h\right).$$

Man kann diesen Druck P' direkt messen durch Wassersäulen, welche sich in senkrecht aufgesetzten Röhren erhalten. Bezeichnet man durch z die Wasserhöhe in einer solchen oben offenen Röhre, so wird: $P' = P + g\varrho z$, und folglich:

$$z = H - \frac{V^2}{2g} - \Sigma h.$$

Betrachtet man einen folgenden Querschnitt derselben Röhre, wo folglich die Geschwindigkeit des Wassers dieselbe ist, bezeichnet durch H′ das Gefälle der Leitung zwischen beiden Querschnitten, durch h′ den durch die Reibung und andere Hindernisse gegen die Bewegung zwischen beiden Querschnitten verursachten Höhenverlust, und durch z′ die entsprechende Wasserhöhe, so wird hier:

$$z' = H + H' - \frac{V^2}{2g} - \Sigma h - h',$$

und folglich:

$$z' - z = H' - h'.$$

Hieraus findet man dann umgekehrt den Druckhöhenverlust gleich:

$$h' = H' - (z' - z).$$

Durch diese Formel kann man folglich, wenn die Höhe H′ des Gefälles und die Wasserhöhen z und z′ gemessen worden sind, den auf dem gegebenen Stück der Röhre stattfindenden Druckhöhenverlust finden.

Röhren, welche lediglich zu diesem Zwecke angebracht sind, werden Piëzometer genannt. Der Unterschied zwischen der Höhe des Gefälles und der Piëzometerdifferenz an den beiden Endpunkten irgend eines Theiles der Röhrenleitung giebt folglich den Druckhöhenverlust, welcher durch die auf diesem Stücke stattfindenden Hindernisse verursacht wird, welcher Art diese auch sind. Ein Sinken des Piëzometerstandes zeigt sofort die in den oberen Theilen der Leitung neu zugekommenen Hindernisse an, und misst zugleich den durch dieselben verursachten Höhenverlust.

§. 271.

Der durch die Reibung und Adhäsion des Wassers in Wasserleitungen und Canälen verursachte Druckhöhenverlust wird bei gleicher Länge, gleichem Querschnitte und derselben Geschwindigkeit am

kleinsten, wenn der genässte Perimeter am kleinsten ist. Bei Röhrenleitungen wird dies der Fall, wenn der Querschnitt ein Kreis ist.

Bei offenen Canälen wird die Form eines Paralleltrapezes ABCD (Fig. 165) angewendet. Setzt man die untere Breite $BC = b$, die Böschung $\frac{BE}{AE} = n$, die Tiefe AE gleich h, so wird der genässte Perimeter gleich:

$$p = b + 2\sqrt{h^2 + n^2 h^2} = b + 2h\sqrt{1 + n^2},$$

und der Querschnitt:

$$\omega = h(b + nh).$$

Die Böschung n ist gewöhnlich gegeben. Bei ausgegrabenen Canälen ist sie von der Natur des Erdreichs, worin der Canal ausgegraben ist, bestimmt. Der Querschnitt ω ist durch die Geschwindigkeit und das Volumen des Wassers, welches der Canal führen soll, gegeben. Die Werthe von b und h, welche der Gleichung: $h(b + nh) = \omega$ entsprechen und p zu einem Minimum machen, findet man dann aus der Gleichung:

$$\frac{d_b p}{d_b \omega} = \frac{d_h p}{d_h \omega}, \text{ oder: } \frac{1}{h} = \frac{2\sqrt{1 + n^2}}{b + 2nh},$$

woraus:

$$b + 2nh = 2h\sqrt{1 + n^2}, \quad b = 2h(\sqrt{1 + n^2} - n).$$

Dieser Werth in der Gleichung: $h(b + nh) = \omega$ substituirt, giebt die Werthe:

$$h = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\sqrt{1 - n^2} - n}}, \quad b = \frac{\omega}{h} - nh.$$

Bezeichnet man den Böschungswinkel ABE durch θ, so ist:

$$n = \cotg\theta, \quad \sqrt{1 + n^2} = \sin\theta, \quad 2\sqrt{1 + n^2} - n = \frac{2 - \cos\theta}{\sin\theta},$$

und es wird folglich:

$$h = \sqrt{\frac{\omega \sin\theta}{2 - \cos\theta}}, \quad b = \frac{\omega}{h} - h \cotg\theta.$$

Durch diese Gleichung ist das vortheilhafteste Querprofil des Canals bestimmt.

Ist die Böschung Null und der Querschnitt folglich ein Rectangel, so wird:

$$n = o,\ h = \sqrt{\tfrac{1}{2}\omega},\ b = \frac{\omega}{h} = \sqrt{2\omega} = 2h.$$

§. 272.

Wir haben in den vorhergehenden Paragraphen den Perimeter des genässten Theils der Röhrenleitung oder des Canals und den Querschnitt der Flüssigkeit in derselben als überall gleich angenommen. Wo dies nicht der Fall ist, muss man im §. 263 die dynamische Arbeit des Reibungs- und Adhäsionswiderstandes in einem Zeitelemente gleich:

$$\varrho\, dt \int p\, (\alpha u + \beta u^2)\, u dl = \varrho\, m \Omega u dt \int \frac{p}{\omega}\, (\alpha u + \beta u^2)\, dl$$

setzen, wo p, ω, u Funktionen von l sind, und die Integration in Bezug auf die ganze Länge des Canals stattfindet. Man findet dann den durch den Reibungs- und Adhäsionswiderstand verursachten Höhenverlust gleich:

$$\frac{1}{g} \int \frac{p}{\omega}\, (\alpha u + \beta u^2)\, dl.$$

Es findet diese Formel insbesondere bei offenen Canälen Anwendung, in welchen die Werthe von p, ω und folglich u sowohl wegen der verschieden geformten Querschnitte, wie wegen der verschiedenen Anschwellungen des Wassers in den Canälen, mit l variiren.

Wenn die Bewegung constant geworden ist, wird sie durch die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\varrho V^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) = g\varrho(z - \Sigma h) + P - P' - \varrho \int_0^l \frac{p}{\omega}\, (\alpha u + \beta u^2)\, dl$$

bestimmt, wo O die Oberfläche des Reservoirs, Ω den Flächeninhalt irgend eines Querschnittes, z die Tiefe dieses Querschnittes

unter der Oberfläche des Reservoirs, V die Geschwindigkeit des Wassers senkrecht auf den Querschnitt Ω, Σh die Summe der Druckhöhenverluste der übrigen nicht von der Reibung und Adhäsion des Wassers an den Canalwänden herrührenden Hindernisse gegen die Bewegung, P den Druck der Atmosphäre auf die freie Oberfläche des Reservois und P′ den Druck auf den Querschnitt Ω bezeichnet.

Nimmt man O als unendlich gross in Bezug auf Ω an, und dividirt mit ϱ, so findet man:

$$\tfrac{1}{2} V^2 = g(z - \Sigma h) + \frac{P - P'}{\varrho} - \int_0^l \frac{p}{\omega} (\alpha u + \beta u^2)\, dl.$$

Betrachtet man einen vorhergehenden Querschnitt und bezeichnet durch z_0, V_0, P'_0, l_0, die diesem entsprechenden Werthe von z, V, P′ und l, und nimmt man an, dass die Summe der Druckhöhenverluste Σh bei beiden Querschnitten dieselbe ist, und dass folglich zwischen den beiden Querschnitten keine anderen Hindernisse gegen die Bewegung, als die Reibung und Adhäsion des Wassers an den Canalwänden stattfinden, so wird für diesen Querschnitt:

$$\tfrac{1}{2} V_0^2 = g(z_0 - \Sigma h) + \frac{P - P'_0}{g\varrho} - \int_0^{l_0} \frac{p}{\omega} (\alpha u + \beta u^2)\, dl.$$

Subtrahirt man die zwei vorhergehenden Ausdrücke, so findet man:

$$\tfrac{1}{2} (V^2 - V_0^2) = g(z - z_0) - \frac{P' - P'_0}{\varrho} - \int_{l_0}^{l} \frac{p}{\omega} (\alpha u + \beta u^2)\, dl.$$

Bezeichnet man (Fig. 166) durch ζ_0 und ζ die Höhen der oberen Niveaulinien M und N über einer horizontalen Ebene, durch h_0 und h die Tiefen der Schwerpunkte der beiden Querschnitte m und n unter den entsprechenden oberen Niveaulinien, so ist der

Druck P'_0 auf die Flächeneinheit des ersten Querschnittes gleich $P'_0 = P + g\varrho h_0$, und derjenige des zweiten Querschnittes gleich: $P' = P + g\varrho h$. Es wird folglich:

$$\frac{P'-P'_0}{\varrho} = g(h - h_0),$$

$$g(z - z_0) - \frac{P'-P'_0}{\varrho} = g[(z - z_0) + (h_0 - h)].$$

Es ist aber: $z - z_0 = na$, $h_0 = Mb$, $h = Nc$, folglich: $(z - z_0) + (h_0 - h) = na + Mb - Nc = nd - Nc = AN = (\zeta_0 - \zeta)$, und folglich:

$$g(z - z_0) - \frac{P'-P'_0}{\varrho} = g(\zeta_0 - \zeta).$$

Dies in die vorige Gleichung substituirt, giebt:

$$\tfrac{1}{2}(V^2 - V_0^2) = g(\zeta_0 - \zeta) - \int_{l_0}^{l} \frac{p}{\omega}(\alpha u + \beta u^2)\,dl.$$

Man könnte diese Formel auch leicht direkt entwickeln durch den Satz der lebendigen Kraft. Bezeichnet man nämlich durch dM die Masse der Flüssigkeit, welche im Zeitelemente dt alle Querschnitte des Canals durchströmt, so ist die dynamische Arbeit der Schwere dieser Flüssigkeit gleich: $g(z - z_0)\,dM$. Die dynamische Arbeit des Druckes auf den ersten Querschnitt wird gleich:

$$(P + \varrho h_0)\,\Omega_0 V_0\,dt = \frac{P + \varrho h_0}{\varrho} \,.\, dM.$$

Die dynamische Arbeit des Druckes auf den zweiten Querschnitt wird gleich:

$$-(P + \varrho h)\,\Omega V dt = -\frac{P + \varrho h}{\varrho} \,.\, dM,$$

weil

$$\varrho \Omega_0 V_0 dt = \varrho \Omega V dt = dM.$$

Die Arbeit der Reibung und Adhäsion an den Wänden wird gleich:

$$dM \int_{l_0}^{l} \frac{p}{\omega}(\alpha u + \beta u^2)\,dl.$$

Die lebendige Kraft des durch den ersten Querschnitt zuströmenden Wassers, dessen Masse dM und dessen Geschwindigkeit V_0 ist, wird gleich $\frac{1}{2} V_0^2\, dM$. Die lebendige Kraft des durch den zweiten Querschnitt ausströmenden Wassers wird ebenso gleich: $\frac{1}{2} V^2\, dM$. Die lebendige Kraft des zwischen beiden Querschnitten befindlichen Wassers wird zu Anfang und zu Ende des Zeitelementes gleich, weil wir die Geschwindigkeit des Wassers in jedem Querschnitte als in Bezug auf die Zeit constant angenommen haben. Der Zuwachs der lebendigen Kraft des Wassers wird folglich gleich der Differenz der lebendigen Kraft des ausströmenden und des zuströmenden Wassers, und folglich gleich:

$$\frac{1}{2}(V^2 - V_0^2)\, dM.$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft wird dann:

$$\frac{1}{2}(V^2 - V_0^2)\, dM = g(z - z_0)\, dM + \frac{P + \varrho h_0}{\varrho}\, dM - \frac{P + \varrho h}{\varrho}\, dM$$

$$- dM \int_{l_0}^{l} \frac{p}{\omega}(\alpha u + \beta u^2)\, dl,$$

oder, wenn man mit dM dividirt, wie oben:

$$\frac{1}{2}(V^2 - V_0^2) = g[(z - z_0) + (h_0 - h)] - \int_{l_0}^{l} \frac{p}{\omega}(\alpha u + \beta u^2)\, dl =$$

$$= g(\zeta_0 - \zeta) - \int_{l_0}^{l} \frac{p}{\omega}(\alpha u + \beta u^2)\, dl.$$

Bezeichnet man durch Q die in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt strömende Wassermenge, welche wir, weil hier nur die permanente Bewegung des Wassers betrachtet wird, als constant in Bezug auf die Zeit annehmen, und bezeichnet man durch Ω_0 und Ω die beiden Querschnitte, so wird:

$$Q = V_0 \Omega_0 = V\Omega,\quad V_0 = \frac{Q}{\Omega_0},\quad V = \frac{Q}{\Omega},\quad u = \frac{Q}{\omega}.$$

Bezeichnet man ferner durch $H = \zeta_0 - \zeta$ das Gefälle der Oberfläche, und setzt der Kürze wegen:

$$\int_{l_0}^{l} \frac{p dl}{\omega^2} = M, \quad \int_{l_0}^{l} \frac{p dl}{\omega^3} = N, \quad \frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{\Omega_0^2} = C,$$

so wird die obige Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} Q^2 . C = gH - (\alpha QM + \beta Q^2 N).$$

Hieraus findet man dann:

$$Q^2 (C + 2\beta N) + 2\alpha MQ = 2gH,$$

$$Q = -\frac{\alpha M}{C + 2\beta N} + \sqrt{\frac{2gH}{C + 2\beta N} + \left(\frac{\alpha M}{C + 2\beta N}\right)^2}$$

Die Integrale $\int_{l_0}^{l} \frac{p dl}{\omega^2}$ und $\int_{l_0}^{l} \frac{p dl}{\omega^3}$ können immer durch Approximation bestimmt werden, wenn man die zu mehreren dazwischenliegenden Querschnitten gehörigen Werthe von p und ω kennt. Bezeichnet man durch $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ die Abstände dieser Querschnitte längs des Canals gerechnet, wo:

$$l - l_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n;$$

durch $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n$ die Werthe des Flächeninhalts der Querschnitte, und durch $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ die entsprechenden Werthe der genässten Perimeter, so wird:

$$M = \int_{l_0}^{l} \frac{p dl}{\omega^2} = \frac{p_1 \lambda_1}{\omega_1^2} + \frac{p_2 \lambda_2}{\omega_2^2} + \ldots + \frac{p_n \lambda_n}{\omega_n^2},$$

$$N = \int_{l_0}^{l} \frac{p dl}{\omega^3} = \frac{p_1 \lambda_1}{\omega_1^3} + \frac{p_2 \lambda_2}{\omega_2^3} + \ldots + \frac{p_n \lambda_n}{\omega_n^3},$$

Sind die Abstände $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ alle gleich, so wird: $\lambda = \frac{l - l_0}{n}$

$$M = \frac{l - l_0}{n} \left(\frac{p_1}{\omega_1^2} + \frac{p_2}{\omega_2^2} + \ldots + \frac{p_n}{\omega_n^2}\right); \quad N = \frac{l - l_0}{n} \left(\frac{p_1}{\omega_1^3} + \frac{p_2}{\omega_2^3} + \ldots \frac{p_n}{\omega_n^3}\right).$$

Wenn die Anzahl n der genässten Querschnitte eine ungerade Zahl ist, kann man auch die genauere Simpson'sche Approximationsformeln annehmen:

$$M = \frac{l - l_o}{3n} \left\{ \frac{p_1}{\omega_1^2} + \frac{p_n}{\omega_n^2} + 2\left(\frac{p_3}{\omega_3^2} + \frac{p_5}{\omega_5^2} + \ldots \frac{p_{n-2}}{\omega_{n-2}^2} \right) + 4\left(\frac{p_2}{\omega_2^2} + \frac{p_4}{\omega_4^2} + \ldots \frac{p_{n-1}}{\omega_{n-1}^2} \right) \right\},$$

$$N = \frac{l - l_o}{3n} \left\{ \frac{p_1}{\omega_1^3} + \frac{p_n}{\omega_n^3} + 2\left(\frac{p_3}{\omega_3^3} + \frac{p_5}{\omega_5^3} + \ldots + \frac{p_{n-2}}{\omega_{n-2}^3} \right) + 4\left(\frac{p_2}{\omega_2^2} + \frac{p_4}{\omega_4^2} + \ldots \frac{p_{n-1}}{\omega_{n-1}^2} \right) \right\}.$$

Bei Flüssen und ausgegrabenen Canälen sind die Widerstands-coefficienten etwas grösser als bei Metallröhren. Nach Prony kann man annehmen:

$$\alpha = 0{,}000759, \ \beta = 0{,}003586.$$

Nach Weisbach ist:

$$\alpha = 0{,}000691, \ \beta = 0{,}003705.$$

§. 273.

Ist der Querschnitt des Canals überall derselbe und die Tiefe des Wassers in demselben auch überall gleich, so wird die Geschwindigkeit in allen Querschnitten dieselbe. Die Bewegung des Wassers wird dann gleichförmig genannt. Es wird dann $V = V_o = u$, p und ω constant, und folglich:

$$o = g(\zeta_o - \zeta) - \frac{p}{\omega}(\alpha V + \beta V^2)(l - l_o).$$

Bezeichnet man durch $L = l - l_o$ die Länge der Canalstrecke, wo diese gleichförmige Bewegung stattfindet, durch $H = \zeta_o - \zeta$ das Gefälle auf dieser Strecke, so wird folglich:

$$gH = \frac{pL}{\omega}(\alpha V + \beta V^2),$$

und folglich:

$$\frac{H}{L} = \frac{p}{\omega}\left(\frac{\alpha}{g} V + \frac{\beta}{g} V^2 \right).$$

Ist die in der Zeiteinheit durchströmende Wassermenge Q gegeben, so wird: $V = \frac{Q}{\omega}$, und folglich:

$$\frac{H}{L} = \frac{pQ}{\omega^2}\left(\frac{\alpha}{g} + \frac{\beta}{g} \cdot \frac{Q}{\omega} \right).$$

Das Verhältniss $\frac{H}{L}$ oder das Gefälle auf der Längeneinheit wird die Rösche des Canals genannt. Sie muss constant sein, wenn die Geschwindigkeit constant sein soll.

Aus den obigen Gleichungen findet man wieder:

$$V = -\frac{\alpha}{2\beta} + \sqrt{\frac{gH\omega}{\beta Lp} + \left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2},\ Q = \omega V.$$

Substituirt man hier die von Weisbach angegebenen Werthe von α und β, so findet man:

$$V = -0{,}0933 + 91{,}_9 \sqrt{\frac{H\omega}{Lp} + 0{,}00000103}.$$

Wenn das Gefälle auf der Längeneinheit, und folglich die Geschwindigkeit V nicht sehr klein ist, kann man α in Bezug auf βV vernachlässigen, und findet dann:

$$\frac{H}{L} = \frac{\beta}{g} \cdot \frac{p}{\omega} \cdot V^2,\ V = \sqrt{\frac{g}{\beta} \cdot \frac{H\omega}{pL}},\ Q = \omega V$$

oder:

$$\frac{H}{L} = 0{,}0001184 \cdot \frac{p}{\omega} V^2,\ V = 91{,}_9 \sqrt{\frac{H\omega}{Lp}},\ Q = 91{,}_9 \cdot \omega \sqrt{\frac{H\omega}{Lp}}.$$

Bezeichnet man durch b die Breite des Bodens des Canals, durch θ die Böschung, durch y die Tiefe des Wassers, so wird:

$$\omega = (b + y \operatorname{cotg}\theta) \cdot y,\ p = b + \frac{2y}{\sin\theta}.$$

Diese Werthe substituirt, geben:

$$\frac{H}{L} = \frac{b \sin\theta + 2y}{(b \sin\theta + y \cos\theta) y} \left(\frac{\alpha}{g} V + \frac{\beta}{g} V^2\right);$$

$$V = -\frac{\alpha}{2\beta} + \sqrt{\frac{gH}{\beta L} \frac{(b \sin\theta + y \cos\theta) y}{b \sin\theta + 2y} + \left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2}.$$

Bei rectangulärem Querschnitte ist $\theta = 90°$, folglich:

$$\frac{H}{L} = \frac{b + 2y}{by} \left(\frac{\alpha}{g} V + \frac{\beta}{g} V^2\right);\ V = -\frac{\alpha}{2\beta} + \sqrt{\frac{g}{\beta} \cdot \frac{Hby}{L b + 2y} \left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2}.$$

Die grösste Geschwindigkeit, welche das Wasser erhalten kann, ohne den Boden des Canals anzugreifen, richtet sich nach dessen Beschaffenheit. Damit das Bett nicht angegriffen wird, darf die Geschwindigkeit nicht überschreiten:

bei schlammigem Boden $\frac{1}{4}$ Fuss

bei thonigem Boden $\frac{1}{2}$ -

bei sandigem Boden	1	Fuss
bei kiesigem Boden	2	-
bei grobsteinigem Boden	4	-
bei einem Boden von Conglomerat oder Schiefer . .	5	-
bei einem Boden von geschichtetem Gestein	6	-
bei einem Boden von hartem ungeschichteten Gestein .	10	-

§. 274.

Wir haben bisher die Geschwindigkeit in jedem Querschnitte als überall gleich angesehen. Dies kann auch bei Röhrenleitungen und kleineren Canälen angenommen werden. Bei grösseren Canälen und insbesondere bei Flüssen findet dagegen ein grösserer Unterschied zwischen der Geschwindigkeit an verschiedenen Stellen desselben Querschnittes statt. Die Adhäsion des Wassers an dem Bette, sowie die entstandenen Wirbel bewirken, dass der Widerstand gegen die Bewegung des Wassers hier am grössten ist, und dass daher das Wasser hier langsamer als in der Mitte der freien Oberfläche fliesst. Die grösste Geschwindigkeit befindet sich bei geraden Flussstrecken an derjenigen Stelle in der freien Oberfläche des Wassers, wo es die grösste Tiefe hat. Man nennt diejenige Stelle, wo das Wasser die grösste Geschwindigkeit hat, den Stromstrich, und die tiefste Stelle im Bette die Stromrinne.

Von der Oberfläche ab nimmt die Geschwindigkeit in jeder Vertikalen ab, und ebenso an der Oberfläche zu beiden Seiten des Stromstriches. Beobachtungen haben gezeigt, dass in derselben Vertikalen die Geschwindigkeit ziemlich nahe den Ordinaten einer Ellipse gleich sind, deren kleinere halbe Axe in der Oberfläche des Wassers liegt, und der Geschwindigkeit an der Oberfläche gleich ist, und deren grössere halbe Axe längs der gegebenen Vertikalen fällt und ohngefähr anderthalbmal so gross wie die Tiefe des Wassers ist. Bezeichnet man durch z die Tiefe, durch U die Geschwindigkeit an der Oberfläche, so wird hiernach die Geschwindigkeit an dem Boden gleich: $\frac{U\sqrt{5}}{3} = 0{,}745U$ sein, und die

mittlere Geschwindigkeit gleich: $\frac{U}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{3}{2}\cos\left(\sin=\frac{2}{3}\right)\right)$ $= 0{,}92\,U$. Direkte Beobachtungen über die Ausflussmenge geben die mittlere Geschwindigkeit zwischen 0,83 und 0,96 Mal der Geschwindigkeit an der Oberfläche. Bei grösseren Flüssen kann man diesen Coefficienten gleich 0,9 annehmen.

Betrachtet man die verschiedenen Vertikalen zu beiden Seiten des Stromstriches, so nimmt auch hier die Geschwindigkeit an der Oberfläche und folglich auch die jeder Vertikalen entsprechende mittlere Geschwindigkeit zu beiden Seiten ab. Die mittlere Geschwindigkeit des ganzen Querschnittes wird daher in ein noch kleineres Verhältniss zur Geschwindigkeit im Stromstriche stehen. Bezeichnet man durch U die grösste Geschwindigkeit des Wassers in dem Stromstriche, durch V die mittlere Geschwindigkeit des ganzen Querschnittes: so wird man durchschnittlich:

$$V = 0{,}85\,U$$

annehmen können.

Bei der Anwendung der vorhergehenden Formeln auf die Bewegung des Wassers in grösseren Canälen und Flüssen ist überall als die Geschwindigkeit des Querschnittes diese mittlere Geschwindigkeit anzunehmen.

Das Luftprofil bildet nicht genau eine horizontale gerade, sondern eine schwach convexe Linie. Weil die Geschwindigkeit in den verschiedenen auf dem Querschnitte senkrechten Wasserfäden verschieden sind, so üben sie auch verschiedene Drucke gegen einander aus; die schnelleren Wasserfäden kleinere, die langsamer gehenden grössere Drucke. Bezeichnet man durch U die Geschwindigkeit im Stromstriche, durch U_o die Geschwindigkeit an dem Ufer, durch h den Höhenunterschied, so wird:

$$h = \frac{U^2}{2g} - \frac{U_o^2}{2g}.$$

Nimmt man $U_o = 0{,}75\,U$ an, so wird:

$$h = \frac{U^2}{2g}\left(1 - (0{,}75)^2\right) = 0{,}44\,\frac{U^2}{2g} = 0{,}014\,U^2$$

§. 275.

Die Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen wird **ungleichförmig** genannt, wenn die Geschwindigkeit in den verschiedenen Querschnitten verschieden ist. Es ist dann auch der Reibungswiderstand des Flussbettes verschieden.

Nimmt man in §. 272 die beiden Querschnitte als sehr nahe an einander an, oder differentiirt man die Gleichung:

$$\frac{1}{2}(V^2 - V_0^2) = g(\zeta_0 - \zeta) - \int_{l_0}^{l} \frac{p}{\omega}(\alpha u + \beta u^2)\, dl,$$

so findet man:

$$VdV = -g d\zeta - \frac{p}{\omega}(\alpha u + \beta u^2)\, dl.$$

Es stelle Fig. 167 einen Längendurchschnitt des Canals vor. Es sei AB ein Durchschnitt des Flussbettes nach der Stromrinne, EF der Längendurchschnitt des Wasserniveaus, φ der Winkel, welchen die Tangente der Bodenlinie in M′ mit dem Horizonte bildet, welcher Winkel der **Abhang des Flussbettes** genannt wird, y = MM′ die Höhe des Wasserniveaus über der Bodenlinie, normal auf diese gerechnet. Es sei NN′ ein zweiter naheliegender Querschnitt, Ma durch M parallel mit der Tangente M′C des Punktes M′ der Bodenlinie gezogen, Nb horizontal durch N gezogen, und ac horizontal durch a. Es ist alsdann:

$$Mb = -d\zeta,\ Ma = dl,\ aN = dy.$$

Es ist ferner:

$$Mb = Mc - bc = Ma \sin\varphi - Na \cos\varphi, \text{ oder:}$$

$$-d\zeta = \sin\varphi\, dl - \cos\varphi\, dy.$$

Diese Werthe in der obigen Differentialgleichung substituirt, geben:

$$VdV = g \sin\varphi\, dl - g \cos\varphi\, dy - \frac{p}{\omega}(\alpha V + \beta V^2)\, dl.$$

Bezeichnet man durch Q die in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt strömende Wassermenge, welche wir, weil wir hier nur

die stetige Bewegung des Wassers betrachten, als constant in Bezug auf die Zeit annehmen, so wird:

$$Q = V\omega,\ V = \frac{Q}{\omega},\ dV = -\frac{Qd\omega}{\omega^2} = -\frac{Vd\omega}{\omega},$$

$$VdV = -\frac{Q^2d\omega}{\omega^3} = -\frac{V^2d\omega}{\omega}.$$

Diese Werthe substituirt, geben die Gleichung:

$$-V^2\frac{d\omega}{\omega} = g\sin\varphi\, dl - g\cos\varphi\, dy - \frac{p}{\omega}(\alpha V + \beta V^2)\, dl,$$

oder:

$$-Q^2\frac{d\omega}{\omega^3} = g\sin\varphi\, dl - g\cos\varphi\, dy - \frac{p}{\omega}\left(\frac{\alpha Q}{\omega} + \frac{\beta Q^2}{\omega^2}\right)dl.$$

Hieraus findet man dann:

$$dl = \frac{\frac{V^2}{\omega}\cdot d\omega - g\cos\varphi\, dy}{\frac{p}{\omega}(\alpha V + \beta V^2) - g\sin\varphi} = \frac{\frac{Q^2}{\omega^3}\, d\omega - g\cos\varphi\, dy}{\frac{p}{\omega}\left(\frac{\alpha Q}{\omega} + \frac{\beta Q^2}{\omega^2}\right) - g\sin\varphi}.$$

Der Abhang des Flussbettes φ ist immer sehr klein. Man kann daher $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = \varphi$ setzen, wodurch:

$$dl = \frac{V^2d\omega - g\omega dy}{p(\alpha V + \beta V^2) - g\omega\varphi} = \frac{Q^2d\omega - g\omega^3dy}{p(\alpha\omega Q + \beta Q^2) - g\omega^3\varphi}.$$

Kennt man auf einer gegebenen Strecke des Canals oder Flusses die Werthe von p, ω, φ als Funktionen der Wassertiefe y, so kann man hieraus l als Funktion von y finden, und folglich auch umgekehrt die Tiefe des Wassers y durch l bestimmen.

Im Allgemeinen kennt man aber die allgemeine Form dieser Funktionen nicht. Man muss sie dann für naheliegende Querschnitte nach und nach berechnen.

Bezeichnet man durch x die Breite des Luftprofils, so wird: $d\omega = xdy$, und folglich:

$$dl = \left\{\frac{Q^2x - g\omega^3}{pQ(\alpha\omega + \beta Q) - g\omega^3.\varphi}\right\}dy.$$

Bezeichnet man durch ψ den Winkel, welchen das Niveau des Wassers mit dem Boden bildet, und nimmt diesen Winkel als positiv an, wenn die Tiefe des Wassers wächst, so wird:

$$\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang} NMa = \frac{Na}{Ma} = \frac{dy}{dl},$$

und folglich:

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{pQ(\alpha\omega + \beta Q) - g\omega^3\varphi}{Q^2x - g\omega^3} = \frac{p(\alpha V + \beta V^2) - g\omega\varphi}{V^2x - g\omega}.$$

Durch diese Gleichung kann man die Neigung der Oberfläche gegen den Boden von einem Querschnitte zu einem nahe gelegenen berechnen, und dadurch den Längendurchschnitt des Wasserniveaus im Canal oder Fluss annäherungsweise durch ein Polygon mit vielen kleinen Seiten bestimmen.

Ist die Geschwindigkeit des Wassers nicht sehr klein, so kann man αV in Bezug auf βV^2 vernachlässigen, und findet dann:

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\beta p V^2 - g\omega\varphi}{V^2x - g\omega} = \frac{2\beta\frac{p}{\omega}\cdot\frac{V^2}{2g} - \varphi}{2\frac{x}{\omega}\cdot\frac{V^2}{2g} - 1}.$$

§. 276.

Der Winkel, welchen die Oberfläche des Wassers mit dem Horizonte bildet, wird gleich $\varphi - \psi$. Wenn dieser Winkel positiv ist, wird die Oberfläche sich in der Richtung der Bewegung gegen den Horizont neigen; wenn er negativ ist, wird die Oberfläche in der Richtung der Bewegung höher steigen. Da der Winkel ψ ebenso wie φ immer sehr klein ist, so kann man tang ψ gleich ψ setzen und findet alsdann:

$$\varphi - \psi = \varphi = \frac{p(\alpha V + \beta V^2) - g\omega\varphi}{V^2x - g\omega} = \frac{V^2x\varphi - p(\alpha V + \beta V^2)}{V^2x - g\omega}$$

$$= \frac{\frac{V^2}{2g}\left(\frac{2(x\varphi - \beta p)}{\omega} - \frac{2\alpha p}{\omega}\cdot\frac{1}{V}\right)}{\frac{V^2}{2g}\cdot\frac{2x}{\omega} - 1}.$$

Bezeichnet man durch $H = \frac{V^2}{2g}$ die der Geschwindigkeit V entsprechende Druckhöhe, so wird:

$$\varphi - \psi = \frac{2H\left(\frac{x\varphi - \beta p}{\omega} - \frac{\alpha p}{\omega}\cdot\frac{1}{\sqrt{2gH}}\right)}{\frac{2xH}{\omega} - 1}.$$

Damit keine Anschwellung des Wassers stattfinde, muss diese Grösse positiv sein. Dies ist bei dem Eintritt des Wassers in einen Canal zu berücksichtigen, damit keine Anschwellung des Wassers im Canal dem freien Ausfluss aus dem Reservoir hindernd entgegentrete.

Findet z. B. der Eintritt des Wassers durch eine rectanguläre Oeffnung mit Druck auf der Oberkante statt, und bilden der Boden und die Wände des Canals eine Fortsetzung der Seiten dieser Oeffnung, so ist in der obigen Formel H gleich der Druckhöhe des Wassers im Reservoir, x constant gleich der Breite b der Oeffnung, y gleich deren Höhe h, und φ gleich dem Neigungswinkel des Canals. Es wird dann: $\omega = bh$, $p = b + 2h$, und folglich:

$$\varphi - \psi = \frac{2H\left(\frac{b\varphi - \beta(b + 2h)}{bh} - \frac{\alpha(b + 2h)}{bh} \cdot \frac{1}{\sqrt{2gH}}\right)}{\frac{2}{h} \cdot H - 1}.$$

Damit jetzt keine den freien Ausfluss hindernde Anschwellung des Wassers im Canal gleich vor der Mündung stattfinden soll, muss dieser Werth positiv sein. Es ist aber, weil auf der oberen Kante der Oeffnung Druck stattfindet: $H > \frac{h}{2}$, folglich $\frac{2}{h}H > 1$, oder der Nenner positiv; es muss folglich auch der Zähler positiv sein, oder:

$$\frac{b\varphi - \beta(b + 2h)}{bh} - \frac{\alpha(b + 2h)}{bh} \cdot \frac{1}{\sqrt{2gH}} > 0$$

sein, woraus:

$$\varphi > \left(\frac{(b + 2h)}{b}\right)\left(\beta + \frac{\alpha}{\sqrt{2gH}}\right).$$

Ist die Druckhöhe H nicht sehr klein, so kann man $\frac{\alpha}{\sqrt{2gH}}$ in Bezug auf β vernachlässigen und findet dann:

$$\varphi > \beta \cdot \frac{b + 2h}{b}, \text{ oder: } \varphi > 0{,}0037 \cdot \left(1 + \frac{2h}{b}\right).$$

§. 277.

Um bei einem rechtwinkligen Canal die Verbindung zwischen der Länge l und der Geschwindigkeit V zu finden, muss man in der früheren Differentialgleichung:

$$VdV = g \sin\varphi dl - g \cos\varphi dy - \frac{p}{\omega}(\alpha V + \beta V^2) dl,$$

$$\omega = \frac{Q}{V}, \quad y = \frac{\omega}{b} = \frac{Q}{bV}, \quad dy = -\frac{QdV}{bV^2}, \quad p = b + 2g = b + \frac{2Q}{bU}$$

setzen. Setzt man zugleich wie früher $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = \varphi$, so findet man:

$$VdV = \left(g\varphi - \frac{pV}{Q}(\alpha V + \beta V^2)\right)dl + \frac{gQ}{bV^2}dV,$$

woraus:

$$dl = \frac{Q(gQ - bV^3)}{pV(\alpha V + \beta V^2) - gQ\varphi} dV = \frac{Q(gQ - bV^3)}{\left(bV + \frac{2Q}{b}\right)(\alpha V + \beta V^2) - gQ\varphi} dV.$$

Ist die Wassermenge Q und die ursprüngliche Geschwindigkeit gegeben, so kann man durch Hülfe dieser Gleichung durch Approximation den Werth der Endgeschwindigkeit finden. Bezeichnet man durch V_0 die ursprüngliche Geschwindigkeit, durch $V_0 + \Delta V_1$, $V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2$, ... die zu den Canallängen $\frac{l}{n}$, $\frac{2l}{n}$ gehörigen Geschwindigkeiten, und setzt der Kürze wegen:

$$\frac{Q(gQ - bV^3)}{\left(bV + \frac{2Q}{b}\right)(\alpha V + \beta V^2) - gQ\varphi} = F(V),$$

so wird:

$$\Delta V_1 = \frac{l}{nF(V_0)}, \quad \Delta V_2 = \frac{l}{nF(V_0 + \Delta V_1)}, \quad \Delta V_3 = \frac{l}{nF(V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2)} \text{ u. s. w.},$$

und hieraus die Endgeschwindigkeit des Wassers:

$$V = V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \cdots \Delta V_n.$$

§. 278.

Wenn Flüsse oder Canäle ihren Wasserstand ändern, so treten auch Geschwindigkeitsänderungen und Veränderungen in der

Wassermenge ein. Einem höheren Wasserstand entspricht nämlich sowohl ein grösserer Querschnitt, wie auch eine grössere Geschwindigkeit und folglich aus doppelten Gründen eine grössere Wassermenge.

Nach §. 263 hat man bei der gleichförmigen Bewegung in einem Canal:

$$Q = -\frac{\alpha\omega}{2\beta} + \omega\sqrt{\frac{gH\omega}{\beta Lp} + \left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2},$$

oder, wenn das Gefälle auf der Längeneinheit, $\frac{H}{L}$, und folglich die Geschwindigkeit nicht sehr klein ist:

$$Q = \omega\sqrt{\frac{gH\omega}{\beta Lp}} = \sqrt{\frac{gH\omega^3}{\beta Lp}},$$

Hieraus findet man durch Differentiation:

$$dQ = \sqrt{\frac{gH}{\beta L}} \cdot \frac{3p\omega^2 d\omega - \omega^3 dp}{2p^2\sqrt{\frac{\omega^3}{p}}} = \sqrt{\frac{gH\omega^3}{\beta Lp}} \left\{\frac{3pd\omega - \omega dp}{2p\omega}\right\} =$$

$$= Q\left(\frac{3}{2}\frac{d\omega}{\omega} - \frac{1}{2}\frac{dp}{p}\right).$$

Betrachtet man einen Canal, und bezeichnet durch b die Breite des Bodens, durch n die Böschung, durch h die Tiefe des Wassers im Canal, so ist:

$$\omega = (b + hn)h,\ p = b + 2h\sqrt{1+n^2},$$

und folglich:

$$d\omega = (b + 2hn)\,dh = \left(\frac{2\omega}{h} - b\right)dh,\ dp = 2\sqrt{1+n^2}\,dh = \frac{p-b}{h}\,dh,$$

$$\frac{d\omega}{\omega} = \left(\frac{2}{h} - \frac{b}{\omega}\right)dh,\ \frac{dp}{p} = \left(\frac{1}{h} - \frac{b}{ph}\right)dh.$$

Diese Werthe substituirt geben:

$$dQ = Q\left(\frac{5}{2h} - \frac{3b}{2\omega} + \frac{b}{2ph}\right)dh,$$

durch welche Formel der einem gegebenen Zuwachs der Tiefe des Wassers entsprechende Zuwachs der Wassermenge bestimmt ist. Umgekehrt wird der durch einen gegebenen Zuwachs der Wassermenge hervorgebrachte Zuwachs der Tiefe des Wassers durch die Formel:

$$dh = \frac{dQ}{Q} \cdot \frac{1}{\frac{5}{2h} - \frac{3b}{2\omega} + \frac{b}{2ph}} = \frac{dQ}{Q} \cdot \frac{5p\omega - 3bph + b\omega}{2p\omega h},$$

bestimmt.

Betrachtet man einen Fluss und bezeichnet durch x dessen Breite an der Oberfläche des Wassers, durch n die Böschung des einen, durch n′ diejenige des zweiten Ufers, so wird:

$$d\omega = x dh,\ dp = (\sqrt{1+n^2} + \sqrt{1+n'^2})\, dh,$$

und folglich:

$$dQ = Q \left\{ \frac{3x}{2\omega} - \frac{\sqrt{1+n^2} + \sqrt{1+n'^2}}{2p} \right\} dh,$$

$$dh = \frac{dQ}{Q} \cdot \frac{2p\omega}{3px - \omega(\sqrt{1+n^2} + \sqrt{1+n'^2})}$$

§. 279.

Um die Flüsse zum Betriebe von Maschinen benutzen zu können, oder um ihnen der Schifffahrt wegen eine grössere Tiefe zu geben, ist es oft nöthig, das Wasser durch quer über den Fluss weggehende Dämme oder Wehre aufzustauen. Man bezeichnet diese Wehre als Ueberfallswehre, oder Ueberfälle, wenn das Wasser frei über deren höchste Schwelle wegfliessen kann, dagegen als Durchlass- oder Schleussenwehre, wenn es durch eine in dem Damm angebrachte Oeffnung ausfliesst.

Bei grösseren Flüssen und Strömen wendet man oft Dämme an, welche nicht über die ganze Breite des Wassers weggehen. Es werden diese lichte Wehre genannt. Brückenpfeiler und andere das Querprofil eines fliessenden Wassers verengende Einbaue sind ebenfalls als lichte Wehre anzusehen.

Durch alle diese Einbaue erleidet das fliessende Wasser eine Stauung, oder Erhöhung seines Wasserprofils, und eine damit nothwendiger Weise verbundene Geschwindigkeitsverminderung. Die Höhe des aufgestauten Wassers über dem ursprünglichen Wasserspiegel unmittelbar vor dem Wehre wird die Stauhöhe genannt. Die Längenerstreckung des Aufstauens, vom Wehre aus aufwärts gemessen, wird die Stauweite genannt.

Die Kenntniss dieser Verhältnisse ist nicht allein deshalb nothwendig, weil durch zu grosse oder zu weit sich erstreckende Stauungen Ueberschwemmungen herbeigeführt werden können, sondern auch weil durch dieselben die an dem fliessenden Wasser aufwärts liegenden Gefälle dadurch vermindert werden, und die von ihnen getriebenen Maschinen in ihrem Gange gestört werden können.

Die Ueberfallswehre werden vollkommene genannt, wenn die Ueberfallschwelle über der Oberfläche des Unterwassers liegt, und folglich ein freier Ausfluss stattfindet (Fig. 168). Sie werden unvollkommene genannt, wenn die Ueberfallschwelle unter dem Spiegel des abfliessenden Wassers liegt.

Die Stauhöhe kann in jedem Falle leicht nach den vorher gegebenen Formeln berechnet werden, wenn die Ausflussmenge gegeben ist.

§. 280.

Es bilde das Wehr einen Ueberfall (Fig. 168 und 169). Bezeichnet man durch a die Höhe des Wehrs, KG, durch h die ursprüngliche Tiefe, FG, des Wassers, durch H die Höhe des Ueberfalles BK, so wird die Stauhöhe, welche wir durch z bezeichnen wollen, gleich:

$$z = a + H - h.$$

Bezeichnet man ferner durch u die Geschwindigkeit des ankommenden Wassers, durch $k = \frac{u^2}{2g}$ die dieser Geschwindigkeit entsprechende Druckhöhe, so findet man bei einem vollkommenen Ueberfalle (Fig. 168) die mittlere Druckhöhe durch die Formel:

$$\zeta = \frac{4}{9}\left(\frac{C_{,}^{\frac{3}{2}} - C^{\frac{3}{2}}}{C_{,} - C}\right)^2,$$

wo C gleich der der Geschwindigkeit des ankommenden Wassers entsprechenden Druckhöhe k, und $C_{,}$ gleich H + k ist. Es wird folglich:

$$\zeta = \frac{4}{9}\left[\frac{(H+k)^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{3}{2}}}{H}\right]^2.$$

Hieraus findet man die Wassermenge Q, wenn man durch b die Breite des Wehrs bezeichnet:

$$Q = mbH\sqrt{2g\zeta} = \frac{2}{3}\, m\sqrt{2g}\left[(H+k)^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{3}{2}}\right].$$

Der Coefficient m muss hier nach §. 255 gleich 0,665 gesetzt werden, weil hier die Breite des Ueberfalls gleich der Breite des Canals ist.

Aus der obigen Formel findet man wieder:

$$H = \left(\frac{Q}{\frac{2}{3}\, mb\sqrt{2g}} + k^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} - k,$$

oder, wenn man die Werthe von m und g substituirt:

$$H = \left(0{,}285 \,.\, \frac{Q}{b} + k^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} - k,$$

und die Stauhöhe:

$$z = a + H - h = a - h - k + \left(0{,}285 \,.\, \frac{Q}{b} + k^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Ist das Wehr sehr hoch, so wird die Geschwindigkeit des ankommenden Wassers und folglich die dieser entsprechende Druckhöhe sehr klein. Vernachlässigt man k, so findet man die Stauhöhe:

$$z = a - h + \left(0{,}285 \,.\, \frac{Q}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = a - h + 0{,}433 \,.\, \left(\frac{Q}{b}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Bei einem unvollkommenen Ueberfalle (Fig. 169) muss man besonders die durch BF und die durch FK durchfliessenden Wassermengen berechnen. Es ist hier: BF = z, FK = h — a. Die durch BF in der Zeiteinheit durchfliessende Wassermenge wird folglich gleich:

$$\tfrac{2}{3}\, mb\sqrt{2g}\left((z+k)^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{3}{2}}\right).$$

Die durch die untergetauchte Oeffnung FK durchfliessende Wassermenge wird gleich:

$$m'b\,(h - a)\sqrt{2g\,(z+k)}.$$

Die Coefficienten m und m′ können hier beide gleich 0,665 angenommen werden. Die ganze durchströmende Wassermenge wird folglich gleich:

$$Q = mb\sqrt{2g}\left[\tfrac{2}{3}\left((z+k)^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{3}{2}}\right) + (h - a)\sqrt{z+k}\right].$$

Aus dieser Gleichung kann alsdann die Stauhöhe z gefunden werden.

Die Geschwindigkeit u des ankommenden Wassers und die dieser entsprechende Druckhöhe k kann erst durch die Stauhöhe h bestimmt werden. Bezeichnet ω den Inhalt des ursprünglichen Wasserprofils, so ist der Inhalt des aufgestauten Profils nahe gleich: $\omega + bz$, wenn die Breite b sich nicht sehr rasch mit der Stauhöhe ändert. Es wird alsdann die mittlere Geschwindigkeit u des ankommenden Wassers gleich:

$$u = \frac{Q}{\omega + bz};\ k = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{\omega + bz}\right)^2.$$

Dieser Werth von k muss dann in der vorhergehenden Gleichung substituirt und daraus z durch Approximation gesucht werden.

§. 281.

Bei einem Durchlasswehre können drei Fälle vorkommen. Es fliesst entweder das Wasser frei aus (Fig. 170), oder es fliesst unter Wasser (Fig. 171), oder es fliesst theils frei, theils unter Wasser.

Bei freiem Ausfluss (Fig. 170) wird, wenn b die Breite, c die Höhe der Ausflussöffnung bezeichnet:

$$Q = mbc\sqrt{2g(H + k)},$$

woraus:

$$H = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{mbc}\right)^2 - k.$$

Die Stauhöhe BF = BK + KG — FG wird, wenn KG = a gesetzt wird:

$$z = H + a - h = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{mbc}\right)^2 - k + a - h.$$

Bei einer untergetauchten Oeffnung (Fig. 171) wird:

$$Q = mbc\sqrt{2g(BF + k)} = mbc\sqrt{2g(z + k)},$$

$$z = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{mbc}\right)^2 - k.$$

Wenn endlich das Niveau des Unterwassers innerhalb der Mündung liegt, wie in Fig. 172, so wird die Ausflussmenge durch LF, wenn LF = c′ gesetzt wird:

$$mbc'\sqrt{2g(z - \frac{c'}{2} + k)},$$

und die Ausflussmenge durch FM, wenn FM = c″, gleich:

$$mbc''\sqrt{2g(z + k)}.$$

Es wird folglich die ganze Ausflussmenge gleich:

$$Q = mb\left\{c'\sqrt{2g(z - \frac{c'}{2} + k)} + c''\sqrt{2g(z + k)}\right\}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit u des ankommenden Wassers wird hier ebenso wie im vorigen Paragraphen gleich: $\frac{Q}{\omega + Bz}$, wenn B die Breite des ganzen Wehrs bezeichnet. Es wird folglich:

$$k = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{\omega + Bz}\right)^2.$$

Dieser Werth muss dann in den vorhergehenden Gleichungen substituirt und daraus die Stauhöhe z durch Approximation gesucht werden.

Ist umgekehrt die Stauhöhe z gegeben, so kann aus diesen Gleichungen die zu einer gegebenen Wassermenge nöthige Oeffnung bc gefunden werden.

§. 282.

Die Stauhöhe bei lichten Wehren ist ebenso zu ermitteln, wie bei unvollkommenen Ueberfällen. Bezeichnet man durch b die Breite zwischen den Wehren, durch FG = h die ursprüngliche Tiefe des Wassers, durch BF = z die Stauhöhe, durch u die mittlere Geschwindigkeit des ankommenden Wassers, durch $k = \frac{u^2}{2g}$ die hierzu gehörige Druckhöhe, so wird folglich:

$$Q = mb\sqrt{2g}\left\{\frac{2}{3}\left((z + k)^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{3}{2}}\right) + h\sqrt{z + k}\right\}.$$

Bezeichnet man durch B die mittlere Breite des Bettes vor der Verengung, durch ω den Querschnitt des Bettes vor dem Aufstauen, so wird:

$$u = \frac{Q}{\omega + Bz},\ k = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{\omega + bz}\right)^2.$$

Dieser Werth von k muss dann in der obigen Gleichung substituirt und die Stauhöhe z daraus durch Approximation gefunden werden.

Wegen der grösseren Geschwindigkeit, welche das Wasser zwischen den lichten Wehren, z. B. zwischen den Brückenpfeilern, haben wird, und welche es eine kurze Strecke nach dem Durchgang behält, wird hinter der Verengung noch eine zweite Aufstauung stattfinden, wie sie in Fig. 173 dargestellt ist.

Die Geschwindigkeit in der Verengung wird nicht, wie bei der freien Bewegung des Wassers in Canälen oder Flüssen, an der Oberfläche des Wassers am grössten sein, sondern dieses Maximum wird etwas tiefer, etwa in der Höhe des Unterwassers, stattfinden. Sowohl deswegen, wie wegen der kleineren Tiefe des Wassers gleich nach der Verengung und des hieraus in der Verengung stattfindenden grösseren Gefälles des Wassers, und wegen der nachherfolgenden zweiten Aufstauung wird nach der Verengung ein starker Wirbel mit horizontaler Axe gebildet werden, welcher den Boden des Bettes hier stark angreifen wird.

Um die Stauweite und die Stauhöhe des Wassers in verschiedenen Abständen oberhalb des Wehrs berechnen zu können, hat man die in §. 275 entwickelte Theorie der ungleichförmigen Bewegung des Wassers angewendet.

Bezeichnet man durch l den Abstand irgend eines Querschnittes oberhalb des Wehrs und sonst wie vorher, durch ω den Inhalt des Wasserprofils, durch x die Breite dieses Profils an der Oberfläche, durch p den genässten Perimeter, durch y die Tiefe, und durch φ den Abhang des Flussbettes an dieser Stelle, so wird, nach §. 275, wenn man das Zeichen von l, welches jetzt als positiv aufwärts gerechnet wird, ändert:

$$dy = dl \left[\frac{pQ(\alpha\omega + \beta Q) - g\omega^3\varphi}{g\omega^3 - Q^2x}\right].$$

Bezeichnen wir der Kürze wegen durch M diesen Coefficienten von dl:

$$M = \frac{pQ(\alpha\omega + \beta Q) - g\omega^2\varphi}{g\omega^3 - Q^2x} = \frac{p\omega^2(\alpha u + \beta u^2) - g\omega^3\varphi}{g\omega^3 - u^2\omega^2x} =$$

$$= \frac{\frac{p}{g\omega}(\alpha u + \beta u^2) - \varphi}{1 - \frac{u^2}{2g} \cdot \frac{2x}{\omega}},$$

so wird: $dy = M dl$.

Es sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden, wenn der Werth von M auf irgend einer Stelle der Aufstauung unendlich gross wird, oder wenn dieses nicht der Fall ist. Wenn M nirgends auf der zu betrachtenden Canalstrecke einen unendlich grossen Werth erhält, so kann die obige Differentialgleichung des Längendurchschnitts durch Approximation integrirt werden. Bezeichnet man durch y_0 die Tiefe des Wassers vor dem Wehre, durch y_1, y_2, y_3, ... die Tiefen in den Abständen λ_1, $\lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, ... oberhalb des Wehrs, durch M_0 den $y = y_0$ entsprechenden Werth von M, durch M_1, M_2, M_3, ... die Werthe derselben Grösse in den Abständen λ_1, $\lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, ... so wird man für kleine Werthe von λ_1, λ_2, λ_3, ... annehmen können:

$$y_1 - y_0 = \frac{\lambda_1}{2}(M_0 + M_1),\ y_2 - y_1 = \frac{\lambda_2}{2}(M_1 + M_2),$$

$$y_3 - y_2 = \frac{\lambda_3}{2}(M_2 + M_3), \text{ u. s. w.}$$

Hieraus findet man dann die auf einander folgenden Tiefen:

$$y_1 = y_0 + \frac{\lambda_1}{2}(M_0 + M_1),\ y_2 = y_0 + \frac{\lambda_1}{2}(M_0 + M_1) + \frac{\lambda_2}{2}(M_1 + M_2)$$

u. s. w.

Es kann hier freilich M_1 erst wenn die Tiefe y_1 gegeben ist, gefunden werden, M_2 hängt von y_2 ab u. s. w. Die obigen Werthe von y_1, y_2, ... müssen daher erst annäherungsweise gesucht werden, indem man zuerst $M_1 = M_0$, $M_2 = M_1$ u. s. w. annimmt, hieraus einen angenäherten Werth von y_1, y_2, ... berechnet, dann einen genaueren Werth von M_1, M_2, u. s. w.

Die nach dieser Theorie der ungleichförmigen Bewegung des

Wassers hergeleiteten Werthe der Tiefen, und hieraus der Stauhöhen, welche verschiedenen Abständen oberhalb des Wehrs entsprechen, sind indessen, besonders was die ersten Stauhöhen vor dem Wehre anbetrifft, kleiner als die durch Beobachtung gefundenen Werthe, welche genauer mit den Beobachtungen übereinstimmen, giebt eine von Sanct Guilhem aufgestellte empirische Formel bei constant angenommenem Abhang des Flussbettes:

$$(z + l\varphi)^3 = \frac{z_0^3}{z_0^3 + \frac{4}{9}(l\varphi)^3} + (l\varphi)^3,$$

wo z_0 die an dem Wehre, z die in dem Abstand l oberhalb desselben stattfindende Aufstauung bezeichnet.

Der Längendurchschnitt der Aufstauung wird folglich eine krumme Linie BH bilden (Fig. 168), deren Asymptote die ursprüngliche nicht aufgestaute Oberfläche des Wassers bildet.

§. 284.

Die obigen, aus der Theorie der ungleichförmigen Bewegung des Wassers hergeleiteten Annäherungswerthe der Stauhöhen können nicht angewendet werden, wenn für irgend einen Querschnitt M unendlich gross wird. Es wird dies eintreffen, sobald der Nenner: $1 - \frac{u^2}{2g} \cdot \frac{2x}{\omega} = 0$ wird, und folglich: $\frac{u^2}{2g} = \frac{\omega}{2x}$, oder die der Geschwindigkeit u entsprechende Druckhöhe gleich der mittleren Tiefe $\frac{\omega}{x}$ des Wassers ist.

Wenn jetzt oberhalb der Aufstauung $\frac{u^2}{2g} > \frac{\omega}{2x}$, und folglich der Nenner des Verhältnisses M negativ ist, dagegen vor dem Wehre, wenn wir hier die Geschwindigkeit des Wassers durch u_0 bezeichnen: $\frac{u_0^2}{2g} < \frac{\omega_0}{2x_0}$, und folglich der Nenner dieses Verhältnisses positiv, so wird, weil die Geschwindigkeit des Wassers von u bis u_0 abnimmt, während die mittlere Tiefe von $\frac{\omega}{2x}$ bis $\frac{\omega_0}{2x_0}$ zunimmt,

nothwendiger Weise während dieser Aenderung irgendwo $\frac{u^2}{2g}$ gleich $\frac{\omega}{2x}$ und folglich M unendlich gross werden müssen. Es wird alsdann $\frac{dy}{dl} = \infty$, und folglich die Tangente der Oberfläche in diesem Punkte vertikal.

In diesem Falle wird folglich das Wasser einen Sprung bilden müssen, wie es in der Fig. 174 dargestellt ist. Die Oberfläche CB ist alsdann beinahe horizontal.

Die Höhe CE = s des Sprunges findet man, wenn man durch u die Geschwindigkeit des ankommenden Wassers vor dem Sprunge, durch u' dessen Geschwindigkeit nach dem Sprunge bezeichnet, gleich:

$$s = \frac{u^2}{2g} - \frac{u'^2}{2g},$$

weil man für diese kurze Strecke die Reibung vernachlässigen kann. Bezeichnet man durch ω den Inhalt des Querschnittes AB vor dem Sprunge, durch x dessen Breite an der Oberfläche, so wird der Inhalt des Querschnittes CD annäherungsweise gleich: $\omega + sx$. Es wird alsdann: $\omega u = (\omega + sx)u'$, und hieraus:

$$u' = \frac{\omega}{\omega + sx} \cdot u.$$

Dieser Werth substituirt giebt:

$$s = \frac{u^2}{2g}\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega + sx}\right)^2\right),$$

woraus:

$$s = \tfrac{1}{2}\frac{u^2}{2g} - \frac{\omega}{x} + \sqrt{\frac{u^2}{2g}\left(\tfrac{1}{4}\cdot\frac{u^2}{2g} + \frac{\omega}{x}\right)}.$$

Um die Stauweite EF zu finden, sucht man erst nach den in §. 280 gegebenen Regeln die Stauhöhe BF = z. Hieraus findet man dann EF durch die Proportion:

$$EF : BF - CE = NF : BF,$$

oder:

$$EF : z - s = 1 : \varphi,$$

woraus die Stauweite: $EF = \frac{z - s}{\varphi}$ gefunden wird.

Wenn die Geschwindigkeit u des ankommenden Wassers durch eine gleichförmige Bewegung auf dem oberen Theile des Canals oder Flusses erreicht worden ist, so wird nach §. 273 für grössere Geschwindigkeiten:

$$u = \sqrt{\frac{g}{\beta} \cdot \frac{H\omega}{Lp}} = \sqrt{\frac{g}{\beta} \cdot \frac{\varphi'\omega}{p}},$$

wenn φ' den Abhang des Bettes bis hieher, ω den constanten Querschnitt und p den genässten Perimeter bezeichnet. Man findet hieraus:

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{1}{2\beta} \cdot \frac{\varphi'\omega}{p},$$

Soll jetzt ein Sprung stattfinden, so muss $\frac{u^2}{2g} > \frac{\omega}{2x}$ sein, folglich:

$$\frac{1}{2\beta} \cdot \frac{\varphi'\omega}{p} > \frac{\omega}{2x},$$

oder:

$$\varphi' > \beta \cdot \frac{p}{x}$$

sein. Damit bei der Aufstauung des Wassers ein Sprung stattfinden soll, muss folglich der vorhergehende constante Abhang des Flussbettes grösser als $\beta \cdot \frac{p}{x} = 0{,}0037 \cdot \frac{p}{x}$ sein, oder, wenn $p = x + 2h$ gesetzt wird, wo h die mittlere Tiefe bezeichnet, der Abhang grösser als: $0{,}0037\left(1 + \frac{2h}{x}\right)$ sein. In der Regel haben Flüsse und Canäle einen viel geringeren Abhang. Die der Geschwindigkeit des Wassers in ihnen entsprechende Druckhöhe wird daher gewöhnlich auch kleiner als die halbe mittlere Tiefe, und es findet nur selten bei der Aufstauung derselben ein Sprung statt.

§. 285.

Wir haben bisher nur den Fall betrachtet, wenn der Wasserbehälter immer gefüllt ist, so dass, wenn die obere Schicht der Flüssigkeit sinkt, ihr Platz gleich von einer anderen ebenso grossen Schicht eingenommen wird, welche dieselbe Geschwindigkeit be-

sitzt. Wir werden jetzt dagegen den Fall betrachten, wo kein Zufluss stattfindet.

Betrachten wir zuerst einen engen Canal, wie in §. 244 (Fig. 132) und benutzen wir die da angewandten Bezeichnungen. Wir haben daselbst die Differentialgleichung der Bewegung gefunden:

$$\varrho\Omega d_t U \int_{s_0}^{s'} \frac{ds}{\omega} + \tfrac{1}{2}\varrho U^2\left(\frac{\Omega^2}{O'^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) = g\varrho z' + P - P'.$$

Setzen wir hier $s_0 = o$, $s' = s$, $O' = \Omega$ und $z' = h$, wo h die veränderliche Höhe der freien Oberfläche über der Ausflussöffnung bezeichnet, so wird:

$$\varrho\Omega d_t U \int_o^s \frac{ds}{\omega} + \tfrac{1}{2}\varrho U^2\left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) = g\varrho h + P - P'.$$

Es bezeichnet hier ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, Ω den Flächeninhalt der Ausflussöffnung, O denjenigen des normalen Querschnittes in der Höhe der freien Oberfläche, s die Länge des Bogens mN, P den Druck auf die Flächeneinheit auf der sinkenden freien Oberfläche, P' den Druck auf die Flächeneinheit der Ausflussöffnung.

Ausser dieser Gleichung hat man noch die Gleichung der Continuität:

$$-\, O d_t s = \Omega U, \text{ oder: } dt = -\frac{O}{\Omega U}\, ds.$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen dt, so findet man:

$$\varrho\Omega dU \int_o^s \frac{ds}{\omega} - \tfrac{1}{2}\varrho U^2\left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right)\frac{O}{\Omega U}\, ds = -\,(g\varrho h + P - P')\,\frac{O}{\Omega U}\, ds,$$

oder:

$$\varrho\Omega^2 U dU \int_o^s \frac{ds}{\omega} - \tfrac{1}{2}\varrho U^2\left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) O\, ds = -\,(g\varrho h + P - P')\, O\, ds.$$

Bezeichnet man jetzt durch H die zur Geschwindigkeit U gehörige Druckhöhe, oder setzt man: $H = \frac{U^2}{2g}$, so wird:

$$U^2 = 2gH, \; UdU = gdH.$$

Substituirt man diese Werthe, so findet man:

$$g\varrho\Omega^2 dH \cdot \int_0^s \frac{ds}{\omega} - g\varrho H \left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) O\,ds = -(g\varrho h + P - P')\,O\,ds.$$

Dividirt man hier mit $g\varrho\Omega^2 \int_0^s \frac{ds}{\omega}$, und setzt der Kürze wegen:

$$\frac{\left(h + \frac{P - P'}{g\varrho}\right) O}{\Omega^2 \int_0^s \frac{ds}{\omega}} = X, \quad \frac{\left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) O}{\Omega^2 \int_0^s \frac{ds}{\omega}} = Y,$$

so wird:

$$dH + HYds = Xds.$$

Um diese Differentialgleichung zu integriren, multiplicirt man mit $e^{\int Yds}$, wodurch man erhält:

$$e^{\int Yds} dH - H e^{\int Yds}\, Yds = X e^{\int Yds} ds,$$

oder:

$$d\left[H e^{\int Yds}\right] = Y e^{\int Yds} ds,$$

und hieraus durch Integration:

$$H e^{\int Yds} = \int X e^{\int Yds} . \, ds + \text{Const.}$$

$$H = \frac{U^2}{2g} = \frac{\int X e^{\int Yds} . \, ds + \text{Const.}}{e^{\int Yds}}.$$

Die constante Grösse ist hier dadurch zu bestimmen, dass im Anfang der Bewegung, wenn U = o, folglich auch H = o ist, s gleich der ursprünglichen Bogenlänge AN = S ist. Die Integration in Bezug auf s ist übrigens von s = o bis s = s auszudehnen.

Nachdem auf diese Weise die Ausflussgeschwindigkeit U bestimmt worden ist, welche stattfindet, wenn die freie Oberfläche der Flüssigkeit von EF bis ab gesunken ist, kann die hierzu verbrauchte Zeit t durch die Differentialgleichung:

$$dt = -\frac{O}{\Omega U} ds = -\frac{O ds}{\Omega\sqrt{2gH}},$$

bestimmt werden. Hieraus findet man durch Integration:

$$t = -\frac{1}{\Omega\sqrt{2g}}\int_o^s \frac{ds}{\sqrt{H}}.$$

§. 286.

Um die Bewegung des Wassers in einem sich ausleerenden Gefäss nach diesen Formeln berechnen zu können, muss man die Gestalt der von den Wasserpartikeln während des Sinkens der freien Oberfläche beschriebenen krummen Linien kennen. Diese sind indessen schon bei dem Ausfluss aus voll gehaltenen Gefässen unbekannt, und ändern hier noch ihre Gestalt während des Ausflusses. Das Glied, welches das von der Gestalt dieser Linien abhängige Integral $\int\frac{ds}{\omega}$ inne hat, hat hier ferner auch nicht einen von dieser Gestalt unabhängigen Grenzwerth.

Nur in den Fällen, wenn man eine besondere Voraussetzung über die Gestalt dieser Wasserfäden machen kann, oder, wenn die Aenderung der Geschwindigkeit während des Ausflusses sehr klein ist, so dass man annehmen kann, die Ausflussgeschwindigkeit habe zu jedem Augenblick den der augenblicklichen Druckhöhe entsprechenden Grenzwerth, kann man die Bewegung der Flüssigkeit in einem sich ausleerenden Gefäss einer Berechnung unterwerfen.

Betrachten wir ein Gefäss, welches mit Ausnahme einer kurzen Strecke vor der abgerundeten Mündung ein vertikales Prisma bildet. Man kann hier annehmen, dass die Wasserpartikeln sich in Canälen bewegen, welche mit Ausnahme einer kurzen Strecke

vor der Mündung vertikale Prismen bilden. Betrachtet man den Ausfluss nur so lange, als die freie Oberfläche sich noch eine Strecke oberhalb der Mündung befindet, betrachtet man folglich nicht den letzten Ausfluss aus einem solchen Gefäss, so wird man auch annehmen können, dass die Wassercanäle während des Ausflusses ihre Form nicht ändern. Das Verhältnis $\frac{O}{\Omega}$ kann man auch für alle diese Canäle als gleich gross annehmen, gleich dem Verhältnisse eines horizontalen Querschnittes des prismatischen Gefässes zum Inhalt der Mündung.

Man wird in diesem Falle:

$$\int_{o}^{s} \frac{ds}{\omega} = \frac{h}{O}, \quad ds = dh$$

annehmen können und erhält folglich die Gleichung:

$$g\varrho\Omega^2 \frac{h}{O} . dH - g\varrho H\left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) Odh = -(g\varrho h + P - P')Odh,$$

oder, wenn man mit $\frac{g\varrho\Omega^2}{O}$ dividirt:

$$hdH - \left(\frac{O^2}{\Omega^2} - 1\right) Hdh = -\left(h + \frac{P-P'}{g\varrho}\right)\frac{O^2}{\Omega^2}dh.$$

Setzt man der Kürze wegen: $\frac{O}{\Omega} = k$, und multiplicirt mit: h^{-k^2}, so findet man:

$$h^{1-k^2}dH + (1-k^2)H . h^{-k^2}dh = -k^2h^{1-k^2}dh - k^2\frac{P-P'}{g\varrho} . h^{-k^2}dh,$$

und hieraus durch Integration:

$$h^{1-k^2}H = -\frac{k^2h^{2-k^2}}{2-k^2} - k^2 . \frac{P-P'}{g\varrho} . \frac{h^{1-k^2}}{1-k^2} + \text{Const.}$$

Die Constante wird jetzt dadurch bestimmt, dass, wenn $H = o$, h gleich der ursprünglichen Höhe der freien Oberfläche über der Mündung ist. Bezeichnet man diese durch h_o, so wird:

$$h^{1-k^2} . H = \frac{k^2(h^{2-k^2} - h_o^{2-k^2})}{k^2 - 2} + \frac{k^2}{k^2-1} . \frac{P-P'}{g\varrho}\left(h^{1-k^2} - h_o^{1-k^2}\right).$$

Hieraus findet man dann:

$$H = \frac{U^2}{2g} = \frac{k^2 h}{k^2-2}\left[1-\left(\frac{h_0}{h}\right)^{2-k^2}\right] + \frac{k^2}{k^2-1}\cdot\frac{P-P'}{g\varrho}\left[1-\left(\frac{h_0}{h}\right)^{1-k^2}\right]$$

$$= \frac{k^2 h}{k^2-2}\left[1-\left(\frac{h}{h_0}\right)^{k^2-2}\right] + \frac{k^2}{k^2-1}\cdot\frac{P-P'}{g\varrho}\left[1-\left(\frac{h}{h_0}\right)^{k^2-1}\right].$$

Weil $dt = \frac{O}{\Omega U}ds = -\frac{k}{U}dh$, so findet man ferner:

$$t = -k\int_{h_0}^{h}\frac{dh}{U} = k\int_{h}^{h_0}\frac{dh}{U} = k\int_{h}^{h_0}\frac{dh}{\sqrt{2gH}},$$

und, wenn man den Werth von H substituirt:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{h}^{h_0}\frac{dh}{\sqrt{\frac{h}{k^2-2}\left[1-\left(\frac{h}{h_0}\right)^{k^2-2}\right] + \frac{1}{k^2-1}\cdot\frac{P-P'}{g\varrho}\left[1-\left(\frac{h}{h_0}\right)^{k^2-1}\right]}}.$$

§. 287.

Wenn die sinkende freie Oberfläche des Wassers immer sehr gross in Bezug auf die Mündung ist, und man die letzte Zeit des Ausflusses nicht betrachtet, wo die Höhe des Wassers über der Ausflussöffnung sehr klein ist, so wird: $\Omega d_t U\int_0^s\frac{ds}{\omega}$ in Bezug auf U^2 und h sehr klein sein und kann vernachlässigt werden. Indem man dieses Glied vernachlässigt, setzt man voraus, dass die Ausflussgeschwindigkeit U augenblicklich den zu einem constanten Ausfluss gehörigen Grenzwerth erreicht. Man hat unter dieser Voraussetzung, weil man auch $\frac{\Omega^2}{O^2}$ in Bezug auf die Einheit vernachlässigen kann:

$$V = \sqrt{2g\left(h + \frac{P-P'}{g\varrho}\right)},$$

$$\Omega V dt = -O dh,$$

wo Ω die Ausflussöffnung, O den veränderlichen Inhalt der sinkenden freien Oberfläche des Wassers, h die mittlere Höhe derselben über der Ausflussöffnung bezeichnet.

Man findet aus den obigen Gleichungen:

$$dt = -\frac{O}{\Omega}\cdot\frac{dh}{v} = -\frac{O dh}{\Omega\sqrt{2g\left(h+\frac{P-P'}{g\varrho}\right)}},$$

$$t = -\frac{1}{\Omega}\int_{h_0}^{h}\frac{O dh}{\sqrt{2g\left(h+\frac{P-P'}{g\varrho}\right)}} = \frac{1}{\Omega\sqrt{2g}}\int_{h}^{h_0}\frac{O dh}{\sqrt{h+\frac{P-P'}{g\varrho}}}.$$

Findet der Ausfluss in freier Luft statt, so ist $P = P'$, und folglich:

$$t = \frac{1}{\Omega\sqrt{2g}}\int_{h}^{h_0}\frac{O dh}{\sqrt{h}}.$$

Kennt man O als Funktion von h, kennt man folglich alle horizontalen Querschnitte des Gefässes von der Höhe h_0 bis h, so kann man hieraus die Zeit des Heruntersinkens finden. Ist umgekehrt das Gesetz, nach welchem die Höhe h abnehmen soll, gegeben, so kann aus der obigen Gleichung die hierzu nothwendige Form des Körpers gefunden werden. Soll z. B. die freie Oberfläche des Wassers mit einer constanten Geschwindigkeit a sinken, so ist: $-d_t h = a$. Es ist aber:

$$dt = -\frac{O}{\Omega}\cdot\frac{dh}{\sqrt{2gh}},$$

folglich:

$$-d_t h = a = \frac{\Omega\sqrt{2gh}}{O},$$

und hieraus:

$$O = \frac{\Omega\sqrt{2gh}}{a}.$$

Sind alle Querschnitte, O, Kreise, deren Halbmesser r mit der Höhe h abnehmen, so wird:

$$O = \pi r^2, \text{ und folglich:}$$

$$r^2 = \frac{\Omega}{\pi a}\sqrt{2gh},$$

oder der Axendurchschnitt wird eine Parabel bilden. Es werden nach dieser Formel die Wasseruhren oder Clepsydren geformt.

§. 288.

Ist die Ausflussöffnung nicht abgerundet, und findet folglich hier eine Contraction statt, so muss man $m\Omega$ statt Ω setzen. Man hat alsdann:

$$t = \frac{1}{\Omega\sqrt{2g}}\int_h^{h_0}\frac{O\,dh}{m\sqrt{h + \frac{P-P'}{g\varrho}}},$$

und wenn der Ausfluss in freier Luft stattfindet:

$$t = \frac{1}{\Omega\sqrt{2g}}\int_h^{h_0}\frac{O\,dh}{m\sqrt{h}}.$$

Es ändert sich hier der Ausflusscoefficient m mit der Druckhöhe h. Nach §. 254 nimmt er zu, wenn die Druckhöhe h abnimmt, den Fall ausgenommen, welchen wir hier jedoch nicht betrachten können, dass die Höhe h in Bezug auf die Höhe der Oeffnung sehr klein ist. Bei grösseren Oeffnungen ändert er sich überhaupt sehr wenig. Man nimmt ihn daher gewöhnlich als constant an und giebt ihm den der mittleren Druckhöhe $\frac{h+h_0}{2}$ entsprechenden Werth.

Es wird dann:

$$t = \frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_h^{h_0}\frac{O\,dh}{\sqrt{h}}.$$

Die Ausflussmenge wird gleich:

$$Q = \int_h^{h_0} O\,dh = m\Omega\sqrt{2g}\int_0^t \sqrt{h}\,dt.$$

Ist der Körper in der Höhe von h_0 bis h prismatisch, so ist O constant, und es wird:

$$t = \frac{O}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_h^{h_0}\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{O}{mg\Omega}\left(\sqrt{2gh_0} - \sqrt{2gh}\right),$$

$$Q = O\,(h_0 - h).$$

Aus der ersten Gleichung findet man:

$$h = \frac{1}{2g}\left(\sqrt{2gh_0} - \frac{mg\Omega}{O}t\right)^2 = h_0 - \frac{m\Omega}{O}t\sqrt{2gh_0} + \frac{m^2 g\Omega^2}{2O^2}t^2,$$

folglich:

$$h_0 - h = \frac{m\Omega}{O}\left(\sqrt{2gh_0} - \frac{mg\Omega}{2O}t\right)t$$

$$Q = m\Omega\left(\sqrt{2gh_0} - \frac{mg\Omega}{2O}t\right)t.$$

Bildet das Gefäss, so weit die Senkung des Wasserspiegels vor sich geht, eine Kegelfläche, und bezeichnet man durch O_0 die der Höhe h_0, durch O_1 die der Höhe h_1 entsprechende Oberfläche, so wird:

$$\sqrt{O_0} - \sqrt{O_1} : \sqrt{O_0} - \sqrt{O} = h_0 - h_1 : h_0 - h.$$

Hieraus findet man dann:

$$\sqrt{O_0} - \sqrt{O} = \frac{h_0 - h}{h_0 - h_1}\left(\sqrt{O_0} - \sqrt{O_1}\right),$$

$$\sqrt{O} = \sqrt{O_0} - \frac{h_0 - h}{h_0 - h_1}\left(\sqrt{O_0} - \sqrt{O_1}\right) = \frac{\sqrt{O_0} - \sqrt{O_1}}{h_0 - h_1}.h - \frac{h_1\sqrt{O_0} + h_0\sqrt{O_1}}{h_0 - h_1}.$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$\frac{\sqrt{O_0} - \sqrt{O_1}}{h_0 - h_1} = a, \quad \frac{h_1\sqrt{O_0} + h_0\sqrt{O_1}}{h_0 - h_1} = b,$$

so wird:

$$\sqrt{O} = ah - b, \quad O = a^2h^2 - 2abh + b^2.$$

$$t = \frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_h^{h_0}\frac{O\,dh}{\sqrt{h}} = \frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_h^{h_0}\left(a^2h^{\frac{3}{2}} - 2ab\sqrt{h} + \frac{b^2}{\sqrt{h}}\right)dh =$$

$$= \frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}}\left\{\tfrac{2}{5}a^2\left(h_0^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}\right) - \tfrac{4}{3}ab\left(h_0^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right) + 2b^2\left(h_0^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{1}{2}}\right)\right\},$$

$$Q = \int_h^{h_0} O\,dh = \int_h^{h_0}(a^2h^2 - 2abh + b^2)\,dh = \frac{a^2}{3}(h_0^3 - h^3) - ab(h_0^2 - h^2) + b^2(h_0 - h).$$

Bildet das Gefäss ein aufrechtstehendes elliptisches Paraboloid, so nehmen die horizontalen Querschnitte proportional mit dem Abstand von dem Scheitelpunkte zu. Es ist alsdann:

$$O_0 - O_1 : O_0 - O = h_0 - h_1 : h_0 - h,$$

und hieraus:

$$O = \frac{O_0 - O_1}{h_0 - h_1} h - \frac{h_1 O_0 - h_0 O_1}{h_0 - h_1}.$$

Setzt man hier der Kürze wegen:

$$\frac{O_0 - O_1}{h_0 - h_1} = a, \quad \frac{h_1 O_0 - h_0 O_1}{h_0 - h_1} = b,$$

so wird: $O = ah - b$, und folglich:

$$t = \frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}} \int_h^{h_0} \frac{O dh}{\sqrt{h}} = \frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}} \left\{ \tfrac{2}{3} a (h_0 \sqrt{h_0} - h\sqrt{h}) - 2b(\sqrt{h_0} - \sqrt{h}) \right\}$$

$$Q = \int_h^{h_0} O dh = \tfrac{1}{2} a (h_0^2 - h^2) - b(h_0 - h).$$

Diese Formeln lassen sich überhaupt auf das Ausleeren von Teichen anwenden, bei welchen man annehmen kann, dass die Oberflächen der horizontalen Querschnitte proportional mit ihrer Höhe über irgend einem Punkte abnehmen. Findet eine solche Annahme nicht statt, so kann man die Ausflusszeit annäherungsweise bestimmen, wenn man die Höhe $h_0 - h$ in mehrere kleine Stücke theilt und den Flächeninhalt der hierzu gehörigen horizontalen Querschnitte berechnet.

Theilt man $h_0 - h$ in eine gerade Anzahl n gleicher Theile, und bezeichnet durch $h_0, h_1, h_2, \ldots h_n$ die Höhen, durch O_0, $O_1, O_2, \ldots O_n$ die entsprechenden Querschnitte, so findet man nach der Simpson schen Regel:

$$t = \frac{h_0 - h}{3nm\Omega\sqrt{2g}} \left\{ \frac{O_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{O_n}{\sqrt{h_n}} + 4\left(\frac{O_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{O_3}{\sqrt{h_3}} + \ldots \frac{O_{n-1}}{\sqrt{h_{n-1}}}\right) + 2\left(\frac{O_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{O_4}{\sqrt{h_4}} + \ldots + \frac{O_{n-2}}{\sqrt{h_{n-2}}}\right) \right\}.$$

Die Ausflussmenge Q wird gleich:

$$Q = \int_h^{h_0} O dh = \frac{h_0 - h_n}{3n} \left\{ O_0 + O_n + 4(O_1 + O_3 + \ldots O_{n-1}) + 2(O_2 + O_4 + \ldots + O_{n-2}) \right\}.$$

Hat man die nach gleichen Zeitintervallen $\tau = \frac{t}{n}$ stattfindenden Wasserstände $h_0, h_1, h_2, \ldots h_n$ beobachtet, so findet man, wenn n eine gerade Zahl bezeichnet:

$$Q = m\Omega\sqrt{2g}\int_0^t \sqrt{h}\,dt = \frac{m\Omega\tau\sqrt{2g}}{3}\Big\{\sqrt{h_0}+\sqrt{h_n}+4(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_3}+\cdots+\sqrt{h_{n-1}})$$

$$+2(\sqrt{h_2}+\sqrt{h_4}+\cdots+\sqrt{h_{n-2}})\Big\}.$$

§. 289.

Wenn der Ausfluss durch einen Ueberfall stattfindet, so wird, wenn man fortwährend voraussetzen kann, dass die freie Oberfläche des Wassers sehr gross in Bezug auf die Ausflussöffnung ist, die mittlere Geschwindigkeit gleich:

$$V = \tfrac{2}{3}\sqrt{2gh},$$

wenn h die Höhe des Ueberfalles bezeichnet. Diese muss dann nicht unmittelbar über der Ueberfallschwelle, sondern etwas zur Seite derselben gemessen werden. Die Continuitätsgleichung giebt ferner:

$$mbhVdt = -\,Odh,$$

wenn man durch b die Breite des Ueberfalles bezeichnet. Hieraus findet man dann:

$$dt = -\frac{Odh}{mbhV} = \frac{3}{2mb\sqrt{2g}}\cdot\frac{-Odh}{h\sqrt{h}},$$

$$t = \frac{3}{2mb\sqrt{2g}}\int_h^{h_0}\frac{Odh}{h\sqrt{h}}.$$

Bildet das Gefäss ein Prisma oder ist O constant, so wird:

$$t = \frac{3O}{mb\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}-\frac{1}{\sqrt{h_0}}\right).$$

Die ausgelaufene Wassermenge wird gleich:

$$Q = O(h_0 - h).$$

Hieraus findet man:

$$h = h_0 - \frac{Q}{O}.$$

Substituirt man diesen Werth in der vorhergehenden Gleichung, so findet man die zum Ausfluss einer gegebenen Wassermenge Q nöthige Zeit gleich:

$$t = \frac{3O}{mb\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{h_o - \frac{Q}{O}}} - \frac{1}{\sqrt{h_o}}\right).$$

Nehmen die horizontalen Querschnitte von der Höhe h_o bis h proportional mit dem Quadrate des Abstandes von irgend einem tieferen Punkte ab, so wird:

$$\sqrt{O} = Ah - B,$$

$$\text{wo } A = \frac{\sqrt{O_o} - \sqrt{O_1}}{h_o - h_1},\ B = \frac{h_1\sqrt{O_o} - h_o\sqrt{O_1}}{h_o - h_1}$$

und hieraus:

$$t = \frac{3}{2mb\sqrt{2g}}\int_h^{h_o}\frac{Odh}{h\sqrt{h}} = \frac{3}{2mb\sqrt{2g}}\int_h^{h_o}\frac{(Ah-B)^2dh}{h\sqrt{h}}$$

$$= \frac{3}{2mb\sqrt{2g}}\left\{\tfrac{2}{3}A^2(h_o\sqrt{h_o} - h\sqrt{h}) - 4AB(\sqrt{h_o} - \sqrt{h}) + 2B^2\left(\frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{h_o}}\right)\right\},$$

$$Q = \int_h^{h_o} Odh = \tfrac{1}{2}A(h_o^2 - h^2) - B(h_o - h).$$

Nehmen die horizontalen Querschnitte mit dem Abstande von irgend einem tieferen Punkte ab, so wird;

$$O = Ah - B,$$

$$A = \frac{O_o - O_1}{h_o - h_1},\ B = \frac{h_1 O_o - h_o O_1}{h_o - h_1},$$

$$t = \frac{3}{2mb\sqrt{2g}}\int_h^{h_o}\frac{(Ah-B)dh}{h\sqrt{h}} = \frac{3}{mb\sqrt{2g}}\left\{A(\sqrt{h_o} - \sqrt{h}) - B\left(\frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{h_o}}\right)\right\},$$

$$Q = \int_h^{h_o} Odh = \tfrac{1}{2}A(h_o^2 - h^2) - B(h_o - h).$$

Bildet das Gefäss eine unregelmässige Figur, so theilt man $h_o - h$ in n gleiche Theile, wo n eine gerade Zahl bezeichnet, und

sucht die den Höhen h_0, h_1, h_2, ... h_n entsprechenden horizontalen Querschnitte: O_0, O_1, O_2, ... O_n. Man findet dann:

$$t = \frac{h_0 - h}{2nmb\sqrt{2g}} \left\{ \frac{O_0}{h_0\sqrt{h_0}} + \frac{O_n}{h_n\sqrt{h_n}} + 4\left(\frac{O_1}{h_1\sqrt{h_1}} + \frac{O_3}{h_3\sqrt{h_3}} + \ldots + \frac{O_{n-1}}{h_{n-1}\sqrt{h_{n-1}}}\right) + 2\left(\frac{O_2}{h_2\sqrt{h_2}} + \frac{O_4}{h_4\sqrt{h_4}} + \ldots + \frac{O_{n-2}}{h_{n-2}\sqrt{h_{n-2}}}\right)\right\}.$$

$$Q = \frac{h_0 - h_n}{3n}\left\{O_0 + O_n + 4(O_1 + O_3 + \ldots + O_{n-1}) + 2(O_2 + O_4 + \ldots + O_{n-2})\right\}.$$

Hat man die nach gleichen Zeitintervallen: $\tau = \frac{t}{n}$ stattfindenden Wasserstände: h_0, h_1, h_2, ... h_n, beobachtet, so findet man, wenn n eine gerade Zahl bezeichnet:

$$Q = b\int_0^t hVdt = \tfrac{2}{3} mb\sqrt{2g}\int_0^t h\sqrt{h}\, dt$$

$$= \tfrac{2}{3} mb\sqrt{2g} \cdot \frac{\tau}{3}\left\{h_0\sqrt{h_0} + h_n\sqrt{h_n} + 4(h_1\sqrt{h_1} + h_3\sqrt{h_3} + \ldots h_{n-1}\sqrt{h_{n-1}}) + 2(h_2\sqrt{h_2} + h_4\sqrt{h_4} + \ldots + h_{n-2}\sqrt{h_{n-2}})\right\}.$$

§. 290.

Wenn das Gefäss einen Zufluss erhält, der aber kleiner als der Ausfluss ist, so lässt sich die Senkung des Niveaus auf gleiche Weise berechnen. Bezeichnet man durch q den Zufluss während einer Zeiteinheit, so wird, wenn die Ausflussöffnung tiefer als das Niveau des auszuleerenden Gefässes liegt, und das Wasser frei abfliesst, die Continuitätsgleichung:

$$m\Omega Vdt = - Odh + qdt,$$

und hieraus:

$$t = \int_h^{h_0} \frac{Odh}{m\Omega V - q}, \quad Q = \int_h^{h_0} Odh + \int_0^t qdt.$$

Substituirt man hier den Werth der Ausflussgeschwindigkeit V, so findet man:

$$t = \int_{h}^{h_0} \frac{O dh}{m\Omega\sqrt{2gh} - q}.$$

Ist das Gefäss prismatisch, folglich O constant, und auch der Zufluss q constant, so wird:

$$t = O \int_{h}^{h_0} \frac{dh}{m\Omega\sqrt{2gh} - q} = \frac{O}{gm^2\Omega^2} \left\{ m\Omega\left(\sqrt{2gh_0} - \sqrt{2gh}\right) \right.$$

$$\left. + \; q \log nat \left(\frac{m\Omega\sqrt{2gh_0} - q}{m\Omega\sqrt{2gh} - q}\right) \right\}.$$

$$Q = O(h_0 - h) - qt.$$

Findet der Ausfluss durch einen Ueberfall statt, so wird die Continuitätsgleichung:

$$mbhVdt = - Odh + qdt,$$

wo: $V = \frac{2}{3}\sqrt{2gh}$, folglich:

$$\tfrac{2}{3}\, mbh\sqrt{2gh}\,.\,dt = - Odh + qdt,$$

und hieraus:

$$t = \int_{h}^{h_0} \frac{O dh}{\frac{2}{3} mbh\sqrt{2gh} - q}$$

Sind O und q constant, so findet man:

$$t = \frac{O}{g\sqrt[3]{\left(\frac{mb}{3g}\right)^2}} \cdot \frac{1}{6\sqrt[3]{q}} \log nat \left\{ \left(\frac{\sqrt[3]{\frac{mb}{3g}\sqrt{2gh_0}} - \sqrt[3]{q}}{\sqrt[3]{\frac{mb}{3g}\sqrt{2gh}} - \sqrt[3]{q}} \right)^3 \cdot \left(\frac{\frac{2}{3} mbh\sqrt{2gh} - q}{\frac{2}{3} mbh_0\sqrt{2gh_0} - q} \right) \right\}$$

$$+ \frac{O}{g\sqrt{3}\sqrt[3]{\left(\frac{mb}{3g}\right)^2 \cdot q}} \cdot arc \left\{ tang = \right.$$

$$\left. = \frac{2\sqrt[3]{\frac{mb}{3g}}\left(\sqrt{2gh_0} - \sqrt{2gh}\right)}{\sqrt{3}\sqrt[3]{q}\left[1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{q^2}}\left(2\sqrt[3]{\frac{mb}{3g}}\sqrt{2gh_0} + \sqrt[3]{q}\right)\left(2\sqrt[3]{\frac{mb}{3g}}\sqrt{2gh} + \sqrt[3]{q}\right)\right]} \right\}.$$

§. 291.

Die obigen Formeln finden auch Anwendung, wenn ein Gefäss durch ein anderes, in welchem das Wasser einen unveränderlichen Stand hat, gefüllt wird. Bezeichnet man hier durch O den horizontalen Querschnitt des zu füllenden Gefässes in der Tiefe h unter der constanten Oberfläche des ersten Reservoirs, und findet der Zufluss durch eine untergetauchte Oeffnung Ω statt, so wird:

$$V = \sqrt{2gh}, \; m\Omega V dt = - O dh,$$

woraus, wenn h_0 den ursprünglichen Werth von h bezeichnet, bei welchem schon die Zuflussöffnung als untergetaucht angesehen wird:

$$t = \frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}} \int_h^{h_0} \frac{O dh}{\sqrt{h}},$$

wie in §. 288.

Wenn das erste Gefäss keinen Zufluss hat und sein horizontaler Querschnitt auch nicht als unendlich gross in Bezug auf den horizontalen Querschnitt des zweiten Gefässes angenommen werden kann, so wird seine Oberfläche sinken, während die des zweiten Gefässes steigt. Bezeichnet man durch O′ die Oberfläche des ersten Gefässes, durch h′ die Senkung dieser Oberfläche zur Zeit t, durch O die Oberfläche des zweiten Gefässes, durch h wie vorher die Tiefe dieser Oberfläche unter derjenigen des ersten Gefässes. Es wird dann, wenn fortwährend die Oeffnung als von Anfang an untergetaucht angenommen wird:

$$V = \sqrt{2gh}, \; m\Omega V dt = - O(dh' + dh) = O' dh'.$$

Hieraus findet man:

$$- O dh = (O + O') dh',$$

durch welche Differentialgleichung h als Funktion von h′ bestimmt wird, und dann ferner:

$$t = \frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}} \int_h^{h'} \frac{O' dh'}{\sqrt{h}}.$$

Sind beide Gefässe prismatisch, so sind O und O' constant. Es wird alsdann:

$$O(h_o - h) = (O + O')h',$$

woraus:

$$h = \frac{Oh_o - (O + O')h'}{O}$$

$$t = \frac{O'}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_0^{h'}\frac{dh'}{h} = \frac{O'\sqrt{O}}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_0^{h'}\frac{dh'}{\sqrt{Oh_o - (O+O')h'}}$$

$$= \frac{2O'\sqrt{O}}{m\Omega\sqrt{2g}\,(O + O')}\left(\sqrt{Oh_o} - \sqrt{Oh_o - (O + O')h'}\right)$$

$$= \frac{2O'\sqrt{O}}{m\Omega\,(O + O')\sqrt{2g}}(\sqrt{Oh_o} - \sqrt{Oh}) = \frac{2OO'}{O+O'}\cdot\frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}}(\sqrt{h_o} - \sqrt{h}).$$

Wollte man annehmen, die Formel: $V = \sqrt{2gh}$ finde fortwährend statt, wenn auch die Druckhöhe h sich Null nähere, und dass der Contractionscoefficient m fortwährend denselben Werth behalte, so würde man die Zeit, binnen welcher die beiden Wasserspiegel in ein Niveau kommen, finden, indem man $h = o$, $h' = \frac{O}{O+O'}h_o$ setzt. Es wird dann diese Zeit gleich:

$$t = \frac{2O'\sqrt{h_o}}{m\Omega(O + O')\sqrt{2g}}.$$

§. 292.

Der Druck, welchen das bewegte Wasser gegen das Gefäss ausübt, wird nach §. 87 gleich dem Drucke, welchen das ruhende Wasser gegen das Gefäss ausüben würde, wenn man statt der gegebenen Kräfte die verlorenen Kräfte substituirt, d. h. zu den gegebenen Kräften die totalen Kräfte in entgegengesetzter Richtung wirkend fügt.

Betrachten wir wieder einen engen Canal, Fig. 132, in welchem die Wasserelemente in allen Punkten desselben normalen Querschnittes auch dieselbe Geschwindigkeit haben mögen.

Benutzen wir die in §. 244 angewendeten Bezeichnungen,

und nehmen die z-Axe als positiv nach unten, die x- und y-Axe als horizontal an. Betrachten wir die zwischen den beiden Querschnitten $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ eingeschlossene Flüssigkeit. Es wird deren Masse gleich $\varrho\omega ds$. Die auf sie wirkende gegebene Kraft ist hier nur die Schwere, welche nach der z-Axe gerichtet ist und gleich: $g\varrho\omega ds$.

Die Componenten der totalen Kraft dieser elementären Schicht werden gleich:

$$\varrho\omega ds \,.\, d_t^2 x\,,\ \varrho\omega ds \,.\, d_t^2 y\,,\ \varrho\omega ds \,.\, d_t^2 z.$$

Bezeichnet man jetzt durch a, b, c die Winkel, welche die Tangente der Canal-Axe im Querschnitte $\alpha\beta$ mit den drei Coordinaten-Axen bildet, so wird:

$$d_t x = d_s x \,.\, d_t s = u \cos a = \Omega U \,.\, \frac{\cos a}{\omega}$$

$$d_t^2 x = \Omega\, d_t\left(U . \frac{\cos a}{\omega}\right) = \frac{\Omega \cos a}{\omega} \,.\, d_t U + \Omega U d_s\left(\frac{\cos a}{\omega}\right) d_t s$$

oder, weil $d_t s = u = \frac{\Omega U}{\omega}$ ist:

$$d_t^2 x = \frac{\Omega \cos a\, d_t U}{\omega} + \frac{\Omega^2 U^2 d_s\left(\frac{\cos a}{\omega}\right)}{\omega}$$

Dieser Werth substituirt giebt die Componente der totalen Kraft längs der x-Axe gleich:

$$\varrho\Omega \cos \alpha\, d_t U \,.\, ds + \varrho\Omega^2 U^2 d_s\left(\frac{\cos a}{\omega}\right) ds.$$

Integrirt man diesen Ausdruck in Bezug auf die ganze Canal-Axe von s = o bis s = s, so findet man die Summe der Componenten der totalen Kräfte des bewegten Wassers längs der x-Axe gleich:

$$\varrho\Omega U \int_o^s \cos a\, ds + \varrho\Omega^2 U^2 \int_o^s d_s\left(\frac{\cos a}{\omega}\right) ds.$$

Bezeichnet man jetzt durch ξ den Abstand längs der x-Axe der beiden Endpunkte der Canal-Axe, und betrachtet diesen Abstand als positiv, wenn die Ausflussöffnung zur positiven Seite der Einflussöffnung liegt, durch A und A' die Winkel, welche die Tangenten dieser beiden Endpunkte mit der x-Axe bilden, so wird:

$$\int_0^s \cos a\, ds = \int_0^s d_s x \,.\, ds = \xi, \quad \int_0^s d_s\left(\frac{\cos a}{\omega}\right) ds = \frac{\cos A'}{\Omega} - \frac{\cos A}{O}.$$

Die Summe der Componenten der totalen Kräfte längs der x-Axe wird folglich gleich:

$$\varrho\Omega\, d_t U \,.\, \xi + \varrho\Omega^2 U^2 \left(\frac{\cos A'}{\Omega} - \frac{\cos A}{O}\right).$$

Ebenso findet man die Summe der Componenten der totalen Kräfte längs der y- und z-Axe gleich:

$$\varrho\Omega\, d_t U \,.\, \eta + \varrho\Omega^2 U^2 \left(\frac{\cos B'}{\Omega} - \frac{\cos B}{O}\right),$$

$$\varrho\Omega\, d_t U \,.\, \zeta + \varrho\Omega^2 U^2 \left(\frac{\cos C'}{\Omega} - \frac{\cos C}{O}\right),$$

wenn η und ζ die Abstände längs der y- und z-Axe der beiden Endpunkte der Canal-Axe bezeichnen, B, B′, C, C′ die Winkel, welche die Tangenten dieser Endpunkte mit der y- und z-Axe bilden.

Die Summen der Componenten der totalen Kräfte sind: 0, 0, $g\int_0^s \varrho\omega ds$, welche letztere wir durch Π bezeichnen werden.

Die Summen der Componenten der verlorenen Kräfte oder die Componenten des Druckes des bewegten Wassers werden folglich:

$$-\varrho\Omega\, d_t U \,.\, \xi - \varrho\Omega^2 U^2 \left(\frac{\cos A'}{\Omega} - \frac{\cos A}{O}\right),$$

$$-\varrho\Omega\, d_t U \,.\, \eta - \varrho\Omega^2 U^2 \left(\frac{\cos B'}{\Omega} - \frac{\cos B}{O}\right),$$

$$\Pi - \varrho\Omega\, d_t U \,.\, \zeta - \varrho\Omega^2 U^2 \left(\frac{\cos C'}{\Omega} - \frac{\cos C}{O}\right).$$

Wenn das Wasser aus einem Gefäss ausfliesst, so ist die Form der von den Wasserelementen beschriebenen Canalflächen unbekannt. Man kann indessen immer annehmen, dass die Richtung der Endstücke dieser Canäle alle auf der freien Oberfläche des Wassers und auf der Ebene der Ausflussöffnung senkrecht sind, und dass die Grösse der Endflächen diesen Flächen proportio-

nal sind. Ist die Bewegung permanent, folglich $d_t U = 0$, so wird man die oben gefundenen Componenten des Druckes auf jede Canalfläche addiren müssen. Bezeichnet man folglich durch Π die Schwere des Wassers, durch Ω den Inhalt der Ausflussöffnung, durch O den Inhalt der freien Oberfläche, durch A′, B′, C′ die Winkel, welche die Ebene der Ausflussöffnung mit den Coordinatenebenen bildet, und bemerkt, dass die freie Oberfläche mit der xy-Ebene parallel ist, folglich:

$$\cos A = 0,\ \cos B = 0,\ \cos C = 1,$$

so findet man die Componenten des Druckes des bewegten Wassers gleich:

$$-\varrho\Omega U^2 . \cos A',\ -\varrho\Omega U^2 \cos B',\ \Pi - \varrho\Omega^2 U^2\left(\frac{\cos C'}{\Omega} - \frac{1}{O}\right).$$

Wird die y-Axe parallel mit der Ebene der Ausflussöffnung angenommen, so wird $\cos B' = 0$, $\cos A' = \sin C'$. Die horizontalen und vertikalen Componenten des Druckes werden dann:

$$-\varrho\Omega U^2 \sin C',\ \Pi - \varrho\Omega^2 U^2\left(\frac{\cos C'}{\Omega} - \frac{1}{O}\right).$$

Ist die Ausflussöffnung horizontal nach unten gerichtet, so wird $C' = 0$, folglich der Druck vertikal nach unten gerichtet und gleich:

$$\Pi - \varrho\Omega U^2\left(\frac{1}{\Omega} - \frac{1}{O}\right).$$

Ist die Ausflussöffnung vertikal, so ist $C' = 90°$. Es werden dann die horizontale und vertikale Componente des Druckes gleich:

$$-\varrho\Omega U^2,\ \Pi + \frac{\varrho\Omega^2 U^2}{O}.$$

Bei Ausfluss in freier Luft ist:

$$U = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}},\ U^2 = 2gH . \frac{O^2}{O^2 - \Omega^2}.$$

Dieser Werth substituirt, giebt, wenn die Ausflussöffnung horizontal ist, den vertikalen Druck gleich:

$$\Pi - 2g\varrho H . \frac{O^2\Omega^2}{O^2 - \Omega^2}\left(\frac{1}{\Omega} - \frac{1}{O}\right).$$

Wenn die Ausflussöffnung vertikal ist, so wird die horizontale Componente des Druckes gleich:

$$-2g\varrho\Omega H \cdot \frac{O^2}{O^2 - \Omega^2},$$

und die vertikale Componente gleich:

$$\Pi + 2g\varrho\Omega H \cdot \frac{O\Omega}{O^2 - \Omega^2}.$$

Ist die freie Oberfläche O sehr gross in Bezug auf die Ausflussöffnung Ω, so dass man $\frac{\Omega}{O}$ vernachlässigen kann, so wird bei horizontaler Oeffnung der vertikale Druck gleich: $\Pi - 2g\varrho\Omega H$; bei vertikaler Oeffnung wird der horizontale Druck gleich: $-2g\varrho\Omega H$, der vertikale Druck gleich Π. Der Unterschied zwischen dem Drucke des bewegten und des ruhenden Wassers, oder die Reaction des bewegten Wassers wird folglich in diesem Falle gleich dem doppelten Gewicht einer Flüssigkeitssäule sein, deren Grundfläche die Ausflussöffnung, deren Höhe die Druckhöhe ist, und sie wird senkrecht auf der Ebene der Ausflussöffnung in der der Bewegung der Flüssigkeit entgegengesetzten Richtung stattfinden.

§. 293.

Wenn ein geschlossenes Gefäss, welches eine gewisse Flüssigkeitsmenge enthält, mit einer gewissen Geschwindigkeit v in einer gegebenen Richtung bewegt wird, so muss nach dem d'Alembert'schen Princip die Flüssigkeit in dem bewegten Gefässe ebenso im Gleichgewicht verbleiben, als wirkten auf sie in einem ruhenden Gefäss, statt der gegebenen Kräfte, oder der Schwere, die verlorenen Kräfte. Bezeichnet man durch m die Masse eines Elementes der Flüssigkeit, durch a, b, c die Winkel, welche die Richtung der Bewegung mit den Coordinaten-Axen bildet, unter denen wir die z-Axe als positiv nach unten gerichtet annehmen werden. Es werden jetzt die Componenten der verlorenen Kräfte dieser Elemente gleich:

$$- md_t v \,.\, \cos a, \; - md_t v \,.\, \cos b, \; m(g - d_t v \cos c).$$

Die freie Oberfläche der Flüssigkeit muss dann auf der Richtung dieser Resultante senkrecht sein, wie sie bei einem ruhenden Gefäss auf der Richtung der Schwere senkrecht ist.

Der Druck in jedem Punkte der Flüssigkeit wird ebenso, wie bei der in einem ruhenden Gefäss enthaltenen Flüssigkeit gefunden, wenn man nur statt der Grösse und Richtung der Schwere g die Grösse und Richtung der Resultante g' der beiden Kräfte g und $d_t v$ setzt, die letzte Kraft in entgegengesetzter Richtung der Bewegung wirkend.

Findet die Bewegung des Gefässes in der Richtung der Schwere nach unten statt, so wird: $g' = g - d_t v$. Die freie Oberfläche ist folglich fortwährend horizontal und der Druck in der Tiefe h unter derselben gleich:

$$p = \varrho (g - d_t v) h.$$

Findet die Bewegung des Gefässes in der der Schwere entgegengesetzten Richtung statt, so ist:

$$g' = g + d_t v, \; p = \varrho (g + d_t v) h.$$

Findet die Bewegung in horizontaler Richtung statt, so ist:

$$g' = \sqrt{g^2 + (d_t v)^2}.$$

Die Richtung dieser Resultante wird mit der der Schwere einen Winkel bilden, dessen Tangente gleich: $\frac{d_t v}{g}$ ist, und dieser Winkel wird in der durch die Richtung der Bewegung gehenden vertikalen Ebene nach der der Bewegung entgegengesetzten Seite gemessen. Die freie Oberfläche der Flüssigkeit wird mit dem Horizonte denselben Winkel bilden (Fig. 175).

Der Druck in irgend einem Punkte, dessen Abstand von der schiefen Oberfläche gleich h ist, wird gleich: $\varrho g' h$.

§. 294.

Wenn das Gefäss um eine vertikale Axe mit gleichförmiger Umdrehungsgeschwindigkeit gedreht wird, so werden nach und nach

die Widerstände des Gefässes gegen irgend eine Bewegung des Wassers relativ zu demselben, diese Bewegung auch dem Wasser mittheilen. Bezeichnen wir durch w diese Umdrehungsgeschwindigkeit, durch y (Fig. 176) den Abstand irgend eines Elementes M der freien Oberfläche von der Umdrehungs-Axe, durch m die Masse dieses Elementes. Es wird dann, weil die Umdrehungsgeschwindigkeit w constant ist, die Tangentialkraft dieses Elementes gleich Null, die Centrifugalkraft gleich: $\frac{mv^2}{R} = \frac{mw^2y^2}{y} = mw^2y$. Die Oberfläche der Flüssigkeit wird dann im Punkte M auf der Resultante dieser Centrifugalkraft und der Schwere mg senkrecht sein. Es liegt aber diese Resultante in einer durch die Umdrehungs-Axe gehenden vertikalen Ebene und bildet mit dieser Axe einen Winkel, dessen Tangente gleich $\frac{w^2y}{g}$ ist. Es wird folglich auch die Oberfläche der Flüssigkeit eine Umdrehungsfläche bilden, deren Normale im Punkte M denselben Winkel mit der Axe *bildet*. Bezeichnet man durch x die Abscisse des Punktes M längs der Umdrehungs-Axe von dem Durchschnittspunkte O der Flüssigkeit aus gerechnet, so wird folglich:

$$d_yx = \frac{w^2y}{g}, \quad \frac{gdx}{w^2} = ydy,$$

und hieraus:

$$y^2 = \frac{2g}{w^2}x.$$

Es wird folglich die freie Oberfläche der Flüssigkeit ein Umdrehungsparaboloid bilden, dessen Axe die Umdrehungs-Axe und dessen halber Parameter gleich $\frac{g}{w^2}$ ist.

§. 295.

Hat das mit einer gleichförmigen Umdrehungsgeschwindigkeit bewegte Gefäss eine Oeffnung A (Fig. 176), durch welche das Wasser ausfliesst, so wird die Ausflussgeschwindigkeit gleich der-

jenigen sein, welche bei einem ruhenden Gefäss der Druckhöhe M entspricht.

Nehmen wir nämlich an, das Wasser bewege sich durch eine beliebige Canalfläche von B bis A. Bezeichnen wir durch M die Ausflussgeschwindigkeit, durch Ω den Inhalt der Ausflussöffnung, oder, wenn Contraction stattfindet, den Durchschnitt des contrahirten Strahls. Es wird dann die Masse des in einem Zeitelemente ausfliessenden Wassers gleich: $\varrho\Omega Udt$.

Bezeichnen wir ferner durch y und y′ die Abstände der Endpunkte des Canals B und A von der Umdrehungs-Axe. Die lebendige Kraft der Masse: $\varrho\Omega Udt$ in B wird dann gleich: $\frac{1}{2}\varrho\Omega Udt \, . \, w^2y^2$, und in A gleich: $\frac{1}{2}\varrho\Omega Udt \, . \, w^2y'^2$. Die dieser Zunahme der lebendigen Kraft entsprechende dynamische Arbeit wird folglich gleich:

$$\tfrac{1}{2}\varrho\Omega Udt \, . \, (y'^2 - y^2).$$

Es muss dann diese Arbeit in der Gleichung der Bewegung des §. 244 hinzugefügt werden, wodurch man, nachdem mit ΩUdt dividirt worden ist, erhält:

$$\varrho\Omega d_t U \int_0^s \frac{ds}{\omega} + \tfrac{1}{2}\varrho U^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) = g\varrho h + P - P' + \tfrac{1}{2}\varrho w^2 (y'^2 - y^2)$$

$$= g\varrho \left(h + \frac{w^2}{2g}(y'^2 - y^2)\right) + P - P'.$$

Es ist jetzt, wenn x und x′ die Abscissen der Punkte B und C der freien Oberflächen bezeichnen:

$$y^2 = \frac{2gx}{w^2}, \; y'^2 = \frac{2gx'}{w^2},$$

woraus:

$$h + \frac{w^2}{2g}(y'^2 - y^2) = h + x' - x = AC.$$

Es wird folglich die Gleichung der Bewegung in dem Canal BA, und folglich auch die Ausflussgeschwindigkeit, genau dieselbe, als hätte das Wasser keine Umdrehungsgeschwindigkeit und wäre die Druckhöhe gleich AC. Die Ausflussgeschwindigkeit ist folglich von der Lage des Punktes B ganz unabhängig.

Dasselbe wird folglich auch gelten, wenn das Wasser von allen Seiten her nach der Ausflussöffnung hin zuströmt. Die Ausflussgeschwindigkeit wird dieselbe sein, als wenn keine Umdrehung stattfände, und die Druckhöhe gleich AC wäre.

Es findet dies auch statt, wenn, wie in Fig. 177, C ausserhalb des Gefässes in die Verlängerung der paraboloidischen Fläche fällt. Bezeichnet man durch H die Höhe des Scheitelpunktes O über der Ausflussöffnung, durch y den Abstand der Oeffnung von der Umdrehungs-Axe, durch w die Umdrehungsgeschwindigkeit, so wird:

$$AC = H + \frac{w^2}{2g} \cdot y^2.$$

§. 296.

Wir werden jetzt den Stoss isolirter Wasserstrahlen gegen ruhende und gegen bewegte Körper untersuchen, und die Grösse der dem bewegten Körper durch den Wasserstoss mitgetheilten Arbeit berechnen.

In den ersten Augenblicken des Stosses werden sowohl die ankommenden Wassertheile wie der gestossene Körper durch den Stoss zusammengedrückt werden, und die ersteren daher von dem Körper zurückprallen. Nach einer sehr kurzen Zeit wird sich indessen an dem Körper ein kegelförmiger Wasserkörper bilden, und es werden sich an dessen Oberfläche und ferner an der Oberfläche des Körpers die ankommenden Wasserelemente wie in Canälen von unveränderlicher Form bewegen. Es wird alsdann die Veränderung der Richtung der bewegten Wassertheile nach und nach stattfinden, und folglich fortan keinen Stoss, sondern nur einen Druck der Wasserelemente gegen den Körper bewirken. Diese werden alsdann auch als unzusammendrückbar angenommen werden können, und es wird unnöthig, ihre Molekülarkraft zu berücksichtigen.

In den ersten Augenblicken des Stosses werden dagegen auch

die Molekülarkräfte der zusammengedrückten Wasserelemente auf den gestossenen Körper zurückwirken und die diesem mitgetheilte Arbeit oder der Druck folglich auch im Anfang grösser als nachher sein.

Betrachten wir zuerst den Fall eines Umdrehungskörpers, welcher in der Richtung der Umdrehungs-Axe AX (Fig. 178) von einem horizontalen Wasserstrahl BA getroffen wird. Der Wasserstrahl wird sich dann rings um den Scheitelpunkt A des Umdrehungskörpers vertheilen, und man kann, die ersten Augenblicke des Stosses ausgenommen, annehmen, dass die Wassertheile sich längs der Oberfläche dieses Körpers mit unveränderter relativer Geschwindigkeit bewegen, so dass folglich durch die Reibung beim Hinlaufen der Wasserstrahlen an der Umdrehungsfläche keine lebendige Kraft verloren wird.

Bezeichnen wir durch V die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers, durch v die Geschwindigkeit des gestossenen Körpers in derselben Richtung, durch α den Winkel, welchen die Tangente am Endpunkt B der Generatrix des Umdrehungskörpers mit der Axe AN bildet, durch Q die Wassermenge, welche in einer Zeiteinheit an den Körper anstösst, durch ϱ die Dichtigkeit des Wassers.

Es wird dann $V-v$ die relative Geschwindigkeit sein, womit die Wasserfäden den Körper in A treffen, und womit sie ihn in B und C verlassen. Die absolute Geschwindigkeit der den Umdrehungskörper in B und C verlassenden Wasserfäden wird die Resultante dieser nach der Tangente in B und C gerichteten relativen Geschwindigkeit und der längs der Axe gerichteten Geschwindigkeit des Körpers sein. Bezeichnet man durch u jene absolute Geschwindigkeit der Wasserfäden, so wird:

$$u = \sqrt{(V-v)^2 - 2(V-v)v\cos\alpha + v^2}.$$

Die lebendige Kraft des in einer Zeiteinheit ankommenden Wassers ist gleich: $\frac{1}{2}\varrho QV^2$; die lebendige Kraft desselben Wassers, wenn es den Körper verlässt, wird gleich: $\frac{1}{2}\varrho Qu^2$ sein. Der Ver-

lust an lebendiger Kraft wird folglich gleich: $\frac{1}{2}\varrho Q(V^2-u^2)$, oder, wenn man den Werth von u substituirt, gleich:

$$\tfrac{1}{2}\varrho Q[V^2-(V-v)^2-2(V-v)v\cos\alpha-v^2]=\tfrac{1}{2}\varrho Q[2Vv-2v^2-2(V-v)v\cos\alpha]$$
$$=\varrho Qv(V-v)(1-\cos\alpha).$$

Dieser Verlust wird dann der dem Körper durch den Wasserstoss mitgetheilten Arbeit gleich sein.

Bezeichnet man durch P den Druck oder den Wasserstoss in der Axenrichtung, so wird diese Arbeit gleich Pv, und folglich:

$$Pv=\varrho Qv(V-v)(1-\cos\alpha),$$

oder:

$$P=\varrho Q(V-v)(1-\cos\alpha).$$

Bezeichnet man durch Ω den Inhalt der Ausflussöffnung, oder den Querschnitt des contrahirten Wasserstrahls, so wird:

$$Q=\Omega(V-v),$$

und folglich:

$$P=\varrho\Omega(V-v)^2(1-\cos\alpha).$$

Diese Formeln finden fortwährend statt, wenn auch die Geschwindigkeit v des Körpers sich Null nähert. Befindet der gestossene Körper sich in Ruhe, so ist $v=o$, und

$$P=\varrho\Omega V^2(1-\cos\alpha).$$

Man kann diese letzte Formel auch unmittelbar aus den in §. 291 entwickelten Werthen des Druckes herstellen. Wir haben nämlich hier angenommen, dass die Wasserelemente, welche den gestossenen Körper nach den Richtungen der Tangenten verlassen, dieselbe Geschwindigkeit wie der ankommende Wasserstrahl besitzen. Es müssen dann die Querschnitte der Canäle, in welchen diese Elemente als sich bewegend gedacht werden können, auch an beiden Enden gleich sein. Man braucht alsdann nur in den Formeln des §. 292: $U=V$, $d_tU=o$, $A'=\alpha$, $A=o$, $O=\Omega$, zu setzen, um den Druck in der Richtung der x-Axe zu finden:

$$P=-\varrho\Omega^2V^2\left(\frac{\cos\alpha}{\Omega}-\frac{1}{\Omega}\right)=\varrho\Omega V^2(1-\cos\alpha),$$

wie oben.

Ist der Umdrehungskörper eine auf der Richtung des Wasserstrahls senkrechte Ebene (Fig. 179), so ist $\alpha=90°$, und folglich:

$$P = \varrho\Omega(V-v)^2,$$

wenn die Ebene mit einer Geschwindigkeit v in der Richtung des Stosses bewegt wird, und gleich:

$$P = \varrho\Omega V^2,$$

wenn die Ebene in Ruhe ist.

Im letzten Falle ist, weil $V^2 = 2gH$, wo H die Geschwindigkeitshöhe des Wassers bezeichnet: $P = 2g\varrho\Omega H$, folglich der Druck gleich dem doppelten Gewichte einer Wassersäule, welche zur Grundfläche den Querschnitt Ω des Wasserstrahls, zur Höhe die Geschwindigkeitshöhe des Wassers hat.

Um diese Grösse des Wasserstosses zu erlangen, muss indessen die Ebene hinreichend gross sein, dass die relative Bewegung aller Wasserfäden in der Ebene stattfindet. Ist die Ebene in Ruhe, so muss sie auch nicht zu nahe an der Ausflussöffnung angebracht werden, weil sonst das ausströmende Wasser die Geschwindigkeit: $V = \sqrt{2gH}$ nicht erlangt. Ist die Ebene zu weit von der Oeffnung angebracht, so wird der Stoss wieder kleiner werden wegen der in dem Wasserstrahl stattfindenden Schwingungen. In einem Abstand gleich dem sechsfachen Durchmesser der Oeffnung wird der Stoss am stärksten sein.

Wenn das Wasser, wie in Fig. 180, in der entgegengesetzten Richtung die Fläche verlässt, in welcher es dieselbe trifft, so wird: $\alpha = 180°$, $\cos\alpha = -1$, und folglich:

$$P = 2\varrho\Omega(V-v)^2,$$

oder, wenn $v = o$: $P = 2\varrho\Omega V^2 = 4\varrho g\Omega H$.

Der Druck ist folglich in diesem Falle doppelt so gross, als gegen eine normale Ebene.

Bei dem schiefen Stosse gegen eine ebene Fläche muss man unterscheiden, wenn der Strahl nur nach einigen, und wenn er nach allen Richtungen in der Ebene abfliessen kann.

Ist, wie in Fig. 181, die gestossene ruhende Ebene BC auf zwei einander gegenüber liegenden Seiten eingefasst, so theilt sich

der Strahl in zwei ungleiche Theile, von denen der eine, Q_1, die kleinere Ablenkung $BAP = \alpha$, der andere, Q_2, die grössere Ablenkung $CAP = 180° - \alpha$ annimmt. Es wird daher der Gesammtstoss in der Richtung des Strahls gleich:

$$P = \varrho Q_1 V (1 - \cos \alpha) + \varrho Q_2 V (1 + \cos \alpha).$$

Der von den Wasserelementen auf die Canalfläche FAB in der Richtung von B gegen A ausgeübte Druck wird gleich: $\varrho Q_1 V(1 - \cos \alpha)$; der von den Wasserelementen auf die Canalfläche FAC in der Richtung von C gegen A ausgeübte Druck wird gleich:

$$\varrho Q_2 V(1 + \cos \alpha).$$

Diese müssen dann gleich sein, folglich:

$$\varrho Q_1 V (1 - \cos \alpha) = \varrho Q_2 V (1 + \cos \alpha).$$

Es ist ferner: $Q_1 + Q_2 = Q$.

Hieraus findet man dann:

$$Q_1 = \tfrac{1}{2} Q (1 + \cos \alpha),\ Q_2 = \tfrac{1}{2} Q (1 - \cos \alpha),$$

und, wenn diese Werthe substituirt werden:

$$P = \varrho Q V (1 - \cos^2 \alpha) = \varrho Q V \sin^2 \alpha,$$

oder, wenn man $Q = \Omega V$ substituirt:

$$P = \varrho \Omega V^2 \sin^2 \alpha = 2 g \varrho \Omega H \sin^2 \alpha.$$

Um den Normalstoss N zu finden, sucht man den Druck der beiden Wassertheile Q_1 und Q_2 in der Richtung AN. Die Richtung des zufliessenden Wassers bildet in beiden Canälen den Winkel: $90° + \alpha$ mit der Richtung AN; die Richtung des wegfliessenden Wassers ist auf AN senkrecht. Es wird folglich:

$$N = \varrho \Omega V^2 \left(\cos 90° - \cos (90° + \alpha)\right) = \varrho \Omega V^2 \sin \alpha.$$

Es wird folglich der Parallelstoss P die Componente des Normalstosses sein: $P = N \sin \alpha$.

Hat die schiefgestossene Ebene gar keine Einfassung, so dass sich das Wasser nach allen Richtungen hin auf ihr ausbreiten kann, so werden die Ablenkungswinkel von α bis $180° - \alpha$ variiren, wenn man durch α fortwährend den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung des Wasserstrahls mit der Ebene bildet. Der Strahl wird sich alsdann gleichmässig auf beiden Seiten der Ein-

fallsebene vertheilen, vorausgesetzt, dass auch der Querschnitt des Wasserstrahls durch diese Ebene in zwei symmetrische Theile getheilt wird. Bezeichnet man durch q die Wassermenge, welche um den Winkel α' abgelenkt wird, so wird der von diesem Theil des Wasserstrahls ausgeübte Paralleldruck gleich: $\varrho q (1 - \cos \alpha')$ sein, und der ganze Paralleldruck folglich gleich:

$$P = 2\varrho V \Sigma q (1 - \cos \alpha'),$$

wo das Summationszeichen in Bezug auf alle Werthe von $\alpha' = \alpha$ bis $\alpha' = 180° - \alpha$ auszudehnen ist.

Die Vertheilung des Wasserstrahls nach den verschiedenen Seiten der schiefen Ebene hin hängt wesentlich von der Form des Querschnittes des Wasserstrahls ab. Ist dieser ein längliches Rechteck, dessen längere Seite zur Richtung der Einfallsebene senkrecht ist, so wird die bei weitem grösste Masse des Wassers in den Richtungen α und $180° - \alpha$ abgelenkt werden, und der Parallelstoss des Wasserstrahls folglich beinahe ebenso gross sein, wie in dem vorher betrachteten Falle. Ist dagegen diese längere Seite des Rechtecks mit der Einfallsebene parallel, so wird zwar immer noch eine grosse Wassermenge nach dem kleinsten Winkel α hin abgelenkt werden, indessen eine grössere um 90° senkrecht auf die Einfallsebene abgelenkt werden, und die Grösse des Parallelstosses wird sich folglich mehr: ϱQV nähern.

Ist der Querschnitt des einfallenden Wasserstrahls ein Kreis, so kann man annehmen, dass der in der Richtung der Ebene stattfindende Druck für alle Wasserfäden gleich ist. Es wäre alsdann: $q(1 - \cos \alpha')$ constant gleich: $c\,d\alpha'$ zu setzen, woraus:

$$\Sigma q = c \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{d\alpha'}{1 - \cos \alpha'} = 2c \operatorname{cotg} \alpha,$$

und weil: $\Sigma q = \frac{1}{2} Q$, $c = \frac{1}{4} Q \operatorname{tang} \alpha$.

Es wird ferner:

$$P = 2\varrho V \Sigma q (1 - \cos\alpha') = 2\varrho V c \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} d\alpha' - 4\varrho V c\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$= \varrho Q V \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{tang} \alpha.$$

Der Normalstoss wird gleich:

$$N = 2\varrho V \Sigma q \sin\alpha' = 2\varrho V c \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\sin\alpha' d\alpha'}{1 - \cos\alpha'} =$$

$$= 2\varrho V c \log\text{nat}\left(\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}\right) = \varrho Q V \operatorname{tang}\alpha \log\text{nat} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Das Verhältniss zwischen dem Parallelstoss und dem Normalstoss wird in diesem Falle gleich:

$$\frac{P}{N} = \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\log\text{nat} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha}.$$

§. 297.

Statt eines gestossenen Körpers werden wir jetzt ein Gefäss betrachten, in welches der Wasserstrahl hineintritt.

Nehmen wir zuerst an, das Gefäss sei in Ruhe, und gross genug, um das während einer gewissen Zeit einströmende Wasser zu empfangen. Es wird dann die ganze lebendige Kraft des Wasserstrahls durch die Reibung und durch die Wirbel des Wassers in dem Gefäss absorbirt werden. Bezeichnet man durch Q das Volumen der in einer Zeiteinheit einströmenden Wassermenge, durch ϱ ihre Dichtigkeit, durch V die Geschwindigkeit des Wasserstrahls, so wird die lebendige Kraft des einströmenden Wassers während einer Zeiteinheit gleich: $\frac{1}{2}\varrho Q V^2$ sein. Die dynamische Arbeit der Reibung des Wassers in dem Gefässe und die lebendige Kraft der übrig bleibenden Wirbel wird dann auch in einer Zeiteinheit gleich derselben Grösse sein.

Wird jetzt das Gefäss mit einer Geschwindigkeit v in der Richtung des Wasserstrahls bewegt, so ist die relative Geschwindigkeit des Wassers gegen das Gefäss gleich V — v, und die durch die

Reibung und durch die Wirbel des Wassers im Gefäss in einer Zeiteinheit verlorene Arbeit wird folglich gleich:

$$\tfrac{1}{2}\varrho Q\,(V - v)^2.$$

Die lebendige Kraft des Wassers vor dem Einströmen in das Gefäss war gleich: $\frac{1}{2}\varrho QV^2$; die lebendige Kraft derselben Wassermenge, nachdem sie die Bewegung des Gefässes angenommen hat, ist gleich: $\frac{1}{2}\varrho Qv^2$. Der ganze Verlust der lebendigen Kraft wird folglich gleich:

$$\tfrac{1}{2}\varrho Q\,\{V^2 - v^2 - (V-v)^2\} = \varrho Qv\,(V-v).$$

Dies wird dann auch der dem Gefäss mitgetheilten dynamischen Arbeit gleich sein.

Bezeichnet man durch Ω den Inhalt der Ausflussöffnung, so wird: $Q = \Omega\,(V-v)$ sein. Die dem Gefäss mitgetheilte dynamische Arbeit wird folglich gleich:

$$\varrho\Omega v\,(V - v)^2.$$

Nimmt man aber an, dass statt eines einzigen Gefässes, welches in der Richtung des Wasserstrahls fortbewegt wird, und folglich auch in jedem Zeitraume weniger Wasser empfängt, als während desselben aus der Ausflussöffnung herausströmt, — dass statt dessen mehrere Gefässe einander folgen, und nach und nach denselben Weg beschreiben, wie es bei den Schaufeln eines Wasserrades der Fall ist, so wird das Wasser, während es noch in das erste Gefäss hineinströmt, schon anfangen, in das folgende hineinzuströmen, und es werden die Gefässe alle zusammen in einem hinlänglich grossen Zeitraume eine gleiche Wassermenge empfangen, wie die, welche aus der Ausflussöffnung während desselben Zeitraumes herausströmt. Es wird folglich alsdann: $Q = \Omega V$, und die den Gefässen mitgetheilte Arbeit gleich:

$$\varrho\Omega Vv\,(V-v).$$

Wir haben hier vorausgesetzt, dass das Wasser in dem Gefäss lange genug verbleibt, um seine ganze relative Geschwindigkeit durch die Reibung zu verlieren, so dass es folglich das Gefäss nur mit derselben Geschwindigkeit, welche dieses besitzt,

verlässt. Dieselben Formeln finden aber fortwährend statt, wenn auch das aus dem Gefässe herausfliessende Wasser noch eine gewisse Geschwindigkeit relativ zu dem Gefässe besitzt. Bezeichnen wir durch $\frac{1}{2}\Sigma\frac{p}{g}v'^2$ die lebendige Kraft, welche dieser relativen Geschwindigkeit entspricht. Es wird dann die lebendige Kraft des Wassers, welches das Gefäss verlässt, um so viel grösser sein, folglich statt: $\frac{1}{2}\varrho Q v^2$ gleich: $\frac{1}{2}\varrho Q v^2 + \frac{1}{2}\Sigma\frac{p}{g}v'^2$. Die durch die Reibung und die Wirbel des Wassers im Gefäss verlorene lebendige Kraft wird aber auch dann um ebenso viel kleiner sein, folglich statt: $\frac{1}{2}\varrho Q(V-v)^2$ gleich: $\frac{1}{2}\varrho Q(V-v)^2 - \frac{1}{2}\Sigma\frac{p}{g}v'^2$. Die Summe dieser lebendigen Kräfte wird folglich die frühere, und ebenso die dem Gefässe mitgetheilte Arbeit, welche gleich der Differenz der ursprünglichen lebendigen Kraft und jener Summe ist.

Findet die Bewegung des Gefässes nicht in der Richtung des Wasserstrahls statt, so muss man die Oeffnung des Gefässes sehr gross, oder auch mehrere Gefässe annehmen, welche wie die Schaufeln eines Wasserrades, nach und nach den Wasserstrahl empfangen. Die durch die Bewegung des Wassers in den Gefässen verlorene dynamische Arbeit wird in diesem Falle gleich der lebendigen Kraft der Wassermenge Q sein, wenn als deren Geschwindigkeit die relative Geschwindigkeit des Wassers in Bezug auf das Gefäss angenommen wird. Bezeichnet man durch α den Winkel, welchen die Richtungen der beiden Bewegungen mit einander bilden, so wird diese relative Geschwindigkeit gleich:

$$\sqrt{V^2 - 2Vv\cos\alpha + v^2},$$

und folglich die dynamische Arbeit der Reibung und die lebendige Kraft der in den Gefässen fortdauernden Wasserwirbel gleich:

$$\tfrac{1}{2}\varrho Q(V^2 - 2Vv\cos\alpha + v^2).$$

Die lebendige Kraft des Schwerpunkts des Wassers im Gefäss wird gleich: $\frac{1}{2}\varrho Q v^2$; die ursprüngliche lebendige Kraft des Wassers war

gleich: $\frac{1}{2}\varrho Q V^2$. Der ganze Verlust der lebendigen Kraft wird folglich gleich:

$$\frac{1}{2}\varrho Q \{V^2 - v^2 - (V^2 - 2Vv\cos\alpha + v^2)\} = \varrho Q v (V\cos\alpha - v).$$

Es wird dies auch der dem Wasserrade mitgetheilten dynamischen Arbeit gleich sein. Setzt man $Q = \Omega V$, so findet man diese Arbeit gleich:

$$\varrho \Omega V v (V\cos\alpha - v).$$

Bezeichnet man durch P den Druck in der Richtung der Bewegung der einander folgenden Gefässe oder Schaufeln, so wird diese Arbeit gleich: Pv, und folglich:

$$P = \varrho \Omega V (V\cos\alpha - v).$$

§. 298.

Wenn ein fester Körper sich in einer unbegrenzten Flüssigkeit bewegt, oder, wenn ein fester Körper in eine bewegte Flüssigkeit gebracht wird, so erleidet derselbe einen Druck, welcher von der Form und Grösse des Körpers, so wie auch von der Dichtigkeit der Flüssigkeit und von der Geschwindigkeit der einen oder der anderen Masse abhängt. Die Ursache dieses hydraulischen Druckes ist die Trägheit der Flüssigkeit, deren Gleichgewichts- und Bewegungszustand geändert wird, und, obgleich von geringerem Einflusse, die Adhäsion der Wassertheile, welche durch die Bewegung von einander getrennt oder an einander verschoben werden.

Bewegt sich ein Körper A (Fig. 182), welcher in eine Flüssigkeit ganz untergetaucht ist, mit einer gewissen gleichförmigen Geschwindigkeit von A nach B, so schiebt er eine gewisse Anzahl von Flüssigkeitsmolekülen vor sich her, und zwingt sie zu beiden Seiten der Vorderfläche CD wegzufliessen mit einer Geschwindigkeit, welche mit der Geschwindigkeit V und mit den transversalen Dimensionen des Körpers wächst. Die Flüssigkeitstheilchen, welche sich auf dem Wege des Körpers befinden, werden auf diese Weise abgelenkt und folgen gewissen Bahnen zur Seite des Körpers, und es werden ihnen in diesen Bahnen die Flüssigkeitsele-

mente folgen, welche nach und nach ihren Platz in Bezug auf den Körper einnehmen.

Trifft das bewegte Wasser einen in Ruhe befindlichen Körper, so werden die Wassertheilchen ebenso von dem Körper aus ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt, und laufen in Wasserfäden von unveränderter Form an den Seiten des Körpers her. An der Hinterfläche des Körpers vereinigen sich diese Wasserfäden wieder und bilden hier durch ihre Zusammenbiegung mehrere Paare von Wirbeln, deren Drehungsrichtungen, wie in Fig. 182 und 183 dargestellt, gegen einander abwechselnd sind. Wenn der Körper eine hinreichende Länge in der Richtung der Bewegung hat, werden auch andere kleinere Wirbel an den beiden Seiten in m und m′ stattfinden.

Bei schwimmenden Körpern findet die Bewegung der Wassertheilchen auf gleiche Weise statt. Nur werden hier nicht die Wirbel, welche durch die unter dem Körper hinströmenden Wasserfäden erregt werden, wie bei untergetauchten Körpern, den durch die oberen Wasserfäden erregten Wirbeln begegnen, und sie zeigen daher besondere Phänomene im Kielwasser des Körpers.

Wie bei dem Stosse isolirter Wasserstrahlen wird auch hier, sowohl wenn der Körper in einer ruhenden Flüssigkeit bewegt wird, als wenn er den Stoss der bewegten Flüssigkeit empfängt, eine gewisse Wassermenge sich dem Körper anhängen, und zwar an den beiden Endflächen desselben. Es kommt dies daher, dass die Wassertheile, welche genöthigt sind, in einer zu der der Bewegung senkrechten Richtung abzuweichen, so wie auch die an der Seite oder hinter dem Körper in wirbelnder Bewegung dem Körper folgenden Wassertheile in Bezug auf den Körper in Ruhe sind, und gleichsam einen Theil seiner Masse bilden. Es ist diese immer wechselnde, aber gleichbleibende Wassermenge insbesondere von Einfluss, wenn die Bewegung des Körpers ungleichförmig wird. Beobachtungen über die Schwingungen des Pendels im Wasser haben gezeigt, dass diese Wassermenge sehr gross sein kann; sie

scheint von der Grösse der Geschwindigkeit unabhängig zu sein, und nur von der Form des Körpers abzuhängen. Bei einem in der Axenrichtung bewegten prismatischen Körper hat Dubnat das Verhältniss des Volumens dieser anhängenden Wassermenge zum Volumen des Körpers durch die Formel:

$$n = 0{,}13 + 0{,}705 \frac{\sqrt{A}}{L},$$

ausgedrückt gefunden, wenn A den Querschnitt des Prismas, L dessen Länge bezeichnet. Weil AL das Volumen des Prismas ist, so wird nach dieser Formel das Volumen der anhängenden Wassermenge gleich:

$$nAL = 0{,}13\,AL + 0{,}705\,A\sqrt{A}.$$

Bei einer Ebene, welche senkrecht auf die Richtung ihrer Bewegung ist, wäre $L = 0$ anzunehmen, und folglich das Volumen der anhängenden Wassermenge gleich:

$$0{,}705\,A\sqrt{A}.$$

Bei einer Kugel hat er das Verhältniss n gleich 0,6 gefunden.

§. 299.

Die durch die Bewegung eines festen Körpers in einer ruhenden Flüssigkeit oder durch den Widerstand eines ruhenden Körpers gegen eine bewegte Flüssigkeit hervorgebrachte Abweichung der Wassertheilchen findet zu beiden Seiten des Körpers nur auf eine gewisse Entfernung statt. Die Flüssigkeit bewegt sich folglich wie in einem cylindrischen Canal LML'M', dessen Wände parallel mit der Richtung der Bewegung sind. Der Abfluss des Wassers findet folglich hier wie durch eine ringförmige Oeffnung statt, welche durch die Wände dieses fingirten Canals LML'M' und durch die Seitenflächen des Körpers gebildet wird. Die Wirbel, welche sich bei prismatischen Körpern hinreichender Länge an den Seiten bilden, haben dann dieselbe Ursache, wie diejenigen, welche bei dem Ausflusse des Wassers durch cylindrische Ansatzröhren in

diesen stattfinden, wenn sie lang genug sind, um einen vollen Ausfluss hervorzubringen.

Der Querschnitt des fingirten Canals LML'M' scheint verschiedener Grösse zu sein, je nachdem der Körper sich in Ruhe im bewegten Wasser befindet, oder umgekehrt in ruhendem Wasser bewegt wird.

Im ersten Fall kann man die transversalen Dimensionen des fingirten Canals gleich $2{,}_5$ der entsprechenden Dimensionen des Körpers annehmen, im zweiten Falle gleich $3{,}_5$.

§. 300.

Betrachten wir zuerst die Form der Wasserfäden an der Vorderseite des prismatischen Körpers, oder der zur Richtung der Bewegung des Wassers senkrechten Ebene. Es werden hier die Wasserfäden, welche der Axe des Prismas (Fig. 183) oder der Ebene (Fig. 184) am nächsten sind, am stärksten gebogen werden, die, welche den Seitenflächen des fingirten Canals LML'M' am nächsten sind, gar nicht gebogen werden. Eine durch die Wendepunkte der Wasserfäden gehende Fläche, bc und de, wird die gegen die Mitte a der Ebene convexen Theile dieser Wasserfäden von den concaven scheiden. Der Druck der Wassertheilchen, welche sich längs dieser Fäden wie in engen Canälen bewegen, wird überall gegen diese Canäle von der concaven nach der convexen Seite hin gerichtet sein, und am grössten bei den am stärksten gekrümmten Canälen sein. Der Druck der Flüssigkeit wird folglich von Lb bis Bac und von L'e bis Bad hin wachsen, und die von beiden Seiten her gegen Ba stattfindenden Drucke einander aufheben. Die Geschwindigkeit der Wassertheilchen wird folglich auch grösser und die Querschnitte der von ihnen beschriebenen Canäle werden kleiner sein an der Vorderseite des Körpers von a bis c und d, als längs den Seiten des fingirten Canals LML'M'.

Betrachten wir jetzt den Theil der Wasserfäden, welcher sich zwischen den Flächen der Wendepunkte cb und de und dem Quer-

schnitt des contrahirten Strahls mn und m'n' befindet. Die Krümmung der Wasserfäden findet hier in entgegengesetzter Richtung statt. Der Druck wird folglich von innen nach aussen zu wachsen und folglich, weil er an der Grenze Ln, L'n', gleich dem statischen Druck der Flüssigkeit sein muss, von hier nach Cm und Dm' zu abnehmen und kleiner als der statische Druck sein. Die Geschwindigkeit der Wassertheile muss auch unter dem Einfluss des von innen nach aussen gerichteten, durch die Biegung der Wasserfäden hervorgerufenen Druckes in derselben Richtung hin zunehmen.

Wegen dieser verschiedenen Geschwindigkeiten der Wassertheilchen in demselben Querschnitte der verschiedenen Wasserfäden wird die lebendige Kraft des Wassers in der zwischen dem Körper und den Seiten LML'M' des fingirten Canals stattfindenden ringförmigen Ausflussöffnung grösser sein, als die aus einer durchschnittlichen Geschwindigkeit hergeleiteten. Es ist nämlich das Mittel der Quadrate verschiedener Grössen immer grösser, als das Quadrat der Mittel dieser Grössen.

§. 301.

Betrachten wir jetzt eine Ebene, CD (Fig. 184), welche in eine unbegrenzte Flüssigkeit eingetaucht ist, und nehmen wir an, dass diese Flüssigkeit sich senkrecht gegen die feste Ebene bewegt.

Bezeichnen wir durch A den Flächeninhalt der Ebene, durch A' den Flächeninhalt eines Querschnittes des fingirten Cylinders LML'M', durch m den Contractionscoefficienten, durch V die Geschwindigkeit des Wassers vor der Ebene, durch v die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in dem contrahirten Querschnitte, dessen Grösse gleich m (A'—A) wird, durch n einen Factor, grösser als die Einheit, mit welchem man nach dem vorigen Paragraph bei der Berechnung der lebendigen Kraft der Flüssigkeit in diesem contrahirten Querschnitte die mittlere Geschwindigkeit v

multipliciren muss; durch ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, durch P und P′ die mittleren Drucke des Wassers auf die Flächeneinheit vor und hinter der Ebene CD.

Es wird dann wegen der Continuität der als unzusammendrückbar angenommenen Flüssigkeit:

$$m(A'-A)v = A'V, \text{ folglich: } v = \frac{A'V}{m(A'-A)}.$$

Die Masse der während eines Zeitelementes durchströmenden Flüssigkeit wird gleich: $\varrho A'Vdt$. Die lebendige Kraft dieser Masse vor der ringförmigen Oeffnung wird folglich gleich: $\frac{1}{2}\varrho A'Vdt \,.\, V^2$, und ihre lebendige Kraft in dem contrahirten Querschnitte gleich: $\frac{1}{2}\varrho A'Vdt\,(nv)^2$. Der Zuwachs der lebendigen Kraft wird folglich gleich:

$$\tfrac{1}{2}\varrho A'Vdt\,((nv)^2 - V^2).$$

Der Druck der Flüssigkeit auf den Querschnitt A′ vor der festen Ebene ist gleich PA′, und dessen elementäre Arbeit folglich gleich: $PA'Vdt$. Der Druck der Flüssigkeit auf den Querschnitt $m(A'-A)$ des contrahirten Strahls ist gleich: $P'm(A'-A)$, und die elementäre Arbeit dieses Druckes folglich gleich: $-P'm(A'-A)vdt$, oder weil: $m(A'-A)v = A'V$, gleich: $-P'A'Vdt$.

Die Gleichung der lebendigen Kraft wird folglich:

$$\tfrac{1}{2}\varrho A'Vdt[(nv)^2 - V^2] = A'Vdt(P-P'),$$

woraus:

$$P - P' = \tfrac{1}{2}\varrho[(nv)^2 - V^2].$$

Bezeichnet man durch W den Widerstand der Ebene gegen die Bewegung des Wassers, so wird dieser gleich dem Unterschied des Druckes der Flüssigkeit auf beiden Seiten der festen Ebene CD sein, und folglich:

$$W = (P-P')A = \tfrac{1}{2}\varrho A[(nv)^2 - V^2].$$

Es ist aber oben gefunden: $v = \frac{A'V}{m(A'-A)}$; dieser Werth substituirt giebt dann:

$$W = \tfrac{1}{2}\varrho A\left(\frac{n^2}{m^2} \cdot \frac{A'^2}{A'^2 - A^2} - 1\right)V^2.$$

Der Widerstand W wird folglich der Dichtigkeit der Flüssigkeit, der gestossenen Ebene und dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sein. Der Coefficient:

$$\frac{n^2}{m^2} \cdot \frac{A'^2}{(A'-A)^2} - 1 = \frac{n^2}{m^2} \cdot \frac{\left(\frac{A'}{A}\right)^2}{\left(\frac{A'}{A} - 1\right)^2} - 1,$$

welcher von der Grösse der gestossenen Ebene, so wie von der Geschwindigkeit der Flüssigkeit unabhängig ist, wird der Widerstandscoefficient genannt. Durch diesen ausgedrückt wird folglich der Druck des bewegten Wassers gegen eine senkrecht zu der Richtung der Bewegung ruhende Ebene gleich:

$$W = \tfrac{1}{2}\varrho A \zeta V^2 = \zeta \cdot g\varrho A \cdot \frac{V^2}{2g} = \zeta \cdot p \cdot A \frac{V^2}{2g},$$

wenn man durch $p = g\varrho$ das Gewicht einer Volumeneinheit der Flüssigkeit bezeichnet. Es wird folglich der Widerstand gleich dem Produkte des Widerstandscoefficienten mit dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Grundfläche die feste Ebene A ist, und deren Höhe die Geschwindigkeitshöhe $\frac{V^2}{2g}$ ist.

Die obige Formel wird auch fortwährend stattfinden, wenn zu der festen Ebene noch irgend ein Vordertheil hinzukommt, nur wird der Contractionscoefficient m verschiedene von der Form dieses Vordertheils abhängige Werthe annehmen. Dieselben sind denjenigen ähnlich, welche bei unvollkommener Contraction bei verschiedenen Ausflussöffnungen stattfinden (§. 257). Auch der Coefficient n wird verschiedene von m abhängige Werthe annehmen, indem mit der Contraction auch die Form der Wasserfäden geändert wird und somit auch die verschiedenen Geschwindigkeiten in demselben Querschnitte.

Die obige Formel gilt auch für die Bewegung fester Körper in einer ruhenden Flüssigkeit, nur ist alsdann, wie im §. 299 bemerkt, das Verhältniss $\frac{A'}{A}$ grösser. Während man bei einem ru-

henden Körper $\frac{A'}{A} = (2{,}5)^2 = 6{,}25$ annehmen kann, wird bei einem bewegten Körper in einer ruhenden Flüssigkeit $\frac{A'}{A} = (3{,}5)^2 = 12{,}25$.

§. 302.

Wenn die Länge des prismatischen Körpers in der Richtung der Bewegung grösser als der dreifache Abstand der Seitenflächen des Körpers von den Seiten des fingirten Canals LML'M' ist, so wird der Ausfluss ebenso stattfinden, wie bei einem cylindrischen Ansatzrohre, wenn dieses lang genug ist, um einen vollen Ausfluss zu bilden. Es werden dann die Wassertheile, welche sich mit der mittleren Geschwindigkeit v durch den contrahirten Querschnitt $m(A'-A)$ bewegen, an diejenigen anstossen, welche sich mit der kleineren mittleren Geschwindigkeit $v' = mv$ bewegen.

Wäre die Geschwindigkeit vor wie nach dem Stosse in demselben Querschnitte überall gleich, so würde diese plötzliche Aenderung der Geschwindigkeit der Masse $\varrho A'Vdt$ von v bis v' Wirbel in dem Wasser hervorbringen, welche die lebendige Kraft: $\frac{1}{2}\varrho A'Vdt(v-v')^2$ absorbiren würden. Wegen des Unterschiedes der Geschwindigkeiten in demselben Querschnitte wird man aber statt $(v-v')^2$ den mittleren Werth des Quadrates des Geschwindigkeitsunterschiedes annehmen können. Weil die Wasserfäden nach dem Stosse keine Biegung erleiden, kann man v' als constant annehmen. Es ist jetzt $n^2 v^2$ der mittlere Werth der Quadrate der Geschwindigkeiten im contrahirten Wasserstrahl vor dem Stosse, und es wird folglich der mittlere Werth der Quadrate der Geschwindigkeitsunterschiede gleich $n^2 v^2 - 2vv' + v'^2$ sein, oder gleich: $(v-v')^2 + (n^2-1)v^2$, und es wird folglich die lebendige Kraft, welche in dem durch den Stoss hervorgebrachten Wirbel fortbesteht, gleich: $\frac{1}{2}\varrho A'Vdt\left((v-v')^2 + (n^2-1)\right)v^2$. Die Gleichung der lebendigen Kraft wird dann:

$$\tfrac{1}{2}\varrho A'Vdt(v'^2 - V^2) + \tfrac{1}{2}\varrho A'Vdt.\left((v-V')^2 + (n^2-1)v^2\right) = A'Vdt.(P-P').$$

Hieraus findet man dann den Widerstand gleich:

$$W = (P - P')A = \tfrac{1}{2}\varrho A\,[v'^2 - V^2 + (v - v')^2 + (n^2 - 1)\,v^2].$$

Bemerkt man jetzt, dass

$$A'V = m(A' - A)\,v = (A' - A)\,v',$$

folglich:

$$v = \frac{A'}{m(A' - A)}\,V, \quad v' = \frac{A'}{A' - A}\,.\,V,$$

so wird:

$$W = \tfrac{1}{2}\varrho A \zeta V^2,$$

wo:

$$\zeta = \left(\frac{A'}{A' - A}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + (n^2 - 1)\,.\,\frac{1}{m^2}\right) - 1,$$

$$= \left(\frac{A'}{A' - A}\right)^2 \left(\frac{n^2}{m^2} - 2\left(\frac{1}{m} - 1\right)\right) - 1.$$

Dieser Werth des Widerstandscoefficienten ist kleiner, als der Werth dieses Coefficienten bei einer Ebene oder kurzen prismatischen Körpern, und der Widerstand eines prismatischen Körpers nimmt folglich ab, wenn die Länge bis zu einer gewissen Grenze zunimmt.

Ist die Länge des prismatischen Körpers grösser, so wird man die Reibung des Wassers an den Seiten des Körpers und an den Seiten LM und L'M' der umgebenden, mit einer kleineren Geschwindigkeit bewegten Flüssigkeit nicht vernachlässigen können, sondern muss die dynamische Arbeit dieser Reibung mitrechnen. Bezeichnet man durch p und p' die Perimeter des Körpers und des Canals LML'M', durch l die Länge des Prismas, so wird die an den Seiten des Prismas stattfindende Reibung gleich:

$$\varrho p l\,(\alpha v' + \beta v'^2).$$

Die an dem Canal LML'M' derselben Länge stattfindende Reibung wird gleich:

$$\varrho p l\left(\alpha(v' - V) + \beta\,(v' - V)^2\right),$$

weil die Geschwindigkeit des Wassers innerhalb LML'M' gleich v', ausserhalb desselben gleich V, folglich die relative Geschwindigkeit

gleich $v' - V$ wird. Die elementäre Arbeit dieser Reibung wird folglich gleich:

$$\left[\varrho p l(\alpha v' + \beta v'^2) + \varrho p' l\left(\alpha(v' - V) + \beta(v' - V)^2\right)\right] . v' dt.$$

Dieses Glied muss dann in der Gleichung der lebendigen Kraft auf der rechten Seite zugefügt werden. Man findet auf diese Weise den Widerstand gleich:

$$W = \tfrac{1}{2}\varrho A(\zeta V^2 + \zeta' V),$$

wo:

$$\zeta = \left(\frac{A'}{A' - A}\right)^2 \left(\frac{n^2}{m^2} - 2\left(\frac{1}{m} - 1\right)\right) + \frac{2\beta l(pA'^2 + p'A^2)}{(A' - A)^3} - 1$$

$$\zeta' = \frac{2\alpha l(pA' + p'A)}{(A' - A)^2}.$$

§. 303.

Ist der prismatische Körper mit einem spitzeren Hintertheil versehen (Fig. 185), so werden auch hier ähnliche Wirbel wie an den Seiten des Prismas stattfinden. Bezeichnet man durch A'' den Inhalt der auf der Axe des Prismas senkrechten Endfläche, durch v'' die dieser entsprechende mittlere Geschwindigkeit, so wird:

$$A'V = (A' - A)v' = (A' - A'')v'',$$

und folglich:

$$v' = \frac{A'}{A' - A''} V.$$

Die Masse $\varrho A' V dt$, welche die Geschwindigkeit v' in v'' ändern muss, erleidet hierdurch einen Verlust von der in den Wirbeln fortbestehenden lebendigen Kraft, dessen Grösse gleich:

$$\tfrac{1}{2}\varrho A' V dt (v' - v'')^2$$

sein würde, wenn die Geschwindigkeiten überall in demselben Querschnitte gleich wären. Nimmt man auf die Ungleichheit der Geschwindigkeiten in dem hinteren Querschnitte Rücksicht, so wird man dagegen diesen Verlust an lebendiger Kraft gleich:

$$\tfrac{1}{2}\varrho A' V dt [(v' - v'')^2 + (n'^2 - 1)v''^2]$$

annehmen können, wo n' ein von der Form des Hintertheils ab-

hängiger Coefficient ist, welcher immer grösser als die Einheit sein muss.

Dieses Glied muss dann in der Gleichung der lebendigen Kraft auf der linken Seit hinzugefügt werden, und im ersten Gliede statt v' substituirt $n'v''$ werden.

Bezeichnet man durch P'' den mittleren Druck der Flüssigkeit auf die Flächeneinheit hinter der Endfläche A'', so wird folglich die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$\tfrac{1}{2}\varrho A'Vdt\big((n'v'')^2 - V^2\big) + \tfrac{1}{2}\varrho A'Vdt\big((v-v')^2 + (n^2-1)v^2\big)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\varrho A'Vdt\big((v'-v'')^2 + (n'^2-1)v''^2\big) = A'Vdt(P-P'').$$

Hieraus findet man dann den Widerstand:

$$W = (P-P'')A = \tfrac{1}{2}\varrho A\big((n'v'')^2V^2 + (v-v')^2 + (n^2-1)v^2$$
$$+ (v'-v'') + (n'^2-1)v''^2\big).$$

Substituirt man hier die Werthe der mittleren Geschwindigkeiten:

$$v = \frac{A'}{m(A'-A)}V,\ v' = \frac{A'}{A'-A}V,\ v'' = \frac{A'}{A'-A''}V,$$

so wird:

$$W = \tfrac{1}{2}\varrho A\zeta V^2,$$

wo:

$$\zeta = \left(\frac{A'}{A'-A}\right)^2\left[n'^2\left(\frac{A'-A}{A'-A''}\right)^2 + \left(\frac{1}{m}-1\right)^2 + \frac{n^2-1}{m^2} + \left(\frac{A-A''}{A'-A''}\right)^2 +\right.$$
$$\left. + (n'^2-1)\left(\frac{A'-A}{A'-A''}\right)^2\right] - 1 = \left(\frac{A'}{A'-A}\right)^2\left\{\frac{n^2}{m^2} - 2\left(\frac{1}{m}-1\right) +\right.$$
$$\left. + \left[\left(\frac{A-A''}{A'-A''}\right)^2 - 1\right] + (2n'^2-1)\left(\frac{A'-A}{A'-A''}\right)^2\right\} - 1 =$$
$$= \left(\frac{A'}{A'-A}\right)^2\left[\frac{n^2}{m^2} - 2\left(\frac{1}{m}-1\right) - \big(A + A' - 2A'' - (2n'^2-1)(A'-A)\big)\right.$$
$$\left. \times \frac{A'-A}{(A'-A'')^2}\right] - 1.$$

Es wird hier, weil $2n'^2-1$ eine kleine Grösse ist:

$$A + A' > 2A'' + (2n'^2-1)(A'-A),$$

und es wird folglich der Widerstand des prismatischen Körpers durch das zugefügte Hintertheil noch mehr verringert.

§. 304.

Vergleichen wir jetzt die in den vorigen Paragraphen entwickelten Formeln mit den Beobachtungen über den Widerstand verschiedener Körper.

Für den Widerstandscoefficienten einer Ebene haben wir die Formel gefunden:

$$\zeta = \left(\frac{A'}{A' - A}\right)^2 \cdot \frac{n^2}{m^2} - 1.$$

Nach den Versuchen von Dubnat und Duchemin ist bei einer ruhenden Ebene in bewegter Flüssigkeit: $\zeta = 1{,}865$, bei einer bewegten Ebene in ruhender Flüssigkeit: $\zeta = 1{,}433$.

Es wäre hiernach im ersten Falle:

$$\left(\frac{A'}{A' - A}\right)^2 \cdot \frac{n^2}{m^2} = 2{,}865,$$

im zweiten Falle:

$$\left(\frac{A'}{A' - A}\right)^2 \cdot \frac{n^2}{m^2} = 2{,}433.$$

Nimmt man an, dass bei einem ruhenden Körper in bewegter Flüssigkeit $\frac{A'}{A} = 6{,}25$, bei einem bewegten Körper in einer ruhenden Flüssigkeit $\frac{A'}{A} = 12{,}25$ ist, so wird im ersten Falle:

$$\left(\frac{A'}{A' - A}\right)^2 = \left(\frac{25}{21}\right)^2,$$

im zweiten Falle:

$$\left(\frac{A'}{A' - A}\right)^2 = \left(\frac{49}{45}\right)^2.$$

Diese Werthe substituirt geben: $\frac{n^2}{m^2}$ gleich: 2,021 und gleich: 2,052.

Die Beobachtungen derselben Hydrauliker über den Widerstand der Prismen, deren Länge dreimal so gross als die Quadratwurzel ihres Querschnittes war, geben bei einem ruhenden Prisma in bewegter Flüssigkeit: $\zeta = 1{,}325$, und bei einem bewegten Prisma in ruhender Flüssigkeit: $\zeta = 1{,}102$.

Wir haben §. 302 für diesen Widerstandscoefficienten die Formel gefunden:

$$\zeta = \left(\frac{A'}{A'-A}\right)^2\left(\frac{n^2}{m^2} - 2\left(\frac{1}{m}-1\right)\right) + \frac{2\beta l(pA'^2 + p'A^2)}{(A'-A)^2} - 1,$$

wenn man das mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit und mit dem entsprechenden kleinen Coefficienten α multiplicirte Glied vernachlässigt.

Subtrahirt man diesen Widerstandscoefficienten von demjenigen einer Ebene, so findet man:

$$\left(\frac{A'}{A'-A}\right)^2 . \; 2\left(\frac{1}{m}-1\right) - \frac{2\beta l(pA'^2 + p'A^2)}{(A'-A)^2} = 0{,}54, \text{ oder } 0{,}331.$$

Nimmt man hier die Prismen als quadratisch an, und setzt $l = 3\sqrt{A}$, $p = 4\sqrt{A}$, $p' = 4\sqrt{A'}$, $pl = 12A$, $p'l = 12\sqrt{AA'}$, woraus:

$$\frac{2l(pA'^2 + p'A^2)}{(A'-A)^2} = \frac{24\left[\left(\frac{A'}{A}\right)^2 + \sqrt{\frac{A'}{A}}\right]}{\left(\frac{A'}{A}-1\right)^2}.$$

Substituirt man die Werthe von $\frac{A'}{A}$, so findet man:

$$2{,}834\left(\frac{1}{m}-1\right) - 0{,}2872\ \beta = 0{,}54$$

$$2{,}372\left(\frac{1}{m}-1\right) - 0{,}1078\ \beta = 0{,}331.$$

Setzt man hier $\beta = 0{,}003359$, so findet man:

$$\frac{1}{m} = 1{,}1909, \text{ und } \frac{1}{m} = 1{,}1397.$$

Hieraus findet man den Contractionscoefficienten m für einen ruhenden Körper in bewegter Flüssigkeit gleich 0,84, und für einen bewegten Körper in ruhender Flüssigkeit gleich 0,88. Dass der Contractionscoefficient im letzten Falle grösser ist, stimmt auch mit den Beobachtungen über Ausfluss bei partieller Contraction überein, indem bei einem bewegten Körper in ruhender Flüssigkeit die Strecke, auf welcher die Contraction stattfindet, verhältnissmässig kleiner ist.

Substituirt man diese Werthe in den oben gefundenen Ausdrücken von $\frac{n^2}{m^2}$, so findet man $n^2 = 1{,}426$, und gleich 1,589.

Die Bestimmungen des Verhältnisses $\frac{A'}{A}$, welche diesen Berech-

nungen zu Grunde liegen, sind indessen zu unsicher, als dass man die gefundenen Werthe von n und m als genau annehmen kann.

Die Versuche Borda's geben für Körper verschiedener Form folgende Widerstandscoefficienten:

Für ein dreieckiges Prisma, welches mit einer Kante gegen das Wasser bewegt wurde, wenn der Winkel dieser Kante 90° ist: $\zeta = 1{,}043$, wenn der Winkel 60° ist: $\zeta = 0{,}745$.

Für einen dreieckigen prismatischen Körper mit krummen cylindrischen Seitenflächen von 60° Ausdehnung, jede von der Gegenecke beschrieben: $\zeta = 0{,}559$.

Für einen halben Cylinder, dessen Grundfläche eine halbe Ellipse bildet, welche um ein gleichschenkliges Dreieck beschrieben ist, und dessen convexe Oberfläche gegen das Wasser bewegt wird: $\zeta = 0{,}616$.

Für einen ähnlichen Cylinder, dessen Grundfläche ein halber Kreis ist: $\zeta = 0{,}817$.

Für einen Kegel, dessen Spitze gegen das Wasser bewegt wird, wenn der Scheitelwinkel des Kegels 90° ist: $\zeta = 0{,}99$; wenn der Scheitelwinkel 60° ist: $\zeta = 0{,}778$.

Für eine Halbkugel, deren convexe Oberfläche gegen das Wasser bewegt wird: $\zeta = 0{,}58$.

Für eine ganze Kugel haben Piobert, Morin und Didion gefunden: $\zeta = 0{,}432$.

§. 305.

Vergleicht man die in den §§. 301, 302 und 303 entwickelte Theorie des Widerstandes eines in einer Flüssigkeit eingetauchten Körpers mit der Theorie des Ausflusses durch eine ringförmige Oeffnung, so findet eine merkwürdige Uebereinstimmung statt. Betrachtet man ein cylindrisches Gefäss (Fig. 186) von derselben Form, wie der fingirte Canal LML'M', in welchem das Wasser in einer der Geschwindigkeit V entsprechenden Druckhöhe: $H = \frac{V^2}{2g}$ erhal-

ten wird, wo aber statt eines Bodens der widerstehende Körper angebracht ist, und rings um welchen folglich eine von der Cylinderfläche äusserlich begrenzte ringförmige Ausflussöffnung gebildet wird.

Bezeichnet man hier durch Q die Ausflussmenge in einer Zeiteinheit, so wird, wenn der Kern CD die ringförmige Oeffnung einer Ebene oder eines kurzen prismatischen Körpers ist:

$$Q = m\Omega\sqrt{\frac{2gH}{1-\left(\frac{m\Omega}{O}\right)^2}},$$

wo $\Omega = \frac{A'-A}{n}$, $O = A'$ zu setzen ist, wenn man den Unterschied der Geschwindigkeiten in demselben Querschnitte berücksichtigt. Diese Werthe substituirt geben dann:

$$Q = \frac{m(A'-A)}{n}\sqrt{\frac{2gH}{1-\frac{m^2(A'-A)^2}{n^2A'^2}}}.$$

Hieraus findet man jetzt:

$$2gH\cdot\left(\frac{A'}{Q}\right)^2 = \frac{n^2A'^2}{m^2(A'-A)^2}\left(1-\frac{m^2(A'-A)^2}{n^2A'^2}\right) = \frac{n^2}{m^2}\cdot\frac{A'^2}{(A'-A)^2}-1,$$

oder, weil $2gH = V^2$ ist:

$$\left(\frac{VA'}{Q}\right)^2 = \zeta.$$

Diese letztere Formel wird auch für jede andere Form des widerstehenden Körpers stattfinden. Die Gleichung der lebendigen Kraft des Ausflusses wird nämlich den vorher entwickelten Gleichungen der lebendigen Kraft ganz gleich, wenn man nur statt V die dem ganzen Querschnitte A′ des Cylinders entsprechende Ausflussgeschwindigkeit U, und $g\varrho H$ statt $P-P'$ oder $P-P''$ setzt. Es wird dann die Gleichung der lebendigen Kraft des Ausflusses:

$$\tfrac{1}{2}\varrho A'Udt\,.\,\zeta U^2 = A'\,.\,Udt\,.\,g\varrho H.$$

Hieraus folgt dann:

$$U = \sqrt{\frac{2gH}{\zeta}},\quad Q = A'U = A'\sqrt{\frac{2gH}{\zeta}},$$

und:

$$\zeta = 2gH \cdot \left(\frac{A'}{Q}\right)^2 = \left(\frac{VA'}{Q}\right)^2.$$

Wenn wir wie früher durch w den Widerstandscoefficienten eines solchen Körpers in einer cylindrischen Röhre vom Querschnitte A' bezeichnet, so wird:

$$Q = A' \sqrt{\frac{2gH}{1+w}},$$

und es wird folglich: $\zeta = 1 + w$ sein.

§. 306.

Die Flüssigkeit wird nur so lange als unbegrenzt angesehen werden können, als ihre Grenze sich ausserhalb des fingirten Canals LML'M' befindet. Um die in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln auf den Widerstand der Flüssigkeit in Canälen anwenden zu können, muss daher der Abstand der Canalwände und der freien Oberfläche des Wassers von den Seiten des Körpers bei einem ruhenden Körper in bewegter Flüssigkeit grösser als $\frac{2,5-1}{2} = 0,75$ der entsprechenden transversalen Dimension des Körpers sein, bei einem bewegten Körper in einer ruhenden Flüssigkeit grösser als $\frac{3,5-1}{2} = 1,25$ dieser Dimension sein.

Ist der Abstand des Körpers von den Canalwänden kleiner, so gelten noch die vorher entwickelten Formeln, wenn man nur A' einen kleineren Werth giebt. Es wird dann die Geschwindigkeit des im Zwischenraume durchfliessenden Wassers grösser und der Widerstand auch grösser sein. Ist der Körper näher an der einen Seite des Canals als an der anderen, so wird der an dieser Seite stattfindende vermehrte Druck auch dem Körper eine Seitenbewegung von dieser Wand weg mittheilen.

§. 307.

Wenn der Körper auf der freien Oberfläche der Flüssigkeit schwimmt, so wird sich an seiner Vorderfläche eine Aufstauung bilden von den Wasserfäden, welche jetzt nicht mehr über den Körper hinlaufen können, und an der hinteren Fläche des Körpers aus derselben Ursache eine Vertiefung in dem Niveau der Flüssigkeit. Diese Veränderungen des Niveaus, welche beide mit der Breite des Körpers zunehmen und deren Grösse und Form übrigens von der Gestalt des Vorder- und Hintertheiles abhängen, bringen sowohl unmittelbar, wie auch durch die von ihnen verursachte grössere Geschwindigkeit der Seitenströmungen einen grösseren Widerstand hervor.

Die Aufstauung des Wassers vor dem Körper bringt auch Wellen an der Oberfläche des Wassers hervor, welche von dem Vordertheil des Körpers zu beiden Seiten hin in bestimmten, von der Geschwindigkeit des Körpers oder des Wassers abhängigen Richtungen hinlaufen und bei constanter Geschwindigkeit von unveränderter Form und Richtung in Bezug auf die Axe des Körpers sich in immer neuen Wassertheilen erneuen und sich sehr weit nach beiden Seiten hin erstrecken.

Wird ein vertikaler dünner Stab, von welchem das eine Ende ins Wasser taucht, mit unveränderter Geschwindigkeit vorwärts bewegt, oder strömt das Wasser mit unveränderter Geschwindigkeit gegen einen solchen feststehenden Stab, so bilden sich vor dem Stabe eine Reihe von Wellen, welche in Fig. 187 bei einer Geschwindigkeit von 6 bis 9 Fuss in der Sekunde dargestellt sind. Wird die Geschwindigkeit grösser, so vermehren sich die Wellen, rücken einander zugleich näher und bilden einen spitzeren Winkel mit der Richtung der Bewegung, welche Richtung auch ihre Axe der Symmetrie bildet. Die Gestalt, Anzahl und Richtung dieser Wellen hängt nur von der Gestalt des Körpers an der Wasserlinie und insbesondere von der Geschwindigkeit der Bewegung ab, ist aber

von der Form und Grösse des eingetauchten Körpers sonst unab hängig. Bei einer gewissen Geschwindigkeit vereinigen sie sich in eine einzige grosse Welle.

Dieselben Phänomene zeigen sich auch bei der Bewegung grösserer Körper, wie der Böte oder Schiffe. Die Höhe und Breite der Wellen nehmen mit der Grösse des widerstehenden Körpers zu. Auch die Ausdehnung, in welcher sie sich merkbar machen, nimmt hiermit zu. An den Seiten von Flüssen oder Canälen schlagen diese Wellen an, und bringen oft sehr schädliche Wirkungen hervor.

Nimmt die Geschwindigkeit des schwimmenden Körpers zu, so nähern sich die Wellen sowohl einander, wie ihrer gemeinschaftlichen Axe, welche mit der Richtung der Bewegung zusammenfällt, bis sie bei einer gewissen Geschwindigkeit sich in eine einzige grosse Welle vereinigen, welche zu gleicher Zeit aufhört, gegen die Seiten des Canales oder Stromes anzuschlagen. Die Geschwindigkeit, mit welcher diese einsame Welle hervortritt, scheint von der Form des schwimmenden Körpers unabhängig zu sein und nur von der Tiefe des Wassers bis einer gewissen Grenze hin abzuhängen.

Diese einsame Welle folgt dem Körper und wird, wenn dieser plötzlich in seiner Bewegung gehemmt wird, bei unverändertem Querschnitte des Canals mit unveränderter Geschwindigkeit fortgepflanzt, welche derjenigen gleich ist, welche der Körper besessen hat. Von dem Verhältnisse dieser Geschwindigkeit zur Tiefe des Wassers bis einer gewissen Grenze hin hängt die Stellung des Bootes zur Welle ab

Nach den von dem englischen Ingenieur Scott Russel darüber angestellten zahlreichen Versuchen (*Researches in hydrodynamics*) wird, wenn die relative Geschwindigkeit des schwimmenden Körpers, des Bootes, gegen das Wasser gleich der Geschwindigkeit ist, welche der Hälfte der Tiefe des Wassers von der Wellenhöhe ab gerechnet entspricht, das Boot sich auf der Welle be-

finden, bei einer kleinern Geschwindigkeit wird es etwas hinter, bei einer grösseren Geschwindigkeit wird es etwas vor der Wellenhöhe sein. Es sind diese drei Stellungen, so wie die entsprechende Bewegung des Wassers hinter dem Boot, in den Figuren 188, 189, 190 dargestellt.

Hinter dem Boote werden sich auch Wellen bilden. Es werden diese Wellen von den Strömungen des Wassers zur Seite und unter dem Boote verursacht. Sie werden dem Boote folgen und die Vertiefung auszufüllen streben, welche sich hinter dem Boote zu bilden sucht. Ihre Höhe nimmt ebenso, wie diejenige der vorderen Wellen mit der Geschwindigkeit des Bootes zu. Bei einer hinreichend grossen Geschwindigkeit werden sie sich nach dem Boote zu überstürzen und ihm schäumend folgen. Nimmt das Boot aber die oben erwähnte Geschwindigkeit an, deren entsprechende Druckhöhe, wenigstens bis zu einer gewissen Grenze hin, gleich oder grösser als die halbe Tiefe des Canals ist, und nimmt folglich das Boot die in Fig. 189 oder 190 dargestellte Stellung auf dem Rücken der einsamen Welle an, so werden zu gleicher Zeit diese hinteren Wellen beinahe gänzlich verschwinden. Das Wasser, welches das Boot in seiner Bewegung aus seinem Platz verdrängt, scheint dann statt längs den Seiten und unter dem Boote hin in der der Bewegung entgegengesetzten Richtung wegzuströmen, zu beiden Seiten des Bootes beinahe senkrecht zu dieser Richtung sich zu bewegen und dadurch die einsame Welle zu bilden, auf deren Rücken das Boot ruhig fortschwimmt.

Der Widerstand des Wassers gegen die Bewegung des Bootes wird durch diese Wellen bedeutend geändert. Während die Mitte des Bootes noch hinter der einsamen Hauptwelle sich bewegt, und der Vordertheil des Bootes in diese Welle eintaucht, wird der Widerstand in einem stärkeren Verhältnisse als dem des Quadrates der Geschwindigkeit und des mittleren Querschnittes des eingetauchten Theiles wachsen. Wird aber, was nur durch eine sehr grosse Anstrengung oder durch einen plötzlichen Ruck

möglich ist, das Boot auf den Rücken jener Welle gebracht, so wird auch der Vordertheil weniger im Wasser eintauchen; der Querschnitt, auf welchen der Widerstand des Wassers ausgeübt wird, nimmt folglich ab, die starken Wirbel mit horizontaler Axe, welche sich hinter dem Boote bildeten, verschwinden, und der Widerstand des Wassers gegen die Bewegung des Bootes nimmt daher plötzlich bedeutend ab. Bei einer noch grösseren Geschwindigkeit wird der Widerstand wieder wachsen, und dem Quadrate dieser Geschwindigkeit proportional sein. Die Fig. 191 zeigt diese Veränderungen des Widerstandes nach den Beobachtungen Russels. Es stellen hier die vertikalen Ordinaten die Widerstände dar, welche den durch die horizontalen Abscissen dargestellten Geschwindigkeiten entsprechen. Die parabolische Linie ABC zeigt die Widerstände, welche einer dem Quadrate der Geschwindigkeiten proportionalen Formel entsprechen, wenn der Querschnitt des eingetauchten Theils als constant angenommen wird. Die Linie A'B'C'D' zeigt dagegen die beobachteten Widerstände.

Die Form des eingetauchten Theiles des schwimmenden Körpers, welche bei einer gegebenen Breite den kleinsten Widerstand hervorbringt, wird die Form des kleinsten Widerstandes genannt. Lässt man in der Formel $W = \frac{1}{2}\varrho A\zeta V^2$, A den Flächeninhalt des grössten eingetauchten Querschnittes bezeichnen, wenn das Boot in Ruhe ist, so scheint der niedrigste Werth des Widerstandscoefficienten ζ gleich 0,2 zu sein.

Cap. VI.

Gesetze des Gleichgewichts luftförmig-flüssiger Körper.

§. 308.

Die luftförmig-flüssigen Körper unterscheiden sich von den tropfbar-flüssigen Körpern dadurch, dass sie sich immer nur im zusammengedrückten Zustande zeigen. Auch sind sie in hohem Grade zusammendrückbar, während die tropfbar-flüssigen Körper es so wenig sind, dass man in den Anwendungen der Mechanik sie als unzusammendrückbar annehmen kann.

Die luftförmigen Körper folgen in ihrer Zusammendrückbarkeit nahezu einem sehr einfachen Gesetze. Es ist nämlich das Volumen, welches eine gegebene Menge irgend eines luftförmigen Körpers einnimmt, dem Drucke umgekehrt proportional. Es wird dieses Gesetz nach seinem Erfinder das Mariottesche Gesetz genannt.

Da die Dichtigkeit eines zusammendrückbaren Körpers auch dem Volumen umgekehrt proportional ist, so kann dieses Gesetz auch so ausgesprochen werden, dass die Dichtigkeit eines luftförmigen Körpers immer dem Drucke proportional ist.

Man hat früher dieses Gesetz als absolut genau angenommen. Neuere Beobachtungen von Regnault haben indessen gezeigt, dass bei vermehrtem Drucke die Dichtigkeit etwas kleiner wird, als sie nach diesem Gesetze sein sollte. Nur das Wasserstoffgas scheint eine Ausnahme zu bilden, indem hier die Dichtigkeit etwas grösser wird. Diese Abweichungen sind indessen sehr klein und nur bei sehr grossem Drucke bemerkbar. In den Anwendungen der Mechanik kann man daher dem Mariotteschen Gesetze unbedenklich folgen.

Bezeichnet man, wie im Cap. IV., durch p den in irgend einem Punkte eines luftförmigen Körpers stattfindenden Druck, durch

ϱ die demselben Punkte entsprechende Dichtigkeit, so wird folglich: $p = k\varrho$, wo k eine nur von der Art des luftförmigen Körpers und von der Temperatur abhängige Constante bezeichnet.

Um diese Constante für eine gewisse Temperatur zu bestimmen, braucht man folglich nur die einem gewissen Drucke entsprechende Dichtigkeit des luftförmigen Körpers zu beobachten.

Nach den Beobachtungen Regnaults ist das Gewicht eines Kubikmeters trockener atmosphärischer Luft in Paris bei einer Temperatur von 0° und einem Barometerstande von $0^m,76$ gleich 1,293187 Kilogrammen. Es wäre hiernach, wenn p gleich dem Gewichte von 0,76 Kubikmeter Quecksilber, $g\varrho = 1{,}293187$ Kilogrammen. Es ist jetzt nach Regnault das Gewicht eines Kubikmeters Quecksilber gleich 13595,93 Kilogrammen, und in Paris: $g = 9^m,80896$. Es wäre hiernach für die trockene atmosphärische Luft, wenn das Meter als Längeneinheit angenommen wird, bei 0° Temperatur, $k = \frac{p}{\varrho} = \frac{gp}{g\varrho} = 78376$. Wird der preussische Fuss als Längeneinheit angenommen, so muss man mit dem Quadrate des Verhältnisses dieser Längeneinheiten multipliciren, und es wird daher: $k = 795665$.

Die folgende Tafel giebt das specifische Gewicht der wichtigsten Gasarten, wenn dasjenige der trockenen atmosphärischen Luft als Einheit angenommen wird, bei gleichem Drucke und 0° Temperatur.

	Specifisches Gewicht.
Sauerstoff	1,105642
Wasserstoff	9,069269
Stickstoff	0,971373
Kohlensäure	1,529101
Schweflige Säure	2,2470
Wasser in Gasform	0,6235

Den jeder Gasart für 0° Temperatur entsprechenden Werth des Coefficienten: $k = \frac{p}{\varrho}$ findet man dann, wenn man den für

die trockene atmosphärische Luft oben berechneten Werth mit dem specifischen Gewicht der Gasart dividirt.

§. 309.

Während die Ausdehnung der festen und tropfbar-flüssigen Körper durch die Wärme so klein ist, dass sie in den meisten Anwendungen der Mechanik vernachlässigt werden kann, ist die Ausdehnung der Gasarten viel grösser und muss daher immer in Betracht gezogen werden. Die Ausdehnung der Gasarten durch die Wärme bei constantem Drucke, oder die Zunahme des Drukkes bei constantem Volumen ist bei constanten Gasarten und bei nicht sehr hohen Temperaturen dem Zuwachs der Temperatur proportional. Bezeichnet man durch t die Temperatur nach der hunderttheiligen Scala (Celsius), so wird bei constantem Drucke die Ausdehnung von 0° Temperatur ab im Verhältnisse $1 : 1 + \alpha t$ stattfinden, wo α einen constanten Coefficienten bezeichnet. Dieser Coefficient wird der Ausdehnungscoefficient der betreffenden Gasart genannt.

Man hat lange nach Gay-Lussac angenommen, dass der Ausdehnungscoefficient für alle Gasarten und bei jedem Drucke gleich ist. Neuere Beobachtungen von Magnus und Regnault haben dies indessen widerlegt, und die genaueren Werthe des Ausdehnungscoefficienten bestimmt. Nach diesen ist bei einem Barometerstande von $0^m,76$

für trockene atmosphärische Luft $\alpha = 0,003665$,
- Wasserstoff $\alpha = 0,003659$,
- Kohlensäure $\alpha = 0,003700$,
- Schweflige Säure $\alpha = 0,003903$.

Bei einem grösseren Drucke und einer diesem entsprechenden grösseren Dichtigkeit nimmt der Werth des Ausdehnungscoefficienten etwas zu, bei kleinerem Drucke und kleinerer Dichtigkeit nimmt er etwas ab. Für trockene atmosphärische Luft ist bei einer Dich-

tigkeit von 0,1444 relativ zu derjenigen, welche bei einem Barometerstande von $0^m,76$ stattfindet: $\alpha = 0{,}36482$, bei einer Dichtigkeit von 4,81 ist $\alpha = 0{,}37091$.

§. 310.

Tropfbare Flüssigkeiten von verschiedener Dichtigkeit, welche keine chemische Wirkung auf einander ausüben, lagern sich, wenn sie in einem Gefäss zusammengemischt werden, nach der Ordnung ihrer Dichtigkeit über einander, so dass jede Flüssigkeit von der anderen durch eine Gleichdrucksfläche geschieden ist. Bei Gasen dagegen findet, auch wenn sie keine chemische Wirkung auf einander ausüben, eine ganz gleichförmige Mengung statt, so dass jede Gasart sich ganz gleichförmig durch den ganzen Raum verbreitet. Verschiedene Gasarten, welche durch eine Gleichdrucksfläche geschieden sind, und normal auf diese gleiche Drucke ausüben, halten einander folglich nicht im Gleichgewichte, sondern jede Gasart breitet sich durch die andere hindurch aus, bis der nur von ihr normal auf jede Gleichdrucksfläche ausgeübte Druck von beiden Seiten her gleich ist. Es wird folglich irgend eine Gasart nur von derselben Gasart im Gleichgewicht gehalten werden können, und es wird in einer Mischung verschiedener Gasarten jede für sich im Gleichgewichte sein müssen.

Der Druck irgend einer in einem Gefäss eingeschlossenen Mischung von Gasarten ist genau gleich der Summe der Drucke jeder besonderen Gasart, diese in dem ganzen Gefäss nach dem Mariotteschen Gesetze zurückgeführt. Bezeichnet man durch v das Volumen irgend einer Gasart, durch p den diesem Volumen entsprechenden Druck, durch v′ das Volumen einer zweiten Gasart, welche keine chemische Wirkung auf die erste ausübt, und durch p′ den diesem Volumen entsprechenden Druck, und bringt man beide Gasarten in ein Gefäss, dessen Volumen V ist, so wird der gesammte Druck P dieser Mischung gleich:

$$P = \frac{pv}{V} + \frac{p'v'}{V}, \text{ oder: } PV = pv + p'v'.$$

Da nach dem Mariotteschen Gesetze pv und p'v' constant sind, so wird folglich auch PV constant sein müssen, und das Mariottesche Gesetz muss folglich auch bei einer Mischung von Gasarten stattfinden.

§. 311.

Die aus dem Begriff des flüssigen Zustandes in §§. 225, 226 und 227 hergeleiteten allgemeinen Grundeigenschaften der Flüssigkeiten finden auch bei den luftförmigen Flüssigkeiten oder Gasarten statt. Es wird folglich auch hier im Zustande des Gleichgewichts der Druck in jedem Punkte auf die Fläche des einschliessenden Gefässes normal und in irgend einem Punkte im Inneren nach jeder Richtung hin gleich gross sein; so wird auch irgend ein an der Oberfläche des einschliessenden Gefässes ausgeübter Druck sich mit derselben Intensität überall hin fortpflanzen.

Bezeichnet man durch X, Y, Z die Componenten der auf den Punkt x, y, z wirkenden Kraft, so wird die allgemeine Gleichgewichtsbedingung der Gasarten:

$$dp = \varrho\,(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Es ist hier nach dem Mariotteschen Gesetze $p = k\varrho$, wo k einen von dem Drucke unabhängigen, dagegen von der Temperatur abhängigen Coefficienten bezeichnet. Substituirt man: $\varrho = \frac{p}{k}$, so findet man:

$$\frac{dp}{p} = \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{k}.$$

Wenn Gleichgewicht stattfinden soll, muss folglich: $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollständiges Differential sein. Setzt man daher:

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\varphi,$$

so wird:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\varphi}{k}.$$

Ist die Temperatur überall gleich, so ist k constant, und man findet durch Integration:

$$\log \text{nat} \left(\frac{p}{C}\right) = \frac{\varphi}{k}, \quad \text{oder: } p = Ce^{\frac{\varphi}{k}},$$

wo C eine constante Grösse bezeichnet, welche durch den zu irgend einem Werthe von φ bekannten Werth von p bestimmt wird.

Ist die Temperatur dagegen verschieden in den verschiedenen Punkten, so wird k veränderlich sein. Damit die Gleichgewichtsbedingung dennoch stattfinden soll, muss dann $\frac{d\varphi}{k}$ ein vollständiges Differential sein, und folglich k eine Funktion von φ.

Hieraus folgt dann, dass für denselben Werth von φ, d. h. in derselben Gleichdrucksfläche auch k und folglich auch die Temperatur gleich sein muss. Der Druck und die Dichtigkeit werden dann durch die Formeln:

$$p = Ce^{\int \frac{d\varphi}{k}}, \quad \varrho = \frac{C}{k} e^{\int \frac{d\varphi}{k}}$$

bestimmt.

Betrachtet man z. B. die Erde als eine homogene Kugel, und nimmt man auf ihre Umdrehungsbewegung keine Rücksicht, so sind alle auf die Moleküle der Atmosphäre wirkenden Kräfte gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtet. Die Gleichdrucksflächen werden dann mit der Erde concentrische Kugelflächen sein. Damit Gleichgewicht stattfinden sollte, müsste dann auch die Temperatur in derselben Höhe über der Erdoberfläche überall gleich sein. Weil diese gleiche Temperatur unmöglich ist, wird auch das Gleichgewicht der Atmosphäre unmöglich sein.

§. 312.

Das in §. 233 entwickelte Archimedische Gesetz des Gleichgewichts fester Körper, welche in eine Flüssigkeit eingetaucht sind, gilt auch, wenn die Flüssigkeit eine luftförmige ist. Der

Körper wird in der Luft so viel von seiner Schwere verlieren, als das Gewicht der aus ihrem Platze verdrängten Luftmasse beträgt, oder er wird durch eine diesem Gewicht gleiche Kraft vertikal aufwärts gegen die Richtung der Schwere getrieben. Dieser aufwärts gerichtete Druck geht durch den Schwerpunkt der aus ihrem Platze verdrängten Luftmasse.

Bei der Berechnung der Schwere und des Schwerpunktes dieser Luftmasse muss indessen, wenn die Ausdehnung des Körpers in der vertikalen Richtung sehr gross ist, auf die verschiedene Dichtigkeit der umgebenden Atmosphäre in den verschiedenen Höhen Rücksicht genommen werden.

§. 313.

Denken wir uns einen vertikalen Cylinder, dessen Grundebene die Flächeneinheit ist, durch die ganze Atmosphäre von der Meeresoberfläche an. Betrachten wir einen horizontalen Querschnitt dieses Cylinders in der Höhe z über der Meeresoberfläche. Bezeichnen wir durch p den Druck auf diesen Querschnitt. Es wird dann p gleich dem Gewichte der ganzen höher liegenden Luftmasse. Wird in der Höhe $z + dz$ ein zweiter Querschnitt gelegt, so wird der auf diesen stattfindende Druck: $p + dp$, gleich der ganzen über diesem Querschnitte ruhenden Luftmasse sein. Die Differenz dp muss folglich negativ sein, und $-dp$ gleich dem Gewichte der zwischen beiden Querschnitten befindlichen Luftschicht. Diese Luftschicht ist ein Cylinder, dessen Grundebene die Flächeneinheit, dessen Höhe dz, und dessen Volumen folglich gleich dz Kubikeinheiten ist.

Bezeichnen wir jetzt durch q das Gewicht einer Kubikeinheit Luft an der Meeresoberfläche, bei 45° geographischer Breite, bei 0° Temperatur, und bei dem Drucke P. Es wird dann das Gewicht derselben Luftmasse in der geographischen Breite φ nach §. 6 und §. 145 gleich: $q(1-\beta\cos 2\varphi)$, wo $\beta = 0{,}0025911$. Bei

einer Temperatur von t° wird das Gewicht einer Kubikeinheit derselben Luftart bei unverändertem Drucke gleich: $\frac{q(1-\beta\cos 2\varphi)}{1+\alpha t}$, wo α den Ausdehnungscoefficienten der atmosphärischen Luft bezeichnet. In der Höhe z über der Meeresoberfläche nimmt endlich die Schwere ab im Verhältnisse: $(r+z)^2:r^2$, wenn r den Halbmesser der Erde bezeichnet, und es wird folglich in dieser Höhe das Gewicht einer Kubikeinheit bei unverändertem Drucke und Temperatur gleich:

$$\frac{q(1-\beta\cos 2\varphi)}{1+\alpha t}\cdot\frac{r^2}{(r+z)^2},$$

Bei einer Veränderung des Druckes von P auf p wird endlich nach dem Mariotteschen Gesetze die Dichtigkeit und folglich auch das Gewicht in demselben Verhältnisse geändert werden, und wird folglich gleich:

$$\frac{q(1-\beta\cos 2\varphi)}{1+\alpha t}\cdot\frac{r^2}{(r+z)^2}\cdot\frac{p}{P}.$$

Hieraus findet man endlich das Gewicht der dz Kubikeinheiten grossen Luftschicht gleich:

$$\frac{q(1-\beta\cos 2\varphi)}{1+\alpha t}\cdot\frac{r^2}{(r+z)^2}\cdot\frac{p}{P}\,dz.$$

Dieser Ausdruck soll jetzt gleich: $-dp$ sein, woraus:

$$\frac{dp}{p}=-\frac{q(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha t)}\cdot\frac{r^2dz}{(r+z)^2}.$$

Man kann diese Gleichung auch unmittelbar aus der allgemeinen Gleichgewichtsgleichung:

$$\frac{dp}{p}=\frac{Xdx+Ydy+Zdz}{k}$$

herleiten. Es ist nämlich hier: $X=o$, $Y=o$, $Z=-g'=-g(1-\beta\cos 2\varphi)\cdot\frac{r^2}{(r+z)^2}$, $k=\frac{P}{q}(1+\alpha t)$.

Nimmt man zuerst die Temperatur in der ganzen Höhe der Luftschicht als constant an, so findet man durch Integration:

$$\log\text{nat}\,p=\frac{q(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha t)}\cdot\frac{r^2}{r+z}+C,$$

wo C die durch die Integration eingeführte unbestimmte Constante bezeichnet.

Wird dieser Druck durch die Quecksilberhöhe eines Barometers gemessen, so wird p auch gleich dem Gewichte eines Quecksilbercylinders sein, dessen Höhe die Barometerhöhe, dessen Grundebene die Flächeneinheit ist.

Bezeichnet man durch Q das Gewicht einer Kubikeinheit Quecksilbers an der Meeresoberfläche bei 45° geographischer Breite und bei 0° Temperatur, so wird das Gewicht derselben Kubikeinheit bei 0° Temperatur, $\varphi°$ geographischer Breite und in der Höhe z über der Meeresoberfläche gleich:

$$Q(1 - \beta \cos 2\varphi) \cdot \frac{r^2}{(r+z)^2}.$$

Bezeichnet man jetzt durch h die Barometerhöhe auf 0° Temperatur des Quecksilbers reducirt, so wird:

$$p = Q(1 - \beta \cos 2\varphi) \cdot \frac{r^2}{(r+z)^2} \cdot h = Q(1 - \beta \cos 2\varphi) \cdot \frac{h}{\left(1 + \frac{z}{r}\right)^2}.$$

Dieser Werth von p in der obigen Gleichung substituirt giebt dann:

$$\log \text{nat}\, h + \log \text{nat}\, Q(1 - \beta \cos 2\varphi) - 2 \log \text{nat} \left(1 + \frac{z}{r}\right) = \frac{q(1 - \beta \cos 2\varphi)}{P(1 + \alpha t)} \cdot \frac{r^2}{r+z} + C.$$

Hat man die Barometerhöhe in der geringeren Höhe z' über der Meeresoberfläche bei derselben geographischen Breite und derselben Lufttemperatur beobachtet, und bezeichnet diese durch h', so wird:

$$\log \text{nat}\, h' + \log \text{nat}\, Q(1 - \beta \cos 2\varphi) - 2 \log \text{nat} \left(1 + \frac{z'}{r}\right) = \frac{q(1 - \beta \cos 2\varphi)}{P(1 + \alpha t)} \cdot \frac{r^2}{r+z'} + C.$$

Diese beiden Gleichungen subtrahirt geben dann:

$$\log\operatorname{nat} h' - \log\operatorname{nat} h + 2\log\operatorname{nat}\left(1+\frac{z}{r}\right) - 2\log\operatorname{nat}\left(1+\frac{z'}{r}\right) = \frac{q(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha t)} \cdot \frac{z-z'}{\left(1+\frac{z}{r}\right)\left(1+\frac{z'}{r}\right)}.$$

Hieraus findet man die Höhendifferenz $z - z'$:

$$z - z' = \frac{P(1+\alpha t)}{q(1-\beta\cos 2\varphi)}\left[\log\operatorname{nat} h' - \log\operatorname{nat} h + 2\log\operatorname{nat}\left(1+\frac{z}{r}\right) - 2\log\operatorname{nat}\left(1+\frac{z'}{r}\right)\right] \cdot \left(1+\frac{z}{r}\right)\left(1+\frac{z'}{r}\right).$$

Weil $\frac{z}{r}$ und $\frac{z'}{r}$ immer sehr kleine Grössen sind, kann man hier $\log\operatorname{nat}\left(1+\frac{z}{r}\right)$ und $\log\operatorname{nat}\left(1+\frac{z'}{r}\right)$ nach den Potenzen von $\frac{z}{r}$ und $\frac{z'}{r}$ entwickeln, und sich mit dem ersten Glied dieser Reihe begnügen. Es wird dann:

$$\log\operatorname{nat}\left(1+\frac{z}{r}\right) - \log\operatorname{nat}\left(1+\frac{z'}{r}\right) = \frac{z-z'}{r}.$$

Ebenso wird, wenn man das Produkt der kleinen Grössen $\frac{z}{r}$ und $\frac{z'}{r}$ vernachlässigt:

$$\left(1+\frac{z}{r}\right)\left(1+\frac{z'}{r}\right) = 1 + \frac{z+z'}{r} = 1 + \frac{z-z'}{r} + \frac{2z'}{r}.$$

Substituirt man diese Werthe und bezeichnet den Höhenunterschied $z - z'$ durch Z, so wird:

$$Z = \frac{P(1+\alpha t)}{q(1-\beta\cos 2\varphi)}\left(\log\operatorname{nat} h' - \log\operatorname{nat} h + \frac{2Z}{r}\right)\left(1+\frac{2z'}{r}+\frac{Z}{r}\right)$$

oder, mit Briggischen Logarithmen, wenn $M = 0{,}4342945$ den Modul des Briggischen Logarithmensystems bezeichnet:

$$Z = \frac{P(1+\alpha t)}{Mq(1-\beta\cos 2\varphi)}\left(\log h' - \log h + \frac{2MZ}{r}\right)\left(1+\frac{2z'}{r}+\frac{Z}{r}\right).$$

Setzt man hier der Kürze wegen:

$$\frac{P(1+\alpha t)}{Mq} = T,\quad \frac{1}{1-\beta\cos 2\varphi} = S,\quad \log h' - \log h = u,$$

so wird diese Gleichung:

$$Z = ST\left(u + \frac{2MZ}{r}\right)\left(1+\frac{2z'}{r}+\frac{Z}{r}\right),$$

oder, wenn man die Multiplikation auf der rechten Seite ausführt und die zweite Potenz der kleinen Grösse $\frac{Z}{r}$, so wie das Produkt der kleinen Grössen $\frac{Z}{r}$ und $\frac{z'}{r}$ vernachlässigt:

$$Z = ST \left[u \left(1 + \frac{2z'}{r}\right) + \left(\frac{u + 2M}{r}\right) Z \right].$$

Diese Gleichung in Bezug auf Z aufgelöst, giebt dann:

$$Z = \frac{ST\,u \left(1 + \frac{2z'}{r}\right)}{1 - (u + 2M)\frac{ST}{r}}$$

In dem letzten Gliede des Nenners: $(u + 2M)\frac{ST}{r}$ kann, weil $(u + 2M)\frac{T}{r}$ eine sehr kleine Grösse ist, S, welches immer sehr wenig von der Einheit verschieden ist, gleich der Einheit gesetzt werden. Es wird dann:

$$Z = \frac{STu\left(1 + \frac{2z'}{r}\right)}{1 - (u + 2M)\frac{T}{r}}$$

und hieraus:

$$\log Z = \log u + \log T + \log S + \log\left(1 + \frac{2z'}{r}\right) - \log\left(1 - (u + 2M)\frac{T}{r}\right).$$

Entwickelt man hier die Logarithmen:

$$\log\left(1 + \frac{2z'}{r}\right) \text{ und } \log\left(1 - (u + 2M)\frac{T}{r}\right)$$

in Reihen und berücksichtigt nur das erste Glied jeder Reihe, so wird:

$$\log\left(1 + \frac{2z'}{r}\right) = \frac{2Mz'}{r},$$

$$\log\left(1 - (u + 2M)\frac{T}{r}\right) = -M(u+2M)\frac{T}{r} = -\frac{MTu}{r} - 2\frac{M^2T}{r}.$$

Diese Werthe substituirt geben:

$$\log Z = \log u + \log T + \log S + \frac{2Mz'}{r} + \frac{MTu}{r} + \frac{2M^2T}{r},$$

oder, wenn man der Kürze wegen:

$$\log T + \frac{2M^2T}{r} = A,\ \log S = B,\ \frac{MTu}{r} = C,\ \frac{2Mz'}{r} = D$$

setzt:

$$\log Z = \log u + A + B + C + D.$$

Der Coefficient A hängt nur von der Lufttemperatur t ab, der Coefficient B nur von der geographischen Breite φ, der Coefficient C dagegen sowohl von T wie von u. Es kann dieser letztere Coefficient unter eine andere Form gesetzt werden. Es ist nämlich:

$$\log T = A - \frac{2M^2T}{r},$$

folglich:

$$\log u + \log T = \log u + A - \frac{2M^2T}{r},\ \text{oder}\ uT = 10^{\log u + A - \frac{2M^2T}{r}},$$

und hieraus:

$$C = \frac{MTu}{r} = \frac{M}{r}\,10^{\log u + A - \frac{2M^2T}{r}}$$

Wegen des kleinen Faktors $\frac{M}{r}$ ist die Grösse C immer sehr klein, und man kann daher in dem Exponenten die kleine Grösse $\frac{2M^2T}{r}$ vernachlässigen. Es wird dann:

$$C = \frac{M}{r}\,10^{\log u + A},\ \log C = \log\left(\frac{M}{r}\right) + \log u + A.$$

Es hängt dann der Coefficient C nur von der vorher berechneten Grösse: $\log u + A$ ab.

Der Coefficient: $B = \log S = -\log(1 - \beta \cos 2\varphi)$ kann nach den Potenzen der kleinen Grösse β entwickelt werden, und die höheren Potenzen dieser Grösse können dann vernachlässigt werden. Es wird dann:

$$B = M\beta \cos 2\varphi.$$

Der Coefficient B wird folglich positiv von 0° bis 45° geographischer Breite, negativ von 45° bis 90°. Die complementären Werthe der Breite φ geben bis zu der sechsten Decimalstelle gleiche Werthe des Coefficienten B mit entgegengesetzten Zeichen.

Der Coefficient D hängt nur von der Höhe des untersten Beobachtungsortes über der Meeresoberfläche ab.

§. 314.

Indem wir bei der Entwickelung der vorhergehenden Formeln angenommen haben, dass die Schwere umgekehrt mit dem Quadrate der Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde abnimmt, haben wir die Anziehung der über die Meeresoberfläche emporragenden ausgedehnten Gebirgsmassen vernachlässigt. Die obigen Formeln gelten daher nur von Höhenmessungen, welche auf hohen Thürmen, in Luftballons u. dergl. stattfinden. Finden sie dagegen auf einem ausgedehnten Gebirge statt, so nimmt nach §. 146 die Anziehung der Erde langsamer ab, nämlich als wäre der Halbmesser der Erde $\frac{8}{5}$ Mal so gross, als er in der Wirklichkeit ist. Man braucht dann nur in den vorhergehenden Formeln $\frac{8}{5}$r statt r zu setzen. Es wird dann:

$$A = \log T + \frac{5M^2T}{4r},\ \log C = \log\left(\frac{5M}{8r}\right) + \log u + A,\ D = \frac{5Mz'}{4r}.$$

Es ist ferner die Höhe des Quecksilbers im Barometer als auf 0° Temperatur reducirt angenommen. Der Ausdehnungscoefficient des Quecksilbers für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers ist gleich: 0,00018. Bezeichnet man durch τ die Temperatur des Quecksilbers, durch b die beobachtete Barometerhöhe, so wird:

$$b = h\,(1 + 0{,}00018\,\tau),$$

und hieraus:

$$\log h = \log b - M\,.\,0{,}00018\,\tau = \log b - 0{,}000078\,\tau.$$

Bezeichnet b′ die an der unteren Station beobachtete Barometerhöhe und τ' die Temperatur des Quecksilbers während dieser Beobachtung, so wird ebenso:

$$\log h' = \log b' - 0{,}000078\,\tau'.$$

Hieraus findet man dann:

$$u = \log h' - \log h = \log b' - \log b - 0{,}000078\,(\tau' - \tau).$$

§. 315.

Es bezeichnet in den vorhergehenden Formeln q das Gewicht einer Kubikeinheit Luft an der Meeresoberfläche, bei 45° geographischer Breite, bei 0° Temperatur und bei dem Drucke P. Bezeichnet man durch ϱ die Dichtigkeit dieser Luft, so wird: $q = g\varrho$, $P = k\varrho$, und folglich $\frac{P}{q} = \frac{k}{g}$. Wird der preussische Fuss als Längeneinheit angenommen, so ist (§. 308):

$$k = 795665,\ g = 31{,}243\,94.$$

Es wäre hiernach: $\frac{P}{q} = 25466$ preuss. Fuss.

Es gelten indessen diese Zahlen nur von der trockenen atmosphärischen Luft. Weil die Wasserdämpfe leichter als die atmosphärische Luft sind, so kann man $\frac{P}{q}$ etwas grösser, gleich 25500 Fuss annehmen.

Der Ausdehnungscoefficient α ist für trockene atmosphärische Luft und für das hunderttheilige Thermometer gleich: 0,003665. Weil aber die Menge der Wasserdämpfe, welche in der Atmosphäre vorhanden sind, mit der Temperatur wächst, und folglich das Gewicht einer Kubikeinheit Luft aus diesem Grunde abnimmt, kann man α etwas grösser, gleich 0,00385 annehmen.

Es wird hiernach bei Anwendung des hunderttheiligen Thermometers:

$$T = \frac{25500\ (1 + 0{,}00385\ t)}{0{,}4342945} = 58716(1 + 0{,}00385\ t).$$

Der mittlere Halbmesser der Erde ist gleich 20 288 000 preuss. Fuss.

§. 316.

Tafeln
zu Höhenmessungen mit dem Barometer.

Zur leichteren Benutzung der obigen Formel:

$$\log z = \log u + A + B + C + D$$

sind in den folgenden Tafeln die Werthe der Grössen A, B, C, D mit 5 Decimalen berechnet.

Es sind bei der Berechnung dieser Grössen die am Ende des §. 314 angegebenen Formeln angewendet worden und folglich die Anziehung des über der Meeresoberfläche erhöhten Landestheils berücksichtigt.

Tafel I.

Das Argument dieser Tafel ist die als constant angenommene Lufttemperatur t.

$$A = \log T + \frac{5M^2T}{4r} = \log T + 0{,}000\,000\,0\,1162\ T.$$

t	A	t	A	t	A	t	A
−		−		+		+	
29°	4,71795	14°	4,74535	1°	4,77111	16°	4,79544
28°	4,71983	13°	4,74711	2°	4,77277	17°	4,79701
27°	4,72170	12°	4,74887	3°	4,77443	18°	4,79858
26°	4,72357	11°	4,75062	4°	4,77609	19°	4,80015
25°	4,72543	10°	4,75237	5°	4,77773	20°	4,80171
24°	4,72727	9°	4,75410	6°	4,77937	21°	4,80326
23°	4,72911	8°	4,75583	7°	4,78101	22°	4,80482
22°	4,73095	7°	4,75756	8°	4,78263	23°	4,80635
21°	4,73278	6°	4,75928	9°	4,78425	24°	4,80788
20°	4,73460	5°	4,76099	10°	4,78587	25°	4,80941
19°	4,73641	4°	4,76269	11°	4,78748	26°	4,81093
18°	4,73821	3°	4,76439	12°	4,78908	27°	4,81246
17°	4,74000	2°	4,76608	13°	4,79068	28°	4,81397
16°	4,74179	1°	4,76776	14°	4,79227	29°	4,81548
15°	4,74357	0°	4,76944	15°	4,79386	30°	4,81698

Tafel II.

Das Argument dieser Tafel ist die geographische Breite φ. B ist positiv von $\varphi = 0°$ bis $\varphi = 45°$, negativ von $\varphi = 45°$ bis $\varphi = 90$.

$$B = M\beta \cos 2\varphi = 0{,}0011251 \cos 2\varphi.$$

φ	± B	φ	± B	φ	± B
0° oder 90°	0,00113	15° oder 75°	0,00097	30° oder 60°	0,00056
1° — 89°	0,00112	16° — 74°	0,00095	31° — 59°	0,00053
2° — 88°	0,00112	17° — 73°	0,00093	32° — 58°	0,00049
3° — 87°	0,00112	18° — 72°	0,00091	33° — 57°	0,00046
4° — 86°	0,00111	19° — 71°	0,00089	34° — 56°	0,00042
5° — 85°	0,00111	20° — 70°	0,00086	35° — 55°	0,00038
6° — 84°	0,00110	21° — 69°	0,00084	36° — 54°	0,00035
7° — 83°	0,00109	22° — 68°	0,00081	37° — 53°	0,00031
8° — 82°	0,00108	23° — 67°	0,00078	38° — 52°	0,00027
9° — 81°	0,00107	24° — 66°	0,00075	39° — 51°	0,00023
10° — 80°	0,00106	25° — 65°	0,00072	40° — 50°	0,00020
11° — 79°	0,00104	26° — 64°	0,00069	41° — 49°	0,00016
12° — 78°	0,00103	27° — 63°	0,00066	42° — 48°	0,00012
13° — 77°	0,00101	28° — 62°	0,00063	43° — 47°	0,00008
14° — 76°	0,00099	29° — 61°	0,00060	44° — 46°	0,00004
				45°	0,00000

Tafel III.

Das Argument dieser Tafel ist: A + log u.

$$\log C = \log\left(\frac{5M}{8r}\right) + \log u + A = 0{,}126 - 81 + \log u + A.$$

A + log u	C	A + log u	C	A + log u	C
2,6	0,00001	3,3	0,00003	4,0	0,00013
2,7	0,00001	3,4	0,00003	4,1	0,00017
2,8	0,00001	3,5	0,00004	4,2	0,00021
2,9	0,00001	3,6	0,00005	4,3	0,00027
3,0	0,00001	3,7	0,00007	4,4	0,00034
3,1	0,00002	3,8	0,00008	4,5	0,00042
3,2	0,00002	3,9	0,00011	4,6	0,00053

Tafel IV.

Das Argument dieser Tafel ist die Höhe z' der unteren Station.

$$D = 0{,}000\,000\,0428\ z'.$$

z'	D	z'	D	z'	D
Fuss		Fuss		Fuss	
1000	0,00004	10000	0,00043	19000	0,00081
2000	0,00009	11000	0,00047	20000	0,00086
3000	0,00013	12000	0,00051	21000	0,00090
4000	0,00017	13000	0,00056	22000	0,00094
5000	0,00021	14000	0,00060	23000	0,00098
6000	0,00026	15000	0,00064	24000	0,00103
7000	0,00030	16000	0,00068	25000	0,00107
8000	0,00034	17000	0,00073	26000	0,00111
9000	0,00039	18000	0,00077	27000	0,00115

§. 317.

Bei der Integration der Differentialgleichung:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{q(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha t)} \cdot \frac{r^2 dz}{(r+z)^2}$$

haben wir bisher die Temperatur der Atmosphäre t als constant in der Höhe zwischen den beiden Beobachtungsorten angenommen. Es ist dies bei grösseren Höhen nie der Fall. Gewöhnlich nimmt man dann das Mittel der an beiden Stellen beobachteten Lufttemperaturen als eine constante gleichmässige Lufttemperatur an, und sucht hiernach A in der Tafel I. Wenn der Unterschied der beiden Lufttemperaturen klein ist, kann diese Methode ohne merklichen Fehler angewendet werden, nicht aber, wenn dieser Unterschied grösser ist.

Man wird alsdann richtiger die Temperatur als gleichmässig von der unteren zur oberen Station abnehmend annehmen können. Bezeichnet man durch t die Lufttemperatur an dem höchsten Beobachtungsorte in der Höhe z über der Meeresoberfläche, durch t' diejenige an dem unteren Beobachtungsorte in der Höhe z', end-

lich durch τ die Lufttemperatur in irgend einer dazwischenliegenden Höhe ζ, so wird nach dieser Voraussetzung einer gleichmässigen Abnahme der Lufttemperatur:

$$\frac{t'-\tau}{t'-t}=\frac{\zeta-z'}{z-z'},\ \text{woraus: } \tau=\frac{t'z-tz'}{z-z'}-\frac{t'-t}{z-z'}\cdot\zeta,$$

oder, wenn man der Kürze wegen:

$$\frac{t'z-tz'}{z-z'}=a,\ \frac{t'-t}{z-z'}=b,$$

setzt:

$$\tau=a-b\zeta.$$

Dieser Werth in der Gleichung:

$$\frac{dp}{p}=-\frac{q(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha\tau)}\cdot\frac{r^2 d\zeta}{(r+\zeta)^2}$$

substituirt giebt dann:

$$\frac{dp}{p}=-\frac{q(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha a-\alpha b\zeta)}\cdot\frac{r^2 d\zeta}{(r+\zeta)^2}.$$

Setzt man hier der Kürze wegen:

$$\frac{\alpha b}{1+\alpha a}=m,$$

so kann diese Gleichung unter folgende Form gebracht werden:

$$\frac{dp}{p}=-\frac{q(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha a)}\cdot\frac{r^2 d\zeta}{(1-m\zeta)(r+\zeta)^2}.$$

Decomponirt man den Bruch auf der rechten Seite, so findet man:

$$\frac{d\zeta}{(1-m\zeta)(r+\zeta)^2}=\frac{1}{1+mr}\cdot\frac{d\zeta}{(r+\zeta)^2}+\frac{m}{(1+mr)^2}\cdot\frac{d\zeta}{r+\zeta}+\frac{m^2}{(1+mr)^2}\cdot\frac{d\zeta}{1-m\zeta},$$

und hieraus durch Integration:

$$\int\frac{d\zeta}{(1-m\zeta)(r+\zeta)^2}=-\frac{1}{1+mr}\cdot\frac{1}{r+\zeta}+\frac{m}{(1+mr)^2}\cdot\log\text{nat}\left(\frac{r+\zeta}{1-m\zeta}\right)+C.$$

Die obige Differentialgleichung giebt folglich:

$$\log\text{nat}\, p=\frac{q(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha a)(1+mr)}\cdot\left\{\frac{r^2}{r+\zeta}-\frac{mr^2}{1+mr}\log\text{nat}\left(\frac{r+\zeta}{1-m\zeta}\right)\right\}+C=$$

$$\frac{q(1-\beta\cos 2\varphi)r}{P(1+\alpha a)(1+mr)}\cdot\left\{\frac{1}{1+\frac{\zeta}{r}}-\frac{mr}{1+mr}\log\text{nat}\left(\frac{r+\zeta}{1-m\zeta}\right)\right\}+C.$$

Bezeichnet man jetzt durch λ die Barometerhöhe in der Höhe ζ, so ist:

$$\log \text{nat}\, p = \log \text{nat}\, \lambda + \log \text{nat}\Big(Q(1-\beta \cos 2\varphi)\Big) - 2 \log \text{nat}\left(1+\frac{\zeta}{r}\right).$$

Es wird folglich:

$$\log \text{nat}\, \lambda + \log \text{nat}\Big(Q(1-\beta \cos 2\varphi)\Big) - 2 \log \text{nat}\left(1+\frac{\zeta}{r}\right) =$$
$$= \frac{q(1-\beta \cos 2\varphi)r}{\lambda(1+\alpha a)(1+mr)} \left\{ \frac{1}{1+\frac{\zeta}{r}} - \frac{mr}{1+mr} \log \text{nat}\left(\frac{r+\zeta}{1-m\zeta}\right) \right\} + C.$$

Setzt man hier erst: $\zeta = z'$, $\lambda = h'$, dann $\zeta = z$, $\lambda = h$, und subtrahirt, so findet man:

$$\log \text{nat}\, h' - \log \text{nat}\, h - 2 \log \text{nat}\left(1+\frac{z'}{r}\right) + 2 \log \text{nat}\left(1+\frac{z}{r}\right) =$$
$$= \frac{q(1-\beta \cos 2\varphi)r}{P(1+\alpha a)(1+mr)} \left\{ \frac{\frac{z}{r} - \frac{z'}{r}}{\left(1+\frac{z}{r}\right)\left(1+\frac{z'}{r}\right)} + \frac{mr}{1+mr} \log \text{nat}\left(\frac{1+\frac{z}{r}}{1+\frac{z'}{r}} \cdot \frac{1-mz'}{1-mz} \right) \right\}.$$

Setzt man jetzt wie früher den Höhenunterschied: $z - z' = Z$, so wird:

$$a = \frac{t'z - tz'}{z - z'} = t' + (t'-t) \cdot \frac{z'}{Z};\ b = \frac{t'-t}{Z};$$

$$m = \frac{\alpha b}{1+\alpha a} = \frac{\alpha(t'-t)}{(1+\alpha t')Z + \alpha(t-t)z'};$$

$$1 + mr = \frac{(1+\alpha t')Z + \alpha(t'-t)(r+z')}{(1+\alpha t')Z + \alpha(t'-t)z'};$$

$$\frac{(1+\alpha a)(1+mr)}{r} = \frac{(1+\alpha t')Z + \alpha(t'-t)(r+z')}{rZ}$$
$$= \frac{(1+\alpha t')\frac{Z}{r} + \alpha(t'-t)\left(1+\frac{z'}{r}\right)}{Z};$$

$$\frac{mr}{1+mr} = \frac{\alpha(t'-t)}{(1+\alpha t')\frac{Z}{r} + \alpha(t'-t)\left(1+\frac{z'}{r}\right)};$$

$$\frac{1-mz'}{1-mz} = \frac{(1+\alpha t')Z}{(1+\alpha t')Z + \alpha(t'-t)z' - \alpha(t'-t)z} =$$
$$= \frac{(1+\alpha t')Z}{(1+\alpha t')Z - \alpha(t'-t)Z} = \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}.$$

Diese Werthe substituirt, geben dann die Gleichung:

$$\log\text{nat}\, h' - \log\text{nat}\, h - 2\log\left(1+\frac{z'}{r}\right) + 2\log\text{nat}\left(1+\frac{z'+Z}{r}\right) =$$

$$= \frac{q(1-\beta\cos 2\varphi)Z}{P\left[(1+\alpha t')\frac{Z}{r}+\alpha(t'-t)\left(1+\frac{z'}{r}\right)\right]}\left\{\frac{\frac{Z}{r}}{\left(1+\frac{z'}{r}\right)\left(1+\frac{z'+Z}{r}\right)}+\frac{\alpha(t'-t)}{(1+\alpha t')\frac{Z}{r}+\alpha(t'-t)\left(1+\frac{z'}{r}\right)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\log\text{nat}\left(\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}\cdot\frac{1+\frac{z'+Z}{r}}{1+\frac{z'}{r}}\right)\right\}.$$

Setzt man wie früher:

$$\log\text{brig}\, h' - \log\text{brig}\, h = u,\ \text{folglich: } \log\text{nat}\, h' - \log\text{nat}\, h = \frac{u}{M}$$

$$\log\text{nat}\left(1+\frac{z'}{r}\right) = \frac{z'}{r},\ \log\text{nat}\left(1+\frac{z'+Z}{r}\right) = \frac{(z'+Z)}{r},$$

so wird die linke Seite dieser Gleichung:

$$\frac{u}{M} - \frac{2Z}{r},$$

und man findet dann:

$$Z = \frac{P\left(u+\frac{2MZ}{r}\right)\left[(1+\alpha t')\frac{Z}{r}+\alpha(t'-t)\left(1+\frac{z'}{r}\right)\right]}{Mq(1-\beta\cos 2\varphi)\left\{\frac{\left(\frac{Z}{r}\right)}{\left(1+\frac{z'}{r}\right)\left(1+\frac{z'+Z}{r}\right)}+\frac{\alpha(t'-t)}{(1+\alpha t')\frac{Z}{r}+\alpha(t'-t)\left(1+\frac{z'}{r}\right)}\log\text{nat}\left(\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}\cdot\frac{1+\frac{z'+Z}{r}}{1+\frac{z'}{r}}\right)\right\}}$$

Der Werth der kleinen Grösse $\frac{Z}{r}$ auf der rechten Seite dieser Gleichung muss dann erst annäherungsweise berechnet werden nach dem §. 313 und nach den Tabellen §. 316, indem man von der Voraussetzung einer gleichen mittleren Temperatur ausgeht. Bezeichnet man den auf diese Art annäherungsweise gefundenen Höhenunterschied durch Z', wo:

$$\log Z' = \log u + A + B + C + D,$$

und die Grösse A hier aus der Tafel I. des §. 316 nach der mittleren Temperatur $\frac{t+t'}{2}$ genommen worden ist, so ist nach §. 313:

$$Z' = \frac{P\left(1+\alpha\frac{(t'+t)}{2}\right)}{Mq(1-\beta\cos 2\varphi)}\left(u+\frac{2MZ'}{r}\right)\left(1+\frac{z'}{r}\right)\left(1+\frac{z'+Z'}{r}\right).$$

Es wird folglich:

$$\frac{Z}{Z'}=\frac{(1+\alpha t')\frac{Z'}{r}+\alpha(t'-t)\left(1+\frac{z'}{r}\right)}{\left\{\frac{Z'}{r}+\frac{\alpha(t'-t)\left(1+\frac{z'}{r}\right)\left(1+\frac{z'+Z}{r}\right)}{(1+\alpha t')\frac{Z'}{r}+\alpha(t'-t)\left(1+\frac{z'}{r}\right)}\log\text{nat}\left(\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}\cdot\frac{1+\frac{z'+Z}{r}}{1+\frac{z'}{r}}\right)\right\}\left[1+\alpha\frac{(t'+t)}{2}\right]}.$$

Gewöhnlich sind $\frac{z'}{r}$ und $\frac{Z'}{r}$ sehr klein in Bezug auf $\alpha(t'-t)$. In diesem Falle können diese Grössen vernachlässigt werden, und man findet:

$$\frac{Z}{Z'}=\frac{\alpha(t'-t)}{\left(1+\alpha\frac{(t'+t)}{2}\right).\log\text{nat}\left(\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}\right)}=\frac{M\alpha(t'-t)}{\left(1+\frac{\alpha(t'+t)}{2}\right)\log\text{brig}\left(\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}\right)}.$$

Entwickelt man die Logarithmen im Nenner nach den steigenden Potenzen des Ausdehnungscoefficienten α, so findet man:

$$\log\text{nat}\left(\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}\right)=\alpha(t'-t)-\tfrac{1}{2}\alpha^2(t'^2-t^2)+\tfrac{1}{3}\alpha^3(t'^3-t^3)-\tfrac{1}{4}\alpha^4(t'^4-t^4)+\ldots.$$

$$=\alpha(t'-t)[1-\tfrac{1}{2}\alpha(t'+t)+\tfrac{1}{3}\alpha^2(t'^2+t't+t^2)-\tfrac{1}{4}\alpha^3(t'^3+t'^2t+t't^2+t^3)+\ldots.]$$

und hieraus:

$$\frac{Z}{Z'}=\frac{1}{[1+\frac{1}{2}\alpha(t'+t)][1-\frac{1}{2}\alpha(t'+t)+\frac{1}{3}\alpha(t'^2+t't+t^2)-\frac{1}{4}\alpha^3(t'^3+t'^2t+t't^2+t^3)+\ldots.]}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{12}\alpha^2(t'^2-2t't+t^2)-\frac{1}{12}\alpha^3(t'^3-t'^2t-t't^2+t^3)+\ldots.}=$$

$$=1-\tfrac{1}{12}\alpha^2(t'-t)^2+\tfrac{1}{12}\alpha^3(t'+t)(t'-t)^2+\ldots.$$

Hieraus findet man ferner:

$$\log\text{brig}\,Z=\log\text{brig}\,Z'-M\left[\tfrac{1}{12}\alpha^2(t'-t)^2-\tfrac{1}{12}\alpha^3(t'+t)(t'-t)^2+\ldots.\right].$$

Substituirt man hier den Werth des Ausdehnungscoefficienten: $\alpha=0{,}00385$, so findet man:

$$\frac{M}{12}\alpha^2=0{,}000\,000\,536,\quad\frac{M}{12}\alpha^3=0{,}000\,000\,002.$$

Es wird folglich:

$$\log Z=\log Z'-0{,}000\,000\,536\,(t'-t)^2+0{,}000\,000\,002\,(t'+t)(t'-t)^2.$$

Das letzte Glied kann hier unbedenklich vernachlässigt werden, und man hat folglich, wenn man statt log Z' seinen früher gefundenen Werth substituirt:

$$\log Z = \log u + A + B + C + D - 0{,}000\,000\,536\,(t'-t)^2,$$

wo A nach der mittleren Lufttemperatur $\frac{t'+t}{2}$ bestimmt ist.

§. 318.

Die Formeln der vorhergehenden Paragraphen setzen eine einfache Luftart voraus. Die atmosphärische Luft dagegen besteht aus einer Mischung mehrerer Gasarten, welche keinen chemischen Einfluss auf einander üben. Bezeichnet man durch p', q', α' die der einen Gasart entsprechenden Werthe der Grössen p, q, α, durch p'', q'', α'' die der zweiten Gasart entsprechenden u. s. w., so wird, weil nach §. 310 jede Gasart für sich nach dem Mariotteschen Gesetze ausgedehnt wird:

$$\log \text{nat}\, p' = \frac{q'(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha' t)} \cdot \frac{r^2}{r+z} + C',$$

$$\log \text{nat}\, p'' = \frac{q''(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha'' t)} \cdot \frac{r^2}{r+z} + C'', \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnet man jetzt durch $p'_\circ$, $p''_\circ$, ... die an der Meeresoberfläche stattfindenden Werthe der Grössen p', p'', ..., so wird:

$$\log \text{nat}\left(\frac{p'}{p'_\circ}\right) = -\frac{q'(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha' t)} \cdot \frac{z}{1+\frac{z}{r}},$$

$$\log \text{nat}\left(\frac{p''}{p''_\circ}\right) = -\frac{q''(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha'' t)} \cdot \frac{z}{1+\frac{z}{r}}, \text{ u. s. w.}$$

und hieraus:

$$p' = p'_\circ\, e^{\frac{-q'(1-\beta\cos\varphi)}{P(1+\alpha' t)} \cdot \frac{z}{1+\frac{z}{r}}};$$

$$p'' = p''_\circ\, e^{\frac{-q''(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha'' t)} \cdot \frac{z}{1+\frac{z}{r}}}; \text{ u. s. w.}$$

Der Druck p der atmosphärischen Luft in der Höhe z ist der Summe dieser partiellen Drucke gleich, und es wird folglich:

$$p = p'_\circ e^{\frac{-q'(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha' t)} \cdot \frac{z}{1+\frac{z}{r}}} + p''_\circ e^{\frac{-q''(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha'' t)} \cdot \frac{z}{1+\frac{z}{r}}} + \cdots$$

Bezeichnet man durch $\mathfrak{p}$ den unter der Voraussetzung einer einzigen Gasart gefundenen Werth des Druckes in der Höhe z, so ist:

$$\mathfrak{p} = p_\circ e^{\frac{-q(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha t)} \cdot \frac{z}{1+\frac{z}{r}}}.$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$\left(\frac{q'}{1+\alpha' t} - \frac{q}{1+\alpha t}\right) \cdot \frac{1-\beta\cos 2\varphi}{P} = \gamma'$$

$$\left(\frac{q''}{1+\alpha'' t} - \frac{q}{1+\alpha t}\right) \cdot \frac{1-\beta\cos 2\varphi}{P} = \gamma'' \text{ u. s. w.,}$$

so wird folglich:

$$p = \mathfrak{p}\left\{\frac{p'_\circ}{p_\circ} . e^{-\gamma' \frac{z}{1+\frac{z}{r}}} + \frac{p''_\circ}{p_\circ} . e^{-\gamma'' \frac{z}{1+\frac{z}{r}}} + \ldots\right\}.$$

Bezeichnet man jetzt durch u′, u″, u. s. w. die Bruchtheile, welche das Verhältniss bezeichnen, in welchem die Bestandtheile der Atmosphäre an der Meeresoberfläche vorkommen, so dass folglich: $u' + u'' + \ldots = 1$, so wird:

$$p'_\circ = u' . p_\circ, \; p''_\circ = u'' . p_\circ, \ldots$$

und folglich:

$$p = \mathfrak{p}\left\{u' e^{-\gamma' \frac{z}{1+\frac{z}{r}}} + u'' e^{-\gamma \frac{z}{1+\frac{z}{r}}} + \ldots\right\},$$

oder da man wegen der Kleinheit der Coefficienten γ', γ'', u. s. w. im Exponent $\frac{z}{r}$ vernachlässigen kann:

$$p = \mathfrak{p}\,(u' e^{-\gamma' z} + u'' e^{-\gamma'' z} + \ldots)$$

Bei dem Gebrauche der im §. 313 entwickelten Formeln muss man folglich:

$$p = Q(1 - \beta\cos 2\varphi) \cdot \frac{h}{\left(1+\frac{z}{r}\right)^2},$$

und folglich auch die beobachtete Barometerhöhe h mit:

$$u'e^{-\gamma' z} + u''e^{-\gamma'' z} + \dots$$

dividiren.

Es geht hieraus endlich hervor, dass, wenn man:

$$\log \text{brig}(u'e^{-\gamma' z} + u''e^{-\gamma'' z} + \dots) = f(z),$$

setzt, so wird man zur Grösse: $u = \log h' - \log h$ die Correction:

$$f(z) - f(z') = f(Z + z') - f(z')$$

addiren müssen.

Die vollständige Formel für Höhenmessungen mit dem Barometer wird hiernach:

$$\log Z = \log u + A + B + C + D - 0{,}000\,000536\,(t'-t)^2 + \\ + f(Z + z') - f(z').$$

§. 319.

Die atmosphärische Luft ist ein Gemenge von vier Luftarten: Stickstoff, Sauerstoff, kohlensaurem Gas und Wasserdampf.

Der Wasserdampf ist in sehr verschiedenen Mengen vorhanden, nach den verschiedenen Jahres- und Tageszeiten, nach der Temperatur, der Höhe und Tiefe des Beobachtungsortes, nach der Nähe von Gewässern und aus anderen Gründen. Wir haben diese Gasart früher durch eine passende Erhöhung des Ausdehnungscoefficienten α und des Verhältnisses $\frac{p}{q}$ berücksichtigt.

Das kohlensaure Gas findet sich in noch geringeren Mengen, welche auch mit den Jahres- und Tageszeiten veränderlich sind. Dem Volumen nach macht dasselbe nur von 0,00037 bis 0,00062 der atmosphärischen Luft aus.

Die Hauptbestandtheile der Atmosphäre sind Stickstoff und Sauerstoff. Die Volumenmengen dieser beiden Gasarten stehen an der Meeresoberfläche in einem Verhältnisse, welches zwischen $\frac{79}{21}$ $\frac{79{,}1}{20{,}9}$ schwankt. Das specifische Gewicht dieser Gasarten, dasjenige

der atmosphärischen Luft als Einheit angenommen, ist nach §.308: 0,971373 und 1,105642.

Es wird folglich, wenn wir nur diese beiden Gasarten in Betracht zieht:

$$q' = 0{,}971373\ q, \quad q'' = 1{,}105642\ q.$$

Die Ausdehnungscoefficienten beider Gasarten kann man gleich derjenigen der atmosphärischen Luft annehmen, $\alpha' = \alpha'' = \alpha$.

Es wird folglich:

$$\gamma' = \frac{(q'-q)\ (1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha t)} = -\ 0{,}028627\ .\ \frac{q(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha t)},$$

$$\gamma'' = \frac{(q''-q)\ (1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha t)} = +\ 0{,}105642\ .\ \frac{q(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha t)}.$$

Diese beiden Grössen sind wegen des kleinen Faktors $\frac{q}{P}$ sehr klein, und man kann daher den von der Einheit nur wenig verschiedenen Faktor $\frac{1-\beta\cos 2\varphi}{1+\alpha t}$ vernachlässigen. Substituirt man endlich den Werth von $\frac{q}{P} = \frac{1}{25500}$, so findet man:

$$\gamma' = -\ 0{,}000\,001\,123, \quad \gamma'' = +\ 0{,}000\,004\,143.$$

Es ist ferner $u' = 0{,}79$, $u'' = 0{,}21$.

Hieraus kann man dann die folgende Tafel der Grösse:

$$f(z) = u'e^{-\gamma' z} + u''e^{-\gamma'' z}$$

für die verschiedenen Werthe von z berechnen.

T a f e l V.

z	f(z)	z	f(z)	z	f(z)
Fuss		Fuss		Fuss	
1000	0,00001	11000	0,00020	21000	0,00059
2000	0,00002	12000	0,00023	22000	0,00064
3000	0,00003	13000	0,00026	23000	0,00069
4000	0,00005	14000	0,00029	24000	0,00074
5000	0,00006	15000	0,00033	25000	0,00080
6000	0,00008	16000	0,00037	26000	0,00086
7000	0,00010	17000	0,00041	27000	0,00092
8000	0,00012	18000	0,00045	28000	0,00098
9000	0,00014	19000	0,00049	29000	0,00104
10000	0,00017	20000	0,00054	30000	0,00111

§. 320.

Das Mischungsverhältniss des Stickstoffs und Sauerstoffs, welches an der Meeresoberfläche ohngefähr $\frac{79}{21}$ ist, nimmt mit der Höhe zu. Es wird in der Höhe z gleich:

$$\frac{p'_0}{p''_0} \cdot e^{\frac{(q''-q')(1-\beta\cos 2\varphi)}{P(1+\alpha t)} \cdot \frac{z}{1+\frac{z}{r}}} = \frac{u'}{u''} \cdot e^{(\gamma''-\gamma')z},$$

wenn man im Exponent $\frac{z}{r}$ vernachlässigt.

Substituirt man hier die Werthe von γ'' und γ', und nimmt das Verhältniss an der Meeresoberfläche gleich $\frac{79}{21}$ an, so wird dieses Verhältniss in der Höhe z gleich:

$$\frac{79}{21} \cdot e^{0{,}000\,005\,266\,.\,z}$$

In der Höhe von 20000 Fuss wäre dieses Verhältniss gleich: $\frac{80{,}7}{19{,}3}$, bei 10,000 Fuss Höhe gleich: $\frac{79{,}9}{20{,}1}$.

§. 320.

Kennt man den Höhenunterschied Z zweier Stationen, und den an der oberen Station stattfindenden auf 0° Temperatur reducirten Barometerstand h, so kann man aus der vorhergehenden Formel umgekehrt den an der Meeresoberfläche stattfindenden Barometerstand h′ finden.

Wenn der Höhenunterschied Z und folglich auch der Unterschied der Barometerhöhen klein ist, kann die Berechnung sehr vereinfacht werden.

Es ist in diesem Falle: $h' - h = \delta$, $u = \log h' - \log h = \log\left(\frac{h'}{h}\right) = \log\left(\frac{h+\delta}{h}\right) = \log\left(1+\frac{\delta}{h}\right) = M\left[\frac{\delta}{h} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{h}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{h}\right)^3 - \ldots\right] = \frac{M\delta}{h}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{h}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{h}\right)^2 - \ldots\right]$.

Hieraus findet man dann:

$$\log u = \log M + \log \delta - \log h + \log\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\delta}{h} + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{h}\right)^2 - \ldots\right].$$

Es ist aber:

$$\log\left[1-\tfrac{1}{2}\frac{\delta}{h}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{\delta}{h}\right)^2-\ldots\right]=$$

$$=-M\left\{\left[\tfrac{1}{2}\frac{\delta}{h}-\tfrac{1}{3}\left(\frac{\delta}{h}\right)^2+\ldots\right]+\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}\frac{\delta}{h}-\tfrac{1}{3}\left(\frac{\delta}{h}\right)^2+\ldots\right]^2+\ldots\right\}=$$

$$=-\frac{M\delta}{h}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{5}{24}\frac{\delta}{h}+\ldots\right).$$

Hieraus findet man dann wieder:

$$\log\delta=\log h-\log M+\log u+\frac{M\delta}{h}\cdot\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{5}{24}\cdot\frac{\delta}{h}\right).$$

Es ist jetzt:

$$\log Z=\log u+A+B+C+D,$$

weil man die letzten Correctionen wegen der Kleinheit des Höhenunterschieds Z, und wegen der an der unteren Station unbekannten Lufttemperatur auch den Temperaturunterschied $(t'-t)$ vernachlässigen kann. Hieraus findet man dann:

$$\log u=\log Z-A-B-C-D.$$

Substituirt man diesen Werth des log u, und setzt der Kürze wegen:

$$\frac{M\delta}{h}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{5}{24}\frac{\delta}{h}\right)=E,$$

so findet man:

$$\log\delta=\log h-\log M+\log Z-A-B-C-D+E.$$

Es hängt hier freilich E von δ ab. Weil aber $\frac{\delta}{h}$ und folglich auch E eine kleine Grösse ist, wird man sie zuerst vernachlässigen können und aus dem dadurch gefundenen approximativen Werth von δ diese Grösse bestimmen können.

Die folgende Tafel giebt die Werthe der Grösse E, wenn als Argument $\log h-\log\delta=\log M-\log Z+A+B+C+D$ angenommen wird.

Tafel VI.

$\log h - \log \delta$	E	$\log h - \log \delta$	E	$\log h - \log \delta$	E
3,6	0,00005	2,15	0,00153	1,55	0,00605
3,2	0,00014	2,10	0,00172	1,50	0,00678
3,1	0,00017	2,05	0,00193	1,45	0,00758
3,0	0,00022	2,00	0,00216	1,40	0,00850
2,9	0,00027	1,95	0,00243	1,35	0,00952
2,8	0,00034	1,90	0,00272	1,30	0,01066
2,7	0,00043	1,85	0,00305	1,25	0,01195
2,6	0,00054	1,80	0,00342	1,20	0,01334
2,5	0,00069	1,75	0,00383	1,15	0,01491
2,4	0,00086	1,70	0,00429	1,10	0,01667
2,3	0,00109	1,65	0,00481	1,05	0,01863
2,20	0,00137	1,60	0,00540	1,00	0,02081

§. 321.

Die Dämpfe unterscheiden sich von den permanenten Gasarten dadurch, dass ihre Spannung ein von der Temperatur abhängiges Maximum nicht übersteigen kann. Wird das Volumen comprimirt, so geht so viel Dampf in tropfbar-flüssigen Zustand über, als nöthig ist, damit die Spannung dieses Maximum nicht übersteigt.

Unter den verschiedenen Dämpfen ist der Wasserdampf der wichtigste. Man hat zahlreiche Versuche über das Maximum der Spannkräfte des Wasserdampfes bei den verschiedenen Temperaturen, unter denen die von Regnault und Magnus angestellten die genauesten sind.

Zur Darstellung dieser Beobachtungen hat man verschiedene empirische Formeln angewandt. Magnus hat seine Beobachtungen, welche die Spannkräfte von — 7° bis + 105° C. umfassen, durch die Formel:

$$p = 4{,}525 \,.\, 10^{\frac{7{,}4475\, t}{234{,}69 + t}},$$

wo p die Spannkraft in Millimetern, t die Temperatur nach dem hunderttheiligen Thermometer bezeichnet.

Regnault, dessen Beobachtungen die Spannkräfte von — 32° bis + 148° C. umfassen, stellt diese durch zwei besondere Formeln dar. Die erste Formel:

$$\log p = a + b\alpha^{t-32},$$

$$\text{wo } a = +\,0{,}0131765,\ \log b = 0{,}4724984 - 1,$$
$$\log \alpha = 0{,}0371566,$$

gilt für Temperaturen von — 32° bis + 100° C. Die zweite Formel:

$$\log p = a - b\alpha^{t-100},$$

$$\text{wo } a = +\,5{,}8267890,\ \log b = 0{,}4692291,$$
$$\log \alpha = 0{,}9977641 - 1,$$

gilt für die Temperaturen über + 100° C.

Nach diesen letzten Formeln, welche mit den Beobachtungen sehr gut übereinstimmen, ist die folgende Tafel berechnet.

Spannkräfte der Wasserdämfe in Millimetern von — 32° bis + 150° C.

t	p	t	p	t	p	t	p
—32°C.	0mm,310	—12°C.	1,656	+8°C.	8,017	+28°C.	28,101
—31	0,336	—11	1,803	9	8,574	29	29,782
—30	0,365	—10	1,963	10	9,165	30	31,548
—29	0,397	— 9	2,137	11	9,792	31	33,406
—28	0,431	— 8	2,327	12	10,457	32	35,359
—27	0,468	— 7	2,533	13	11,162	33	37,411
—26	0,509	— 6	2,758	14	11,908	34	39,565
—25	0,553	— 5	3,004	15	12,699	35	41,827
—24	0,602	— 4	3,271	16	13,536	36	44,201
—23	0,654	— 3	3,553	17	14,421	37	46,691
—22	0,711	— 2	3,879	18	15,357	38	49,302
—21	0,774	— 1	4,224	19	16,346	39	52,039
—20	0,841	— 0	4,600	20	17,391	40	54,906
—19	0,916	+ 1	4,940	21	18,495	41	57,910
—18	0,996	2	5,302	22	19,659	42	61,055
—17	1,084	3	5,687	23	20,888	43	64,346
—16	1,179	4	6,097	24	22,184	44	67,790
—15	1,284	5	6,534	25	23,550	45	71,391
—14	1,398	6	6,998	26	24,988	46	75,158
—13	1,521	7	7,492	27	26,505	47	79,098

t	p	t	p	t	p	t	p
+48°C.	83,204	+74°C.	276,624	+100°C.	760,000	+126°C.	1777,87
49	87,499	75	288,547	101	786,94	127	1832,88
50	91,982	76	300,838	102	814,69	128	1889,24
51	96,661	77	313,600	103	843,27	129	1947,13
52	101,543	78	326,841	104	872,70	130	2006,44
53	106,636	79	340,488	105	902,99	131	2067,21
54	111,945	80	354,643	106	934,17	132	2129,53
55	117,478	81	369,287	107	966,26	133	2193,39
56	123,244	82	384,435	108	999,27	134	2258,80
57	129,251	83	400,401	109	1033,24	135	2325,83
58	135,505	84	416,298	110	1068,18	136	2394,47
59	142,015	85	433,041	111	1104,11	137	2464,78
60	148,791	86	450,344	112	1141,06	138	2536,78
61	155,839	87	468,221	113	1179,04	139	2610,50
62	163,170	88	486,687	114	1218,09	140	2685,96
63	170,791	89	505,759	115	1258,22	141	2763,19
64	178,714	90	525,450	116	1299,45	142	2842,24
65	186,945	91	545,778	117	1341,81	143	2923,12
66	195,496	92	566,757	118	1385,32	144	3005,87
67	204,376	93	588,406	119	1430,01	145	3090,52
68	213,596	94	610,740	120	1475,90	146	3177,11
69	223,165	95	633,778	121	1523,00	147	3265,19
70	233,093	96	657,535	122	1571,39	148	3356,65
71	243,393	97	682,029	123	1621,03	149	3448,76
72	254,073	98	707,280	124	1671,98	150	3543,37
73	265,147	99	733,305	125	1724,24		

Cap. VII.

Gesetze der Bewegung luftförmig-flüssiger Körper.

§. 322.

Die Gesetze der Bewegung luftförmig-flüssiger Körper sind dieselben, wie diejenigen der tropfbar-flüssigen Körper, nur dass hier die Dichtigkeit auch bei gleichbleibender Temperatur nicht constant ist. Bezeichnet man, wie im §. 237, durch u, v, w die drei Differentialverhältnisse $d_t x$, $d_t y$, $d_t z$, oder die Componenten der Geschwindigkeit eines Moleküls der Flüssigkeit zur Zeit t, so werden die Gleichungen der Bewegung:

$$\frac{1}{\varrho} d_x p = X - d_t u - u d_x u - v d_y u - w d_z u,$$
$$\frac{1}{\varrho} d_y p = Y - d_t v - u d_x v - v d_y v - w d_z v,$$
$$\frac{1}{\varrho} d_z p = Z - d_t w - u d_x w - v d_y w - w d_z w,$$
$$d_t \varrho + d_x(\varrho u) + d_y(\varrho v) + d_z(\varrho w) = 0.$$

Die letzte Gleichung ist die Continuitätsgleichung. Wenn die Temperatur constant ist, so wird $p = k\varrho$, und diese Gleichung wird dann in Verbindung mit den vier vorhergehenden Gleichungen hinreichen, um die fünf unbekannten Funktionen u, v, w, p und $d\varrho$ zu bestimmen.

Sind u, v, w die partiellen Differentialverhältnisse einer Funktion φ, und X, Y, Z die partiellen Differentialverhältnisse einer Funktion U, so findet man wie früher bei den tropfbar-flüssigen Körpern aus den drei ersten Gleichungen:

$$\frac{dp}{\varrho} = dU - d(d_t\varphi) - \tfrac{1}{2} d \left\{(d_x\varphi)^2 + (d_y\varphi)^2 + (d_z\varphi)^2\right\}.$$

Wenn die Temperatur während der ganzen Bewegung constant ist, und folglich:

$p = k\varrho$, $\varrho = \frac{p}{k}$, so wird $\frac{dp}{\varrho} = \frac{kdp}{p}$, und die obige Gleichung giebt durch Integration:

$$k \log \text{nat}\, p = U - d_t\varphi - \tfrac{1}{2} \left\{(d_x\varphi)^2 + (d_y\varphi)^2 + (d_z\varphi)^2\right\}.$$

Die Continuitätsgleichung kann dann auch auf die Form gebracht werden:

$$d_t p + d_x(p d_x\varphi) + d_y(p d_y\varphi) + d_z(p d_z\varphi) = 0.$$

Substituirt man hier aus der vorhergehenden Gleichung den Werth von p, so hat man eine Differentialgleichung, welche φ und folglich auch u, v, w bestimmt.

Ist die Temperatur nicht constant, so wird auch der Druck p nicht proportional mit der Dichtigkeit sein, oder der Coefficient k wird nicht constant sein, sondern von der in jedem Augenblicke stattfindenden Temperatur abhängig. Bezeichnet man durch k_0 den Werth von k bei 0° Temperatur, so wird bei τ° Temperatur:

$$k = k_0(1 + \alpha t),$$

wo α den Ausdehnungscoefficienten der Gasart bezeichnet.

§. 323.

Die Theorie der linearen Bewegung der Flüssigkeiten kann auch auf Gasarten angewendet werden. Benutzt man dieselben Bezeichnungen, wie im §. 245, nur dass hier ϱ die veränderliche Dichtigkeit im Querschnitte $\alpha\beta$ (Fig. 132) bezeichnet, so wird diese Theorie, auf elastische Flüssigkeiten angewendet, sich nur dadurch von der im §. 245 auf unzusammendrückbare Flüssigkeiten angewendeten unterscheiden, dass hier die Continuitätsgleichung nicht: $\omega u = \Omega U$, sondern:

$$\varrho\omega u = \frac{P'}{k}\Omega U, \quad u = \frac{P'}{k\varrho} \cdot \frac{\Omega}{\omega} \cdot U = \frac{P'\Omega}{p\omega} \cdot U$$

ist.

Es wird dann die lebendige Kraft der Masse $\alpha\beta\alpha'\beta'$ gleich:

$$\tfrac{1}{2}\varrho\omega ds \,.\, u^2 = \tfrac{1}{2}\frac{P'^2}{k}\Omega^2 U^2 \frac{ds}{p\omega}.$$

Nehmen wir jetzt, wie im §. 246, die unterste Schicht cd gleich bei der Oeffnung CD an, und setzen folglich $s' = S$, so findet man aus dem vorigen Ausdrucke durch Integration zwischen den Grenzen $s = s_0$ und $s = S$ die lebendige Kraft der Masse abCD gleich:

$$\tfrac{1}{2}\frac{P'^2}{k}\Omega^2 U^2 \int_{s_0}^{S} \frac{ds}{p\omega}.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck in Bezug auf die Zeit, so findet man den Zuwachs der lebendigen Kraft der Masse abCD während eines Zeitelementes gleich:

$$\frac{P'^2}{k}\Omega^2 U d_t U \,.\, dt \,.\int_{s_0}^{S}\frac{ds}{p\omega} + \tfrac{1}{2}\frac{P'^2}{k}\Omega^2 U^2 d_t\left(\int_{s_0}^{S}\frac{ds}{p\omega}\right)dt.$$

Es ist aber:

$$d_t\left(\int_{s_0}^{S}\frac{ds}{p\omega}\right)=\frac{d_tS}{P'\Omega}-\frac{d_ts_0}{PO},\ d_tS=U,\ d_ts_0=\frac{P'\Omega}{PO}.U,$$

folglich:

$$d_t\left(\int_{s_0}^{S}\frac{ds}{p\omega}\right)=\left[1-\left(\frac{P'\Omega}{PO}\right)^2\right]\frac{U}{P'\Omega}.$$

Dieser Werth substituirt giebt dann den Zuwachs der lebendigen Kraft der Masse abCD im Zeitelemente dt gleich:

$$\frac{P'^2}{k}\Omega^2 U\,d_tU\,dt\int_{s_0}^{S}\frac{ds}{p\omega}+\tfrac{1}{2}\frac{P'^2}{k}\Omega U^3\left[1-\left(\frac{P'\Omega}{PO}\right)^2\right].$$

Die dynamische Arbeit der Schwere des Elementes $\alpha\beta\alpha'\beta'$ im Zeitelemente dt wird gleich:

$$g\varrho\omega ds\,.\,udz\,dt=g\varrho\omega udz\,dt=g\,\frac{P'}{k}\,\Omega U\,dz\,dt.$$

Durch Integration in Bezug auf z von $z=0$ bis $z=z'$ findet man dann die dynamische Arbeit der ganzen Masse abCD im Zeitelemente dt gleich:

$$g\,\frac{P'}{k}\Omega U z'dt.$$

In dem Querschnitte $\alpha\beta$ findet der Druck p auf die Flächeneinheit statt; in $\alpha'\beta'$ der Druck $p+dp$ in entgegengesetzter Richtung. Es wird folglich die nicht von den Wänden dieses Canals aufgehobene Resultante dieser Drucke gleich: ωdp. Die dynamische Arbeit dieses Druckes im Zeitelemente dt wird gleich:

$$-\omega dp\,u\,dt=P'\Omega U\frac{dp}{p}dt.$$

Integrirt man hier in Bezug auf p von $p=P$, welches den in ab stattfindenden Druck bezeichnet, bis $p=P'$, welches der in CD stattfindende Druck ist, so findet man die dynamische Arbeit der bei der ganzen Masse abCD stattfindenden Expansion im Zeitelemente dt gleich:

$$-P'\Omega U dt\log nat\left(\frac{P'}{P}\right)=P'\Omega U dt\log nat\left(\frac{P}{P'}\right).$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft wird folglich:

$$\frac{P'^2}{k}\,\Omega^2 U d_t U \,.\, dt \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{p\omega} + \tfrac{1}{2}\frac{P'}{k}\Omega U^3\left[1-\left(\frac{P'\Omega}{PO}\right)^2\right] dt =$$

$$= g\,\frac{P'}{k}\,z'\Omega U\,dt + P'\Omega U\,dt \log nat\left(\frac{P}{P'}\right),$$

oder, wenn man mit $\frac{1}{2}P'\Omega U dt$ dividirt:

$$2P'\Omega d_t U \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{p\omega} + U^2\left[1-\left(\frac{P'\Omega}{PO}\right)^2\right] = 2gz' + 2k \log nat\left(\frac{P}{P'}\right).$$

Ist $P'\Omega < PO$, und betrachtet man nicht die ersten Augenblicke des Ausflusses, sondern nur die permanente Bewegung, wenn die Ausflussgeschwindigkeit constant gleich V geworden ist, so wird $U = V$, $d_t U = o$, und man findet aus der obigen Gleichung:

$$V = \sqrt{\frac{2g\left[z' + \frac{k}{g}\log nat\left(\frac{P}{P'}\right)\right]}{1-\left(\frac{P'\Omega}{PO}\right)^2}}.$$

Es ist hier k immer eine sehr grosse Zahl; ist folglich $\log nat\left(\frac{P}{P'}\right)$ nicht ausserordentlich klein, oder ist der Unterschied der beiden Spannungen nicht verschwindend klein, so wird

$$\frac{k}{g}\log nat\left(\frac{P}{P'}\right)$$

in Bezug auf z' sehr gross sein. Es ist dies in den Anwendungen immer der Fall, und man kann daher in der vorhergehenden Formel die Höhe z' vernachlässigen, wodurch:

$$V = \sqrt{\frac{2k \log nat\left(\frac{P}{P'}\right)}{1-\left(\frac{P'\Omega}{PO}\right)^2}}.$$

Bezeichnet man durch k_o den der trockenen atmosphärischen Luft bei 0° Temperatur entsprechenden Werth des Coefficienten k, durch s das specifische Gewicht der betreffenden Gasart in Bezug auf die trockene atmosphärische Luft, durch α den Ausdeh-

nungscoefficienten und durch τ die als constant angenommene Temperatur der Gasart, so ist nach §. 308:

$$k = \frac{k_0 (1 + \alpha\tau)}{s},$$

und es wird folglich:

$$V = \sqrt{\frac{2 k_0 (1 + \alpha\tau)}{s} \cdot \frac{\log \text{nat} \left(\frac{P}{P'}\right)}{1 - \left(\frac{P'\Omega}{P O}\right)^2}}.$$

Die Ausflussgeschwindigkeit ist folglich bei Gasarten verschiedener Dichtigkeit unter übrigens gleichen Umständen der Quadratwurzel des specifischen Gewichts umgekehrt proportional.

§. 324.

Die obige von der Form des Canals unabhängige Formel der Ausflussgeschwindigkeit giebt dann auch diejenige einer Gasart aus einem Gefässe bei einem constanten Drucke P, und Gegendruck P'. Wird die Luft aus einem Gefässe durch einen Kolben herausgedrückt, so bezeichnet alsdann Ω den Inhalt der Ausflussöffnung, O den Querschnitt des Kolbens, P' den äusseren Druck auf die Quadrateinheit, und P den Druck, welchen der Kolben auf die Quadrateinheit ausübt.

Ist $P'\Omega$ sehr klein in Bezug auf PO, so kann das letzte Glied des Nenners vernachlässigt werden, und man findet dann:

$$V = \sqrt{2 k \log \text{nat} \frac{P}{P'}}.$$

Wenn der Ausfluss wie gewöhnlich in offener Luft stattfindet, so ist P' gleich dem Druck der Atmosphäre. Statt besonders die Spannung P zu messen, wird alsdann gewöhnlich nur der Unterschied der beiden Spannungen: P — P', durch einen Manometer gemessen, d. h. durch eine offene, mit Quecksilber oder Wasser gefüllte Glasröhre. Der Unterschied der beiden Spannungen ist alsdann gleich dem Gewichte einer Quecksilber- oder Wassersäule,

deren Grundebene die Flächeneinheit, deren Höhe die Manometerhöhe ist.

Bezeichnet man durch H die Höhe des Manometers, durch q das Gewicht einer Kubikeinheit der Flüssigkeit desselben, so wird folglich: $P - P' = qH$. Bezeichnet man durch b die Barometerhöhe der äusseren atmosphärischen Luft, durch q′ das Gewicht einer Kubikeinheit Quecksilber, so wird ebenso: $P' = q'b$. Hieraus findet man dann:

$$\frac{P}{P'} = 1 + \frac{P - P'}{P'} = 1 + \frac{qH}{q'b}.$$

Bei einem Quecksilber-Manometer ist $q = q'$, folglich:

$$\frac{q}{q'} = 1;$$

bei einem Wassermanometer ist:

$$\frac{q}{q'} = \frac{1}{13{,}59593} = 0{,}07355.$$

Bezeichnen wir im Allgemeinen durch δ dieses Verhältniss, so wird:

$$\frac{P}{P'} = 1 + \frac{\delta H}{b},$$

und es wird folglich die Ausflussgeschwindigkeit:

$$V = \sqrt{2k \log \text{nat} \left(1 + \frac{\delta H}{b}\right)}.$$

Ist δH klein in Bezug auf b, wie es z. B. bei Gebläsen, Gasometern u. dergl. immer der Fall ist, wo $\frac{\delta H}{b}$ nicht 0,2 übersteigt, so kann man $\log \text{nat}\left(1 + \frac{\delta H}{b}\right)$ in eine Reihe entwickeln und die dritte und höheren Potenzen der kleinen Grösse $\frac{\delta H}{b}$ vernachlässigen. Man findet alsdann:

$$\log \text{nat}\left(1 + \frac{\delta H}{b}\right) = \frac{\delta H}{b}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\delta H}{b}\right),$$

und hieraus:

$$V = \sqrt{2k \cdot \frac{\delta H}{b}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\delta H}{b}\right)} = \left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{\delta H}{b}\right)\sqrt{2k\frac{\delta H}{b}}.$$

Es ist hier: $k = \frac{k_\circ(1+\alpha t)}{s}$, wo $k_\circ = 795665$ preuss. F.

Es wird daher: $\sqrt{2k_\circ} = 1261{,}4$. Den Ausdehnungscoefficienten α kann man mit hinreichender Genauigkeit bei allen Gasarten gleich 0,0036 setzen und folglich: $\sqrt{1+\alpha\tau} = 1 + \frac{1}{2}\alpha\tau = 1 + 0{,}0018\,\tau$. Bei einem Quecksilber-Manometer ist: $\delta = 1$, bei einem Wasser-Manometer: $\delta = 0{,}07355$ und folglich:

$$\sqrt{2k_\circ\delta} = 342{,}1.$$

Es wird folglich bei einem Quecksilber-Manometer:

$$V = \frac{1261{,}4}{\sqrt{s}}(1 + 0{,}0018\,\tau)\sqrt{\log\text{nat}\left(1+\frac{H}{b}\right)}$$

$$= \frac{1261{,}4}{\sqrt{s}}(1 + 0{,}0018\,\tau)\left(1 - \frac{1}{4}\frac{H}{b}\right)\sqrt{\frac{H}{b}}.$$

Bei einem Wasser-Manometer wird:

$$V = \frac{342{,}1}{\sqrt{s}}(1 + 0{,}0018\,\tau)\left(1 - 0{,}01877\frac{H}{b}\right)\sqrt{\frac{H}{b}}.$$

Die gewöhnliche atmosphärische Luft kann man bei Null Grad Temperatur um $\frac{1}{400}$ leichter, als die trockene atmosphärische Luft annehmen. Man kann daher für diese:

$$\sqrt{\frac{2k_\circ}{s}} = 1263$$

setzen, und:

$$\sqrt{\frac{2k_\circ\delta}{s}} = 343.$$

Um die Zunahme der Feuchtigkeit mit der Temperatur zu berücksichtigen, kann man $\alpha = 0{,}004$ annehmen. Es wird dann für die gewöhnliche atmosphärische Luft bei einem Quecksilber-Manometer:

$$V = 1263\,(1 + 0{,}002\,\tau)\sqrt{\log\text{nat}\left(1 + \frac{H}{b}\right)}$$

$$= 1263\,(1 + 0{,}002\,\tau)\left(1 - \frac{1}{4}\frac{H}{b}\right)\sqrt{\frac{H}{b}},$$

und bei einem Wasser-Manometer:

$$V = 343\,(1 + 0{,}002\,\tau)\left(1 - 0{,}01877\frac{H}{b}\right)\sqrt{\frac{H}{b}}.$$

Nimmt man das specifische Gewicht des Leuchtgases (kohlensauren Wasserstoffgases) gleich 0,559 an, so wird für dieses bei einem Quecksilber-Manometer:

$$V = 1687\,(1 + 0{,}0018\,\tau)\sqrt{\log\text{nat}\left(1 + \frac{H}{b}\right)}$$

$$= 1687\,(1 + 0{,}0018\,\tau)\left(1 - \tfrac{1}{4}\,\frac{H}{b}\right)\sqrt{\frac{H}{b}};$$

und bei einem Wasser-Manometer:

$$V = 458\,(1 + 0{,}0018\,\tau)\left(1 - 0{,}01877\,\frac{H}{b}\right)\sqrt{\frac{H}{b}}.$$

Das specifische Gewicht des Wasserdampfes ist: 0,6235, und es wird folglich für diesen bei einem Quecksilber-Manometer:

$$V = 1598\,(1 + 0{,}0018\,\tau)\sqrt{\log\text{nat}\left(1 + \frac{H}{b}\right)}$$

$$= 1598\,(1 + 0{,}0018\,\tau)\left(1 - \tfrac{1}{4}\,\frac{H}{b}\right)\sqrt{\frac{H}{b}}.$$

§. 325.

Wenn die Seiten der Mündung Ω abgerundet sind, so dass keine Contraction des ausströmenden Gasstrahls stattfindet, so wird das Volumen der in einer Zeiteinheit ausströmenden Gasmenge unter der äusseren Spannung P' gemessen gefunden, indem man den Inhalt der Ausflussöffnung mit der Geschwindigkeit V multiplicirt. Bezeichnet man durch Q' dieses Volumen, so wird folglich: $Q' = \Omega V$.

Unter der inneren Spannung P gemessen wird diese Menge gleich:

$$Q = \frac{P'}{P}\,Q' = \frac{P'}{P}\,\Omega V = \frac{\Omega V}{b + \frac{\delta H}{b}} = \frac{b}{1 + \delta H}\cdot\Omega V.$$

Bei nicht abgerundeten Oeffnungen findet eine ähnliche Contraction, wie bei den tropfbar-flüssigen Körpern statt, und es wird folglich:

$$Q' = m\Omega V, \quad Q = \frac{mb}{b + \delta H}\,\Omega V,$$

wo m den Contractionscoefficienten bezeichnet.

Nach den Versuchen d'Aubuisson's bei Manometerhöhen von $\frac{1}{28}$ bis $\frac{1}{5}$ Atmosphäre ist im Mittel: m = 0,65. Dagegen nach den Versuchen Koch's, durch Weisbach berechnet, im Mittel nur: m = 0,58. Es scheint dieser letztere Werth grösseres Zutrauen zu verdienen.

§. 326.

Bezeichnet man durch p die Spannung in irgend einem Querschnitte, dessen Flächeninhalt gleich ω ist, und durch v die Geschwindigkeit der hier durchströmenden Luft, so wird:

$$v = \sqrt{\frac{2k \log \text{nat}\left(\frac{P}{p}\right)}{1 - \left(\frac{p\omega}{PO}\right)^2}},$$

und hieraus:

$$p\omega v = \sqrt{\frac{2k \log \text{nat}\left(\frac{P}{p}\right)}{\frac{1}{(p\omega)^2} - \frac{1}{(PO)^2}}}.$$

Ebenso ist:

$$P'\Omega V = \sqrt{\frac{2k \log \text{nat}\left(\frac{P}{P'}\right)}{\frac{1}{(P'\Omega)^2} - \frac{1}{(PO)^2}}}.$$

Wegen der Continuität sollen diese Ausdrücke gleich sein: $p\omega v = P'\Omega V$, und es wird folglich, wenn man quadrirt und mit 2k dividirt:

$$\frac{\log \text{nat}\left(\frac{P}{p}\right)}{\frac{1}{(p\omega)^2} - \frac{1}{(PO)^2}} = \frac{\log \text{nat}\left(\frac{P}{P'}\right)}{\frac{1}{(P'\Omega)^2} - \frac{1}{(PO)^2}},$$

aus welcher Gleichung dann p gefunden werden kann.

Werden die Spannungsunterschiede: $P - P'$ und $p - P'$ durch Manometer gemessen, und bezeichnet man durch H die der Spannung P, durch h diejenige der Spannung p entsprechende Mano-

meterhöhe, durch b die der Spannung P′ entsprechende Barometerhöhe, so ist:

$$\frac{P}{P'} = 1 + \frac{\delta H}{b}, \quad \frac{p}{P'} = 1 + \frac{\delta h}{b}, \quad \frac{P}{p} = 1 + \frac{\delta(H-h)}{b+\delta h}.$$

Sind $\frac{\delta H}{b}$ und $\frac{\delta h}{b}$ kleine Grössen, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können, so kann man setzen:

$$\log \operatorname{nat}\left(\frac{P}{P'}\right) = \frac{\delta H}{b}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\delta H}{b}\right);$$

$$\log \operatorname{nat}\left(\frac{P}{p}\right) = \frac{\delta(H-h)}{b}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\delta(H+h)}{b}\right);$$

$$\left(\frac{P}{P'}\right)^2 = 1 + \frac{2\delta H}{b}, \quad \left(\frac{P}{p}\right)^2 = 1 + \frac{2\delta(H-h)}{b}.$$

Diese Werthe substituirt, und mit $\frac{(PO)^2.\delta}{b}$ dividirt, geben dann die Gleichung:

$$\frac{(H-h)\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\delta(H+h)}{b}\right)}{\left(1 + \frac{2\delta(H-h)}{b}\right)\left(\frac{O}{\omega}\right)^2 - 1} = \frac{H\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\delta H}{b}\right)}{\left(1 + \frac{2\delta H}{b}\right)\left(\frac{O}{\Omega}\right)^2 - 1}.$$

Hieraus findet man, indem man die zweite Potenz der kleinen Grössen $\frac{\delta H}{b}$ und $\frac{\delta h}{b}$ vernachlässigt:

$$\frac{(H-h)\left[\left(\frac{O}{\Omega}\right)^2 - 1\right]}{1 + \tfrac{1}{2}\delta\frac{H+h}{b} + 2\delta\frac{H-h}{b}\cdot\frac{\left(\frac{O}{\omega}\right)^2}{\left(\frac{O}{\omega}\right)^2 - 1}} = \frac{H\left[\left(\frac{O}{\omega}\right)^2 - 1\right]}{1 + \tfrac{1}{2}\frac{\delta H}{b} + \frac{2\delta H}{b}\cdot\frac{\left(\frac{O}{\Omega}\right)^2}{\left(\frac{O}{\Omega}\right)^2 - 1}}.$$

Hieraus findet man dann:

$$h = H\,\frac{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\delta H}{b}\cdot\frac{\frac{5}{\omega^2} + \frac{3}{O^2}}{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}}\right).$$

Ist O sehr gross in Bezug auf ω und Ω, so wird;

$$h = H\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\left\{1 - \frac{5}{2}\frac{\delta H}{b}\cdot\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right\}.$$

§. 327.

Plötzliche Veränderungen des Querschnittes des Gefässes oder Rohres, wodurch das Gas ausströmt, bringen ebenso wie bei tropfbar-flüssigen Körpern immer einen Verlust an lebendiger Kraft hervor. Es wird dieser Verlust ganz auf ähnliche Weise wie im §. 259 bestimmt, wenn man nur den Inhalt der verschiedenen Querschnitte überall mit der jedem entsprechenden Spannung multiplicirt.

Bezeichnet man, wie in jenem Paragraphen, durch ω den Inhalt einer nach innen zu abgerundeten Verengung, statt deren, wenn eine Contraction stattfindet, $m\omega$ gesetzt wird, durch O' den Inhalt einer darauf folgenden plötzlichen Erweiterung, durch p die Spannung im Querschnitte ω, durch p' die Spannung im Querschnitte O', so wird die Ausflussgeschwindigkeit:

$$V = \sqrt{\frac{2k \log nat \left(\frac{P}{P'}\right)}{1 - \left(\frac{P'\Omega}{PO}\right)^2 + \left(\frac{P'\Omega}{p\omega} - \frac{P'\Omega}{p'O'}\right)^2}}.$$

Um hier die Spannungen p und p' zu finden, muss man berücksichtigen, dass das dem Verlust der lebendigen Kraft durch die Ausströmung aus der Verengung ω in dem grösseren Querschnitte Q' entsprechende Glied in der Gleichung der in ω stattfindenden Geschwindigkeit nicht vorkommen kann. Man hat daher zur Bestimmung der Spannung p ebenso wie im vorigen Paragraphen die Gleichung:

$$\frac{\log nat \left(\frac{P}{p}\right)}{\frac{1}{(p\omega)^2} - \frac{1}{(PO)^2}} = \frac{\log nat \left(\frac{P}{P'}\right)}{\frac{1}{(P'\Omega)^2} - \frac{1}{(PO)^2} + \left(\frac{1}{p\omega} - \frac{1}{p'O'}\right)^2}.$$

Zur Bestimmung der im Querschnitte O' stattfindenden Spannung hat man dagegen, weil hier eben der Verlust an lebendiger Kraft stattfindet:

$$\frac{\log \text{nat}\left(\frac{P}{p'}\right)}{\frac{1}{(p'O')^2}-\frac{1}{(PO)^2}+\left(\frac{1}{p\omega}-\frac{1}{p'O'}\right)^2}=\frac{\log \text{nat}\left(\frac{P}{P'}\right)}{\frac{1}{(P'\Omega)^2}-\frac{1}{(PO)^2}+\left(\frac{1}{p\omega}-\frac{1}{p'O'}\right)^2}.$$

Sind sowohl Ω wie ω und O' alle sehr klein in Bezug auf O, so werden diese Gleichungen:

$$V=\sqrt{\frac{2k \log \text{nat}\left(\frac{P}{P'}\right)}{1+\left(\frac{P'\Omega}{p\omega}-\frac{P'\Omega}{p'O'}\right)^2}},$$

$$\frac{\log \text{nat}\left(\frac{P}{p}\right)}{\frac{1}{(p\omega)^2}}=\frac{\log \text{nat}\left(\frac{P}{P'}\right)}{\frac{1}{(P'\Omega)^2}+\left(\frac{1}{p\omega}-\frac{1}{p'O'}\right)^2},$$

$$\frac{\log \text{nat}\left(\frac{P}{p'}\right)}{\frac{1}{(p'O')^2}+\left(\frac{1}{p\omega}-\frac{1}{p'O'}\right)^2}=\frac{\log \text{nat}\left(\frac{P}{P'}\right)}{\frac{1}{(P'\Omega)^2}+\left(\frac{1}{p\omega}-\frac{1}{p'O'}\right)^2}.$$

§. 328.

Findet der Ausfluss durch ein cylindrisches Ansatzrohr statt, dessen innere Mündung nicht erweitert, und dessen Länge wenigstens die dreimalige des Durchmessers ist, so wird: $\omega = m\Omega$, $O' = \Omega$. Man findet alsdann:

$$V=\sqrt{\frac{2k \log \text{nat}\left(\frac{P}{P'}\right)}{1-\frac{P'\Omega}{PO}+\left(\frac{P'}{mp}-\frac{P'}{p'}\right)^2}},$$

$$\frac{\log \text{nat}\left(\frac{P}{p}\right)}{\frac{1}{(mp\Omega)^2}-\frac{1}{(PO)^2}}=\frac{\log \text{nat}\left(\frac{P}{P'}\right)}{\frac{1}{(P'\Omega)^2}-\frac{1}{(PO)^2}+\left(\frac{1}{mp\Omega}-\frac{1}{p'\Omega}\right)^2},$$

$$\frac{\log \text{nat}\left(\frac{P}{p'}\right)}{\frac{1}{(p'\Omega)^2}-\frac{1}{(PO)^2}+\left(\frac{1}{mp\Omega}-\frac{1}{p'\Omega}\right)^2}=\frac{\log \text{nat}\left(\frac{P}{P'}\right)}{\frac{1}{(P'\Omega)^2}-\frac{1}{(PO)^2}+\left(\frac{1}{mp\Omega}-\frac{1}{p'\Omega}\right)^2}.$$

Aus der letzten Gleichung geht hervor, dass: $p' = P'$ ist. Der

dem Ausfluss durch ein cylindrisches Ansatzrohr entsprechende Widerstandscoefficient wird folglich:

$$w = \left(\frac{P'}{mp} - \frac{P'}{p'}\right)^2 = \left(\frac{P'}{mp} - 1\right)^2.$$

Ist Ω sehr klein in Bezug auf O, so dass man $\frac{1}{PO}$ vernachlässigen kann, so werden die beiden ersten Gleichungen auf die folgenden reducirt:

$$V = \sqrt{\frac{2k \log \text{nat}\left(\frac{P}{P'}\right)}{1+w}} = \sqrt{\frac{2k \log \text{nat}\left(\frac{P}{P'}\right)}{1+\left(\frac{P'}{mp}-1\right)^2}},$$

$$\frac{\log \text{nat}\left(\frac{P}{p}\right)}{\left(\frac{P'}{mp}\right)^2} = \frac{\log \text{nat}\left(\frac{P}{P'}\right)}{1+\left(\frac{P'}{mp}-1\right)^2}.$$

Werden die Spannungen durch Manometer- und Barometerhöhen gemessen, und bezeichnet man wie früher durch b die der Spannung P' entsprechende Barometerhöhe, durch h und H die den Spannungen p und P' entsprechenden Manometerhöhen, so werden:

$$\frac{P}{P'} = 1 + \frac{\delta H}{b},\ \frac{p}{P'} = 1 + \frac{\delta h}{b},\ \frac{P}{p} = 1 + \frac{\delta(H-h)}{b+\delta h}.$$

Kann man jetzt wie früher die höheren Potenzen von $\frac{\delta H}{b}$ und $\frac{\delta h}{b}$ vernachlässigen, so werden:

$$\log \text{nat}\left(\frac{P}{P'}\right) = \frac{\delta H}{b}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\delta H}{b}\right),\ \log \text{nat}\left(\frac{P}{p}\right) = \frac{\delta(H-h)}{b}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\delta(H+h)}{b}\right).$$

Hieraus findet man dann:

$$\frac{\log \text{nat}\left(\frac{P}{p}\right)}{\log \text{nat}\left(\frac{P}{P'}\right)} = \frac{\frac{\delta(H-h)}{b}\cdot\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\delta(H+h)}{b}\right)}{\frac{\delta H}{b}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\delta H}{b}\right)} = \frac{H-h}{H}\cdot\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\delta h}{b}\right);$$

$$\frac{P'}{mp} = \frac{1}{m\left(1+\frac{\delta h}{b}\right)} = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{\delta h}{b}\right);$$

$$1+\left(\frac{P'}{mp}-1\right)^2 = 1+\left[\frac{1}{m}\left(1-\frac{\delta h}{b}\right)-1\right]^2 = 1+\left(\frac{1}{m}-1-\frac{\delta h}{mb}\right)^2 =$$

$$= 1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{m}-1\right)\frac{\delta h}{mb} = \frac{1}{m^2}\left(m^2+(1-m)^2-2(1-m)\frac{\delta h}{b}\right).$$

Diese Werthe substituirt geben dann:

$$\frac{\left(\frac{P'}{mp}\right)^2}{1+\left(\frac{P'}{mp}-1\right)^2} = \frac{\left(1-\frac{\delta h}{b}\right)^2}{m^2+(1-m)^2-2(1-m)\frac{\delta h}{b}}.$$

Zur Bestimmung der Spannung p oder der Manometerhöhe h hat man folglich die Gleichung:

$$\frac{H-h}{H}\left(1-\frac{\delta h}{b}\right) = \frac{1-\left(\frac{\delta h}{b}\right)^2}{m^2+(1-m)^2-2(1-m)\frac{\delta h}{b}},$$

woraus:

$$(H-h)\left\{m^2+(1-m)^2-2(1-m)\frac{\delta h}{b}\right\} = H\left(1+\frac{\delta h}{b}\right).$$

Vernachlässigt man hier die kleine Grösse $\frac{\delta h}{b}$, so findet man:

$$h = -2mH \cdot \frac{1-m}{(1-m)^2+m^2}.$$

Weil $m < 1$, wird h immer negativ sein, oder es wird immer $p < P'$. Substituirt man diesen Werth von h, so findet man den Widerstandscoefficienten:

$$w = \left(\frac{P'}{mp}-1\right)^2 = \left(\frac{1}{m}-1-\frac{\delta h}{mb}\right)^2 = \left(\frac{1}{m}-1\right)^2 - 2\frac{(1-m)}{m^2}\frac{\delta h}{b};$$

$$1+w = 1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2 + \frac{4(1-m)^2}{(1-m)^2+m^2}\cdot\frac{\delta H}{mb} =$$

$$= \left[1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2\right]\left[1+\frac{4m(1-m)^2}{[m^2+(1-m)^2]^2}\cdot\frac{\delta H}{b}\right].$$

Hieraus findet man dann ferner:

$$\sqrt{1+w} = \left[1+\frac{2m(1-m)^2}{[m^2+(1-m)^2]^2}\cdot\frac{\delta H}{b}\right]\sqrt{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}$$

$$V = \sqrt{\frac{2k \log nat\left(\frac{P}{P'}\right)}{1+w}} =$$

$$= \left(1 - \frac{2m(1-m)^2}{[m^2+(1-m)^2]^2} \cdot \frac{\delta H}{b}\right) \sqrt{\frac{2k \log nat \left(1 + \frac{\delta H}{b}\right)}{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}}$$

$$= \left(1 - \frac{2m(1-m)^2}{[m^2 (1-m)^2]^2} \cdot \frac{\delta H}{b}\right)\left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{\delta H}{b}\right) \sqrt{\frac{2k \cdot \frac{\delta H}{b}}{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}}.$$

Substituirt man hier: $m = 0{,}58$, so findet man:

$$1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 = 1{,}524; \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}} = 0{,}81;$$

$$\frac{2m(1-m)^2}{[m^2 + (1-m)^2]^2} = 0{,}78.$$

Diese Werthe substituirt geben:

$$V = 0{,}81 \left(1 - 0{,}78 \frac{\delta H}{b}\right) \sqrt{2k \log nat \left(1 + \frac{\delta H}{b}\right)} =$$

$$= 0{,}81 \left(1 - 0{,}78 \frac{\delta H}{b}\right)\left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{\delta H}{b}\right) \sqrt{2k \frac{\delta H}{b}}$$

$$= 0{,}81 \left(1 - 1{,}03 \frac{\delta H}{b}\right) \sqrt{2k \frac{\delta H}{b}}.$$

Die Ausflussmenge wird, unter der äusseren Spannung P' gemessen, gleich:

$$Q' = \Omega V = 0{,}81\, \Omega \left(1 - 0{,}78 \frac{\delta H}{b}\right) \sqrt{2k \log nat \left(1 + \frac{\delta H}{b}\right)}$$

$$= 0{,}81\, \Omega \left(1 - 1{,}03 \frac{\delta H}{b}\right) \sqrt{2k \frac{\delta H}{b}},$$

welche Formel sich durch den Coefficienten $0{,}81 \left(1 - 0{,}78 \frac{\delta H}{b}\right)$ statt des Coefficienten $m = 0{,}58$ von derjenigen des Ausflusses durch eine Oeffnung in der dünnen Wand unterscheidet.

Bei konischen Ansatzröhren werden im vorigen Paragraphen ω und O' etwas grösser, als hier anzunehmen; es wird daher auch die Geschwindigkeit V etwas grösser und folglich auch bei gleich grosser Mündung die Ausflussmenge Q'. Bei Ansatzröhren von 6"

Convergenz entspricht man diesem, indem man den Coefficienten 0,81 auf 0,93 erhöht.

§. 329.

Bei Bewegung der Gasarten in sehr langen Röhren findet ebenso wie bei dem Wasser ein Reibungswiderstand statt. Dieser wird aber hier, weil bei den Gasarten keine merkliche Adhäsion stattfindet, nur dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sein. Er wird übrigens der Dichtigkeit der Gasart, dem Perimeter und der Länge der Röhre proportional und folglich gleich $\beta\varrho p l u^2$, wenn p der Perimeter, l die Länge der Röhre, ϱ die Dichtigkeit und u die in der Länge l constant angenommene Geschwindigkeit der Gasart bezeichnet. Bei einer Länge dl wird dieser Widerstand gleich: $\beta\varrho p u^2 dl$. Die dynamische Arbeit dieses Reibungswiderstandes im Zeitelemente dt wird dann $\beta\varrho p u^2 dl \,.\, u dt$, und auf die ganze Röhrenlänge integrirt:

$$\beta dt \int \varrho p u^3 dl.$$

Es ist jetzt: $\beta u = \frac{P'}{p} \frac{\Omega}{\omega} \,.\, U$, wenn ω den Querschnitt der Röhre bezeichnet, und: $u = \frac{P'}{p'} \cdot \frac{\Omega}{\omega} \,.\, U$, wenn p' die Spannung im Abstande l von der Mündung des Reservoirs bezeichnet. Diese Werthe substituirt, geben die dynamische Arbeit des Reibungswiderstandes gleich:

$$\beta dt \,.\, \frac{P'^3}{k} \Omega^3 U^3 \int \frac{p dl}{\omega^3 p'^2}.$$

Ist der Querschnitt der Röhre constant, so kann $\frac{p}{\omega^3}$ ausserhalb des Integrationszeichens gesetzt werden, und man hat:

$$\beta \frac{P'^3}{P} \cdot \frac{\Omega^3}{\omega^2} \cdot \frac{p}{\omega} \,.\, U^3 dt \int \frac{dl}{p'^2}.$$

Dieser Ausdruck soll dann von der dynamischen Arbeit der Expansion auf der rechten Seite der Gleichung der lebendigen Kraft §. 323. subtrahirt werden, und es wird folglich die totale dynami-

sche Arbeit der bewegenden und widerstrebenden Kräfte im Zeitelemente dt gleich:

$$P'\Omega U dt \left\{ \log nat\left(\frac{P}{P'}\right) - \frac{\beta}{k} \cdot \frac{P'^2\Omega^2 U^2}{\omega^2} \cdot \frac{p}{\omega} \int \frac{dl}{p'^2} \right\},$$

und die Gleichung der lebendigen Kraft, wenn man nur die constante Bewegung: $U = V$, $d_t U = o$ betrachtet:

$$V^2 \left[1 - \left(\frac{P'\Omega}{PO}\right)^2\right] = 2k \log nat\left(\frac{P}{P'}\right) - 2\beta \frac{P'^2\Omega^2}{\omega^2} V^2 \frac{p}{\omega} \int \frac{dl}{p'^2},$$

oder:

$$V^2 \left[1 - \left(\frac{P'\Omega}{PO}\right)^2 + 2\beta \cdot \frac{P'^2\Omega^2}{\omega^2} \cdot \frac{p}{\omega} \int \frac{dl}{p'^2}\right] = 2k \log nat\left(\frac{P}{P'}\right).$$

Das von dem Reibungswiderstande herrührende Glied des Coefficienten auf der linken Seite wird der Widerstandscoefficient der Röhrenleitung genannt und ist folglich gleich:

$$w = 2\beta \frac{P'^2\Omega^2}{\omega^2} \cdot \frac{p}{\omega} \int \frac{dl}{p'^2}.$$

Betrachtet man nur runde Röhren und runde Mündungen, und bezeichnet durch d den Durchmesser der Röhrenleitung, durch d' denjenigen der Mündung, so wird:

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{d'^2}{d^2}, \quad \frac{p}{\omega} = \frac{\pi d}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{4}{d},$$

und folglich der Widerstandscoefficient:

$$w = 8\beta P'^2 \cdot \frac{d'^4}{d^5} \int \frac{dl}{p'^2}.$$

Es ist hier p' eine Funktion der Länge l, welche mit dieser Länge abnimmt. Bezeichnet man durch p' und p'' die Werthe dieser Spannung am Anfang und am Ende der Röhre, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass das Quadrat der Spannung von p'^2 bis p''^2 gleichmässig abnimmt, und folglich in dem Abstand l von der Mündung des Reservoirs gleich ist:

$$p'^2 - (p'^2 - p''^2)\frac{l}{L},$$

wenn L die ganze Länge der Röhrenleitung bezeichnet. Es wird hiernach:

$$w = 8\beta P'^2 \frac{d'^4}{d^5} \int_0^L \frac{dl}{p'^2 - (p'^2 - p''^2)\frac{l}{L}}$$

$$= 16\beta \cdot \frac{P'^2}{p'^2 - p''^2} \cdot \frac{d'^4}{d^4} \cdot \frac{L}{d} \log nat \left(\frac{p'}{p''}\right).$$

Findet ferner eine Contraction und ein dadurch hervorgebrachter Verlust an lebendiger Kraft bei dem Eintritt des Gasstromes in die Röhrenleitung statt, so wird der diesen entsprechende Widerstandscoefficient nach §. 328, wenn man:

$$O' = \tfrac{1}{4}\pi d^2,\ \omega = mO' = \tfrac{1}{4}m\pi d^2$$

setzt, gleich:

$$w' = \left(\frac{P'\Omega}{p\omega} - \frac{P'\Omega}{p'O'}\right)^2 = \left(\frac{P'}{p} \cdot \frac{d'^2}{md^2} - \frac{P'}{p'} \cdot \frac{d'^2}{d^2}\right)^2.$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft wird alsdann:

$$V^2 \left\{1 - \left(\frac{P'\Omega}{PO}\right)^2 + 16\beta \frac{P'^2}{p'^2 - p''^2} \cdot \frac{d'^4}{d^4} \cdot \frac{L}{d} \log nat \left(\frac{p'}{p''}\right) + \left(\frac{P'}{p}\frac{d'^2}{md^2} - \frac{P'}{p'}\frac{d'^2}{d^2}\right)^2\right\}$$

$$= 2k \log nat \left(\frac{P}{p'}\right).$$

Es bezeichnet hier P die Spannung im Reservoir, p die Spannung in dem contrahirten Gasstrahl bei dem Eintritt in die Röhrenleitung, p' die Spannung im Anfange der Röhrenleitung, p'' die Spannung an dem Ende derselben, vor der Mündung Ω, P' die Spannung der äusseren Luft. Es ist ferner die Mündung Ω als abgerundet angenommen, so dass hier keine Contraction stattfindet; im entgegengesetzten Fall muss überall $m\Omega$ statt Ω gesetzt werden.

Die Spannung p wird durch die Gleichung bestimmt:

$$pm\omega v = P'\Omega V = \sqrt{\frac{2k \log nat \left(\frac{P}{p}\right)}{\frac{1}{(pm\omega)^2} - \frac{1}{(PO)^2}}};$$

oder:

$$2k \log nat \left(\frac{P}{p}\right) = V^2 \left\{\left(\frac{P'\Omega}{pm\omega}\right)^2 - \left(\frac{P'\Omega}{PO}\right)^2\right\}$$

$$= V^2 \left\{\frac{P'^2}{p^2 m^2} \cdot \frac{d'^4}{d^4} - \left(\frac{P'\Omega}{PO}\right)^2\right\}.$$

Die Spannung p′ wird durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$2k \log nat \left(\frac{P}{p'}\right) = V^2 \left\{\frac{P'^2}{p'^2}\frac{d'^4}{d^4} - \left(\frac{P'\Omega}{PO}\right)^2 + \left(\frac{P}{pm}\cdot\frac{d'^2}{d^2} - \frac{P'}{p'}\cdot\frac{d'^2}{d^2}\right)^2\right\}.$$

Endlich wird die Spannung p″ durch die Gleichung:

$$2k \log nat \left(\frac{P}{p''}\right) = V^2 \left\{\frac{P'^2}{p''^2}\cdot\frac{d'^4}{d^4} - \left(\frac{P'\Omega}{PO}\right)^2 + \left(\frac{P'}{pm}\cdot\frac{d'^2}{d^2} - \frac{P'}{p}\cdot\frac{d'^2}{d^2}\right)^2 \right.$$
$$\left. + 16\beta\,\frac{P'^2}{p'^2 - p''^2}\,\frac{d'^4}{d^4}\cdot\frac{L}{d}\log nat\left(\frac{p'}{p''}\right)\right\}$$

bestimmt.

§. 330.

Werden die inneren Spannungen durch Manometerhöhen bestimmt, und bezeichnet man durch H die der Spannung P entsprechende Manometerhöhe, durch h, h′, h″ diejenige der Spannungen p, p′, p″; endlich durch b die der äusseren Spannung P′ entsprechende Barometerhöhe, so wird:

$$\frac{P}{P'} = 1 + \frac{\delta H}{b},\ \frac{p}{P'} = 1 + \frac{\delta h}{b},\ \frac{p'}{P'} = 1 + \frac{\delta h'}{b},\ \frac{p''}{P'} = 1 + \frac{\delta h''}{b},$$

und hieraus:

$$\frac{P}{p} = 1 + \frac{\delta(H-h)}{b+\delta h},\ \frac{P}{p'} = 1 + \frac{\delta(H-h')}{b+\delta h'},\ \frac{P}{p''} = 1 + \frac{\delta(H-h'')}{b+\delta h''}.$$

Substituirt man diese Werthe und vernachlässigt die höheren Potenzen der gewöhnlich kleinen Grössen $\frac{\delta H}{b}$, $\frac{\delta h}{b}$, $\frac{\delta h'}{b}$, $\frac{\delta h''}{b}$, und nimmt zu gleicher Zeit O als sehr gross in Bezug auf ω und Ω an, so findet man:

$$2k\,\frac{\delta(H-h)}{b} = V^2\frac{d'^4}{d^4}\cdot\frac{1-\frac{2\delta h}{b}}{m^2},$$

$$2k\,\frac{\delta(H-h')}{b} = V^2\frac{d'^4}{d^4}\left\{1 - \frac{2\delta h'}{b} + \left(\frac{1}{m}-1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{\delta h}{mb} - \frac{\delta h'}{b}\right)\right\}$$

$$2k\,\frac{\delta(H-h'')}{b} = V^2\frac{d'^4}{d^4}\left\{1 - \frac{2\delta h''}{b} + \left(\frac{1}{m}-1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{\delta h}{mb} - \frac{\delta h'}{b}\right)\right.$$
$$\left. + 8\beta\,\frac{L}{d}\right\}$$

$$2k\,\frac{\delta H}{b} = V^2\frac{d'^4}{d^4}\left\{\frac{d^4}{d'^4} + \left(\frac{1}{m}-1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{\delta h}{mb} - \frac{\delta h'}{b}\right) + 8\beta\frac{L}{d}\right\}.$$

Ist die Ausströmungsgeschwindigkeit V gegeben, und man sucht die hierzu nöthige Manometerhöhe H im Reservoir, so findet man erst durch Subtraction der vorhergehenden Gleichungen die Manometerhöhen h'', h', h. Man hat dann:

$$\frac{2k\delta h''}{b} = V^2 \frac{d'^4}{d^4}\left(\frac{d^4}{d'^4} - 1 + \frac{2\delta h''}{b}\right)$$

$$\frac{2k\delta h'}{b} = V^2 \frac{d'^4}{d^4}\left(\frac{d^4}{d'^4} - 1 + \frac{2\delta h'}{b} + 8\beta\,\frac{L}{d}\right)$$

$$\frac{2k\delta h}{b} = V^2 \frac{d'^4}{d^4}\left[\frac{d^4}{d'^4} - \frac{1}{m^2} + \frac{2\delta h}{m^2 b} - 2\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{\delta h}{b} - \frac{\delta h'}{b}\right) + 8\beta\,\frac{L}{d}\right].$$

Hieraus findet man dann:

$$\frac{\delta h''}{b} = \tfrac{1}{2}V^2 \cdot \frac{d'^4}{d^4}\,\frac{\frac{d^4}{d'^4} - 1}{k - V^2\frac{d'^4}{d^4}},$$

$$\frac{\delta h'}{b} = \tfrac{1}{2}V^2 \cdot \frac{d'^4}{d^4}\,\frac{\frac{d^4}{d'^4} - 1 + 8\beta\,\frac{L}{d}}{k - V^2\frac{d'^4}{d^4}},$$

$$\frac{\delta h}{b} = \tfrac{1}{2}V^2 \cdot \frac{d'^4}{d^4}\,\frac{\frac{d^4}{d'^4} - \frac{1}{m^2} + 2\left(\frac{1}{m} - 1\right)\frac{\delta h'}{b} + 8\beta\,\frac{L}{d}}{k - V^2\frac{d'^4}{d^4}\left[\frac{1}{m^2} - \left(\frac{1}{m} - 1\right)\right]}.$$

Endlich wird:

$$\frac{\delta H}{b} = \tfrac{1}{2}V^2 \frac{d'^4}{d^4}\,\frac{\frac{d^4}{d'^4} + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{\delta h}{b} - \frac{\delta h'}{b}\right) + \frac{8\beta L}{d}}{k}.$$

Den Widerstandscoefficienten β kann man nach den vielfältigen Versuchen von Girard, d'Aubuisson, Buff und Perqueur gleich 0,0032 setzen; er weicht folglich nur wenig von dem bei der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen ab.

§. 331.

Ist die Länge L der Röhrenleitung sehr gross in Bezug auf deren Durchmesser, so wird man die übrigen Glieder in Bezug auf das Glied $\frac{8\beta L}{d}$ vernachlässigen können. Man findet alsdann:

$$\frac{\delta H}{b} = 4\beta \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{d'^4}{d^4} \cdot \frac{V^2}{k};$$

$$V = \tfrac{1}{2} \frac{d^2}{d'^2} \sqrt{\frac{k\delta H d}{\beta b L}}.$$

Die Ausflussmenge, unter der äusseren Spannung P' gemessen, wird dann:

$$Q' = \Omega V = \frac{\pi d'^2}{4} \cdot V = \frac{\pi d^2}{8} \sqrt{\frac{k\delta H d}{\beta b L}}.$$

dagegen unter der im Reservoir stattfindenden Spannung

$$P = P'\left(1 + \frac{\delta H}{b}\right)$$

gemessen gleich:

$$Q = \frac{P'}{P} Q' = \frac{Q'}{1 + \frac{\delta H}{b}} = Q'\left(1 - \frac{\delta H}{b}\right) = \left(1 - \frac{\delta H}{b}\right) \frac{\pi d^2}{8} \sqrt{\frac{k\delta H d}{\beta b L}}.$$

Ist umgekehrt das Volumen Q' gegeben, so hat man die hierzu nöthige Manometerhöhe im Reservoir:

$$\frac{\delta H}{b} = \frac{64\beta L}{\pi^2 k d^5} Q'^2.$$

Für Leuchtgas ist, wenn dessen specifisches Gewicht gleich 0,559 angenommen wird, bei 0° Temperatur: $k = 1424000$. Dieser Werth und $\beta = 0{,}0032$ substituirt geben:

$$\frac{\delta H}{b} = 0{,}000\,000\,01457 \frac{L Q'^2}{d^5}.$$

§. 332.

Wenn ein Reservoir von constantem Volumen keinen Zufluss erhält, während durch eine Mündung in demselben ununterbrochen die Luft ausströmt, so nimmt die Spannung der Luft im Reservoir und mithin die Ausflussgeschwindigkeit immer mehr ab. Bezeichnet man durch A das Volumen des Reservoirs, durch P die innere Spannung, durch P' die als constant angenommene äussere Spannung, durch Ω den Inhalt der Ausflussöffnung, und nimmt man diesen als sehr klein in Bezug auf die Dimensionen des Reservoirs A an, so wird die Ausflussgeschwindigkeit:

$$V = \sqrt{2k \log nat \left(\frac{P}{P'}\right)},$$

und die im Zeitelemente ausströmende Menge, unter der inneren Spannung P gemessen:

$$Qdt = \frac{P'}{P} \Omega \sqrt{2k \log nat \left(\frac{P}{P'}\right)} . dt.$$

Es ist aber jetzt wegen des Mariotteschen Gesetzes:

$$\frac{A - Qdt}{A} = \frac{P + dP}{P}, \text{ oder } \frac{Qdt}{A} = -\frac{dP}{P},$$

und wenn man den gefundenen Werth von Qdt substituirt:

$$-\frac{dP}{P} = \frac{P'\Omega}{PA} \sqrt{2k \log nat \left(\frac{P}{P'}\right)} dt.$$

Hieraus findet man dann:

$$dt = -\frac{A}{P'\Omega} \frac{dP}{\sqrt{2k \log nat \left(\frac{P}{P'}\right)}}.$$

Bezeichnet man jetzt durch P_o den Anfangswerth der inneren Spannung, durch P die nach dem Verlauf der Zeit t stattfindende, so findet man durch Integration zwischen diesen Grenzen die Zeit, während welcher die Spannung im Reservoir von P_o auf P sinkt:

$$t = -\frac{A}{P'\Omega\sqrt{2k}} \int_{P_o}^{P} \frac{dP}{\sqrt{\log nat \left(\frac{P}{P'}\right)}}$$

$$= \frac{A}{P'\Omega\sqrt{2k}} \int_{P}^{P_o} \frac{dP}{\sqrt{\log nat \left(\frac{P}{P'}\right)}}.$$

Wird die Spannung im Reservoir durch ein Manometer gemessen, und bezeichnet man durch H_o den Anfangswerth der Manometerhöhe, durch H die zur Zeit t stattfindende, durch b die der Spannung P′ entsprechende Barometerhöhe, so wird:

$$\frac{P}{P'} = 1 + \frac{\delta H}{b},$$

und:

$$t = \frac{A}{\Omega\sqrt{2k}} \int_{H}^{H_0} \frac{d\left(\frac{\delta H}{b}\right)}{\sqrt{\log nat\left(1 + \frac{\delta H}{b}\right)}}.$$

Entwickelt man hier den Nenner in eine Reihe und integrirt, so findet man:

$$t = \frac{A}{\Omega\sqrt{2k}} \left\{ 2\left(\sqrt{\frac{\delta H_0}{b}} - \sqrt{\frac{\delta H}{b}}\right) + \frac{1}{6}\left[\left(\frac{\delta H_0}{b}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\delta H}{b}\right)^{\frac{3}{2}}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{5}{48}\left[\left(\frac{\delta H_0}{b}\right)^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{\delta H}{b}\right)^{\frac{5}{2}}\right] - \ldots\ldots \right\}$$
$$= \frac{2A}{\Omega\sqrt{2k}}\left(\sqrt{\frac{\delta H_0}{b}} - \sqrt{\frac{\delta H}{b}}\right)\left\{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\delta H_0}{b} + \sqrt{\frac{\delta H_0}{b}\cdot\frac{\delta H}{b}} + \frac{\delta H}{b}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{5}{96}\left[\left(\frac{\delta H_0}{b}\right)^2 + \frac{\delta H_0}{b}\sqrt{\frac{\delta H_0}{b}\cdot\frac{\delta H}{b}} + \frac{\delta H}{b}\sqrt{\frac{\delta H_0}{b}\cdot\frac{\delta H}{b}} + \left(\frac{\delta H}{b}\right)^2\right] - \ldots \right\}.$$

Ist $\frac{\delta H_0}{b}$ und folglich auch $\frac{\delta H}{b}$ eine sehr kleine Grösse, so kann man sich mit dem ersten Gliede dieser Reihe begnügen und hat folglich:

$$t = \frac{2A}{\Omega\sqrt{2k}}\left(\sqrt{\frac{\delta H_0}{b}} - \sqrt{\frac{\delta H}{b}}\right).$$

§. 333.

Wenn die ausströmende Gasart sich nicht gleich in einen unendlichen Raum verbreiten kann, sondern nur in ein zweites Reservoir tritt, dessen Volumen wir durch A' bezeichnen werden, so wird P' nicht constant sein, sondern mit der Zeit wachsen. Bezeichnet man durch P'_0 den Anfangswerth dieser Spannung, so wird zu jeder Zeit:

$$AP_0 + A'P'_0 = AP + A'P',$$

woraus:

$$P' = \frac{A(P_0 - P) + A'P'_0}{A'}.$$

Dieser Werth in die Differentialgleichung:

$$dt = -\frac{A}{P'\Omega}\cdot\frac{dP}{\sqrt{2k\log nat\left(\frac{P}{P'}\right)}}$$

substituirt giebt dann:

$$dt = -\frac{AA'}{\Omega[A(P_0-P)+A'P'_0]} \cdot \frac{dP}{\sqrt{2k\{\log nat P - \log nat[A(P_0-P)+A'P'_0]+\log nat A\}}}$$

und hieraus:

$$t = \frac{AA'}{\Omega\sqrt{2k}}\int_P^{P_0} \frac{dP}{[A(P_0-P)+A'P'_0]\sqrt{\{\log nat P - \log nat[A(P_0-P)+A'P'_0]+\log nat A\}}},$$

welcher Ausdruck den Zeitraum giebt, während welchem die Spannung im ersten Reservoir A von P_0 auf P sinkt, und im zweiten von P'_0 auf P' steigt.

§. 334.

Der Widerstand der Luft gegen die Bewegung fester Körper und der Widerstand fester Körper gegen die Bewegung der Luft folgen bei mässigen Geschwindigkeiten denselben Gesetzen, wie der Widerstand des Wassers. Bei grösseren Geschwindigkeiten ändern sich dagegen diese Gesetze etwas, weil alsdann die mit den Aenderungen der Spannung proportionalen Aenderungen der Dichtigkeit von merklichem Einflusse werden.

Wie bei dem Wasser wird sich auch hier eine gewisse Luftmasse an den bewegten Körper anhängen, deren Grösse durch dieselbe Formel wie bei tropfbaren Flüssigkeiten angegeben wird. Bezeichnet man durch n das Verhältniss des Volumens der anhängenden Luftmasse zum Volumen des Körpers, so ist bei einer Kugel $n = 0,6$, bei einem prismatischen Körper:

$$n = 0,13 + 0,705 \frac{\sqrt{A}}{L},$$

wo A den Querschnitt des Prismas, L dessen Länge bezeichnet.

Bei Geschwindigkeiten von weniger als 50 Fuss in der Sekunde wird die Aenderung der Dichtigkeit nicht $\frac{1}{700}$ betragen, und kann daher ganz vernachlässigt werden. Es wird dann wie bei tropfbaren Flüssigkeiten der Widerstand gleich:

$$W = \zeta p A \frac{V^2}{2g},$$

wo p das Gewicht einer Kubikeinheit der betreffenden Gasart bezeichnet, A den auf der Richtung der Bewegung senkrechten grössten Querschnitt des Körpers, V die relative Geschwindigkeit, und ζ einen von der Form des Körpers abhängigen Coefficienten, welcher der Widerstandscoefficient genannt wird.

Dieser Widerstandscoefficient ist nach den Versuchen von Piobert, Morin und Didion bei einer bewegten Ebene für Geschwindigkeiten von weniger als 30 Fuss in der Sekunde gleich: 1,3574.

Diese Ingenieure haben indessen gefunden, dass der Widerstand noch genauer ausgedrückt wird, wenn ein constantes, von der Geschwindigkeit unabhängiges Glied hinzukommt, und haben ihn daher durch die folgende Formel dargestellt:

$$W = pA\left(0{,}096 + 1{,}3574\,\frac{V^2}{2g}\right).$$

Ist die Bewegung veränderlich, so wird der Widerstand durch die Formel:

$$W = pA\left(0{,}096 + 1{,}3574\,\frac{V^2}{2g} + 0{,}135\, d_t V\right)$$

ausgedrückt.

Bei einer ruhenden Ebene in bewegter Luft ist, ebenso wie bei Wasser, der Widerstand grösser als bei einer bewegten Ebene in ruhiger Luft. Thibault hat für den ersten Fall den Widerstandscoefficienten gleich 1,834 gefunden.

Thibault hat auch mehrere Versuche mit cylindrisch geformten concaven Flächen gemacht, und hat das Verhältniss zwischen dem Widerstande dieser Flächen und demjenigen einer Ebene gleich der Projection dieser cylindrischen Fläche senkrecht auf die Richtung der Bewegung der Luft gefunden, gleich:

1,030 bei einer Krümmung von 20°,
1,054 bei 40° Krümmung,
1,070 bei 60° Krümmung.

Eine concave Fläche doppelter Krümmung von ohngefähr 50° hat das Verhältniss 1,07 gegeben.

Bei einem Fallschirme, dessen Pfeil gleich 0,31 des mittleren Durchmessers war, fanden Piobert, Morin und Didion jenes Verhältniss, wenn die concave Seite voraus bewegt wird, gleich 1,94, und, wenn die convexe Seite voraus bewegt wird, gleich 0,77.

Für diedrische Winkel haben sie dieses Verhältniss gleich: $\frac{1}{\sin a} \cdot \frac{a}{90^\circ}$ gefunden, wenn a in Graden ausgedrückt den halben diedrischen Winkel bezeichnet, oder den Winkel, welchen jede der gleichen Seitenebenen mit der Richtung der Bewegung bildet.

Der Widerstandscoefficient einer Kugel in ruhiger Luft kann für Geschwindigkeiten, welche 25 Fuss in der Sekunde nicht übersteigen, gleich 0,55 angenommen werden.

Bei grösseren Geschwindigkeiten, wie bei denen der Geschützprojectile, kann die vor dem Projectil stattfindende Verdichtung und die hinter ihm sich ergebende Verdünnung der Luft nicht vernachlässigt werden. Der Widerstand wird daher auch nicht dem Quadrate der Geschwindigkeiten proportional sein, sondern noch die höheren Potenzen dieser Grösse enthalten müssen.

Um den Widerstand der Luft bei Geschützprojectilen zu finden, misst man mittelst des ballistischen Pendels die Geschwindigkeit der Kugel in zwei kurz auf einander folgenden Stellen ihrer Bahn, welche genau in derselben Horizontalen liegen.

Bezeichnet man durch P das Gewicht des Projectils, durch V die Geschwindigkeit am ersten Punkte ihrer Bahn, durch V′ die Geschwindigkeit an dem zweiten Punkte, durch a den Abstand beider Punkte, durch W den Widerstand der Luft auf dieser Strecke, welchen man, wenn der Abstand a klein ist, als constant und der mittleren Geschwindigkeit $\frac{1}{2}(V + V')$ entsprechend annehmen kann, so findet man den Verlust an lebendiger Kraft gleich: $\frac{1}{2}\frac{P}{g}(V^2 - V'^2)$, und die dynamische Arbeit des Luftwiderstandes gleich Wa. Weil die beiden Punkte, wo die Geschwindigkeit ge-

messen worden ist, in derselben horizontalen Linie liegen, wird die Arbeit der Schwere gleich Null. Die Gleichung der lebendigen Kraft wird folglich:

$$Wa = \frac{P}{2g}(V^2 - V'^2),$$

woraus:

$$W = \frac{P}{2ga}(V^2 - V'^2).$$

Setzt man jetzt:

$$\tfrac{1}{2}(V + V') = v, \quad W = \zeta p A \frac{v^2}{2g},$$

so findet man hieraus den Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = \frac{4P}{pAa} \cdot \frac{V^2 - V'^2}{(V + V')^2} = \frac{4P}{pAa} \frac{V - V'}{V + V'}.$$

Die in Metz im Jahre 1840 angestellten Versuche mit Kugelprojectilen von grossen Kalibern von 8, 12, 22 und 24 Centimetern Durchmesser haben auf den Werth:

$$\zeta = 0{,}5375\,(1 + 0{,}000\,29274\, v + 0{,}000\,000\,1205\, v^2)$$

geführt. Das mit v^2 multiplicirte Glied kann man indessen hier durch eine Compensation bei den übrigen Coefficienten vernachlässigen, ohne die Uebereinstimmung der Formel mit den Beobachtungen merklich zu beeinträchtigen.

Aeltere Versuche von Hutton mit kleineren Kugelprojectilen geben einen etwas grösseren Widerstand als die obige Formel. Es scheint daher, dass die absolute Grösse der Projectile nicht ohne Einfluss auf den Widerstandscoefficienten ist.

Um sämmtlichen Versuchen durch die einfachste Formel mit hinreichender Genauigkeit zu genügen, hat man daher die folgende Formel angenommen:

$$\zeta = 0{,}536\left(0{,}74 + \frac{0{,}15}{0{,}16 + 2R}\right)(1 + 0{,}00072\, v),$$

wo R den Halbmesser der Kugel, v die Geschwindigkeit bezeichnet, und der Fuss als Längeneinheit angenommen ist.

§. 335.

Wie früher bemerkt, hat Regnault das Gewicht der trockenen atmosphärischen Luft in Paris bei einem Barometerstande von $0^m,76$ und 0° Temperatur gleich $1^k,293187$ für einen Kubikmeter gefunden. Es giebt dies die allgemeine Formel des Gewichtes eines Kubikmeters trockener atmosphärischer Luft bei φ° geographischer Breite und in der Höhe h über die Meeresoberfläche:

$$p = 1^k,292673\,(1 - 0,0025911 \cos 2\varphi)\left(\frac{R}{R+h}\right)^2,$$

wenn R den Halbmesser der Erde bezeichnet.

Hieraus findet man das Gewicht eines Kubikfusses trockener atmosphärischer Luft bei $0^m,760$ Barometerhöhe und 0° Temperatur in Berlin gleich 0,0855 preuss. Pfund.

Für die gewöhnliche feuchte atmosphärische Luft kann man bei t° Temperatur und einer Barometerhöhe von b Millimeter setzen:

$$p = 0,0853 \,.\, \frac{b}{760}\,(1 + 0,004\,t) \text{ preuss. Pfund.}$$

§. 336.

Wir haben in der ersten Abtheilung §§. 96 und 97 als Anwendung der allgemeinen Gesetze der Bewegung eines materiellen Punktes die Bewegung eines Projectils in einem widerstehenden Medium untersucht unter der Voraussetzung, dass der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Wir werden hier diese Untersuchung auf die im §. 334 gegebene Formel des Luftwiderstandes ausdehnen, wo ein dem Kubus der Geschwindigkeit proportionales Glied hinzugefügt ist. Es ist dann:

$$W = \zeta p A \frac{v^2}{2g} = \frac{apA}{2g} v^2 (1 + bv),$$

wo:

$$a = 0,536\left(0,74 + \frac{0,15}{0,16 + 2R}\right),\ A = \pi R^2,\ b = 0,00072.$$

Es werden folglich die Differentialgleichungen der Bewegung, wenn man die x-Axe horizontal, die z-Axe vertikal annimmt:

$$md_t^2x = -W\, d_sx = -\frac{apA}{2g} v^2 (1+bv)\, d_sx,$$

$$md_t^2z = -gm - Wd_sz = -gm - \frac{apA}{2g} v^2 (1+bv) d_sz,$$

wo m die Masse, gm das Gewicht des Projectils bezeichnet.

Setzt man der Kürze wegen:

$$\frac{apA}{2gm} = c,$$

so wird folglich:

$$d_t^2x = -cv^2 (1+bv)\, d_sx,\quad d_t^2z = -g - cv^2(1+bv)\, d_sz.$$

Aus diesen Gleichungen findet man dann wie im §. 96 durch Elimination von $cv^2(1+bv)$:

$$d_t^2z = -g + d_t^2x \,.\, \frac{d_sz}{d_sx} = -g + d_t^2x \,.\, d_xz.$$

Setzt man jetzt, wie im §. 96, $d_xz = \theta$, wo θ die Tangente des Winkels bezeichnet, welchen die Bahn im Punkte (x,z) mit der horizontalen x-Axe bildet, so wird:

$$d_t^2z = -g + \theta d_t^2x.$$

Es ist jetzt:

$$d_tz = d_xz \,.\, d_tx = \theta d_tx,\quad d_t^2z = \theta d_t^2x + d_t\theta \,.\, d_tx.$$

Dieser Werth substituirt giebt dann:

$$d_t\theta \,.\, d_tx = -g,$$

Um jetzt d_tx zu finden, betrachten wir wieder die Gleichung:

$$d_t^2x = -cv^2 (1+bv)\, d_sx.$$

Es ist hier d_sx gleich dem Cosinus des Winkels, welchen die Bahn im Punkte (x, z) mit der horizontalen x-Axe bildet, folglich:

$$d_sx = \sqrt{1+\theta^2}.$$

Bezeichnet man durch v' die horizontale Componente der Geschwindigkeit v, so ist:

$$v' = vd_sx = v\sqrt{1+\theta^2},\quad d_tx = d_sx \,.\, d_ts = vd_sx = v',$$

und folglich: $d_t^2x = d_tv'$. Es werden durch die Substitution dieser Werthe die beiden obigen Differentialgleichungen die Form annehmen:

$$d_t u' = -\frac{cv'^2}{\sqrt{1+\theta^2}}\left(1+\frac{b}{\sqrt{1+\theta^2}}v'\right);\ v'd_t\theta = -g.$$

Um aus diesen Gleichungen die Zeit t fortzubringen und folglich eine Gleichung der Bahn zu finden, werden wir die Bahn in kleinere Stücke theilen, in welchen sich θ oder der Winkel, welchen die Bahn mit der x-Axe bildet, nicht merklich ändert. Man kann alsdann statt der veränderlichen Grösse $d_s x = \sqrt{1+\theta^2}$ einen mittleren Werth derselben $\frac{x}{s}$ setzen, wenn s die Länge des in Frage stehenden Theils der Bahn, x dessen horizontale Projection bezeichnet. Setzen wir der Kürze wegen $\frac{s}{x} = \beta$, so wird folglich: $\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} = \beta$, und die erste Gleichung wird:

$$d_t v' = -\beta c v'^2 (1 + \beta b v').$$

Hieraus findet man dann:

$$dt = \frac{-dv'}{\beta c v'^2 (1+\beta b v')},$$

$$dx = d_t x \,.\, dt = v' dt = \frac{-dv'}{\beta c v' (1+\beta b v')},$$

und hieraus durch Integration:

$$x = \frac{1}{\beta c}\log \text{nat}\left(\frac{1+\beta b v'}{v'}\right) + \text{const.}$$

Bezeichnet man jetzt durch u' den Anfangswerth der horizontalen Geschwindigkeit v', so wird:

$$x = \frac{1}{\beta c}\log \text{nat}\left(\frac{u'}{v'}\cdot\frac{1+\beta b v'}{1+\beta b u'}\right).$$

Aus dieser Gleichung findet man dann umgekehrt:

$$v' = \frac{u'}{e^{\beta c x}(1+\beta b u') - \beta b u'}.$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung: $v' d_t \theta = -g$, nachdem man diese auf die Form:

$$v' d_t \theta = v' d_x \theta \,.\, d_t x = v'^2 d_x \theta = -g$$

gebracht hat, so findet man:

$$d_x \theta = -\frac{g}{u'^2}\left\{e^{\beta c x}(1+\beta b u') - \beta b u'\right\}^2.$$

Integrirt man diese Gleichung und bestimmt die Constante durch die Bedingung, dass, wenn $x = 0$, $\theta = \operatorname{tang}\alpha$ sein soll, wo α den Anfangswerth der Neigung des in Frage stehenden Theils der Bahn bezeichnet, so findet man:

$$\theta = d_x z = \operatorname{tang}\alpha - \frac{g}{u'^2}\left\{\frac{1}{2\beta c}(1+\beta b u')^2\left(e^{2\beta c x} - 1\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2bu'}{c}(1+\beta b u')\left(e^{\beta c x} - 1\right) + \beta^2 b^2 u'^2 x\right\},$$

und hieraus durch eine neue Integration:

$$z = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{g}{u'^2}\left\{\frac{1}{4\beta^2 c^2}(1+\beta b u')^2\left(e^{2\beta c x} - 2\beta c x - 1\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2bu'}{\beta c^2}(1+\beta b u')\left(e^{\beta c x} - \beta c x - 1\right) + \tfrac{1}{2}\beta^2 b^2 u'^2 x^2\right\}.$$

Diese Gleichung kann auch, weil $u' = u\cos\alpha$, wo u den Anfangswerth der Geschwindigkeit bezeichnet, auf die Form gebracht werden:

$$z = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}\left\{2(1+\beta b u')^2 \cdot \frac{e^{2\beta c x} - 2\beta c x - 1}{4\beta^2 c^2 x^2} - \right.$$

$$\left. - 4\beta b u'(1+\beta b u')\frac{e^{\beta c x} - \beta c x - 1}{\beta^2 c^2 x^2} + \beta^2 b^2 u'^2\right\},$$

oder, wenn man der Kürze wegen:

$$2(1+\beta b u')^2 \cdot \frac{e^{2\beta c x} - 2\beta c x - 1}{(2\beta c x)^2} - 4\beta b u'(1+\beta b u') \cdot \frac{e^{\beta c x} - \beta c x - 1}{(\beta c x)^2} +$$

$$+ \beta^2 b^2 u'^2 = \psi(x,u')$$

setzt:

$$z = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}\psi(x,u').$$

Bei der Bewegung im leeren Raume war nach §. 93:

$$z = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}.$$

Es unterscheidet sich daher die Gleichung des betrachteten Theils der Bahn im widerstehenden Medium von dem entsprechen-

Theil der Bahn im leeren Raume nur durch den dem letzten Gliede hinzugefügten Faktor $\psi(x,u')$.

Bezeichnet man durch φ den Neigungswinkel der Bahn im Punkte (x,z) gegen die horizontale x-Axe, so ist $\theta = \operatorname{tang}\varphi$, und es kann dieser Werth ebenso auf die Form gebracht werden:

$$\theta = \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\alpha - \frac{gx}{u^2\cos^2\alpha}\cdot\varphi(x,u'),$$

wo:

$$\varphi(x,u') = (1-\beta bu')\frac{e^{2\beta cx}-1}{2\beta cx} + 2\beta bu'(1+\beta bu') - \frac{e^{\beta cx}-1}{\beta cx} + \beta^2 b^2 u'^2.$$

Die Zeit als Funktion der Abscissen x findet man aus der früher entwickelten Formel:

$$v' = \frac{u'}{e^{\beta cx}(1+\beta bu') - \beta bu'},$$

indem man bemerkt, dass $v' = d_t x$ ist. Kehrt man die Formel um, so hat man folglich:

$$d_x t = \frac{1}{u'}e^{\beta cx}(1+\beta bu') - \beta b,$$

und hieraus durch Integration:

$$t = \frac{1+\beta bu'}{\beta cu'}(e^{\beta cx}-1) - \beta bx = \frac{x}{u'}\cdot\left\{(1+\beta bu')\cdot\frac{e^{\beta cx}-1}{\beta cx} - \beta bu'\right\},$$

oder, wenn man:

$$\chi(x,u') = (1+\beta bu')\frac{e^{\beta cx}-1}{\beta cx} - \beta bu',$$

setzt, und bemerkt, dass $u' = u\cos\alpha$:

$$t = \frac{x}{u\cos\alpha}\cdot\chi(x,u').$$

Aus der Formel:

$$v' = \frac{u'}{e^{\beta cx}(1+\beta bu') - \beta bu'}$$

findet man ferner, indem man substituirt $v' = v\cos\varphi$, $u' = u\cos\alpha$:

$$v = \frac{u \cos \alpha}{\cos \varphi} \cdot \frac{u'}{e^{\beta c x}(1 + \beta b u') - \beta b u'},$$

oder wenn man:

$$e^{\beta c x}(1 + \beta b u') - \beta b u' = \mu(x, u')$$

setzt:

$$v = \frac{u \cos \alpha}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{\mu(x, u')}.$$

Diese vier Formeln:

$$z = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{g x^2}{2 u^2 \cos^2 \alpha} \psi(x, u'),$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} \alpha - \frac{g x}{u^2 \cos^2 \alpha} \cdot \varphi(x, u'),$$

$$t = \frac{x}{u \cos \alpha} \chi(x, u'),$$

$$v = \frac{u \cos \alpha}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{\mu(x, u')}$$

unterscheiden sich dann von den entsprechenden Formeln der Bewegung im leeren Raume nur durch die Faktoren: $\psi(x,u')$, $\varphi(x,u)$, $\chi(x,u')$, $\mu(x,u')$, welche bei der Bewegung im leeren Raume alle gleich der Einheit werden.

Um die Grösse: $\beta = \frac{s}{x}$ zu finden, bemerke man, dass dieses Verhältniss, welches den mittleren Werth der Grösse $d_x s = \frac{1}{\cos \varphi}$ darstellt, bei der Bahn in der widerstehenden Luft nicht merklich von demjenigen eines Parabelbogens abweichen kann, dessen beide Endpunkte genau dieselben Neigungswinkel φ und α besitzen. Man hat aber bei einer Parabel, deren Gleichung ist:

$$z = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{g x^2}{2 u^2 \cos^2 \alpha},$$

$$\theta = d_x z = \operatorname{tang} \alpha - \frac{g x}{u^2 \cos^2 \alpha}, \quad d\theta = - \frac{g dx}{u^2 \cos^2 \alpha},$$

und hieraus die Bogenlänge:

$$s = \int dx \sqrt{1 + (d_x z)^2} = - \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{g} \int \sqrt{1 + \theta^2}\, d\theta.$$

Substituirt man hier: $\theta = \operatorname{tang}\varphi$, $\sqrt{1+\theta^2} = \frac{1}{\cos\varphi}$, $d\theta = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$, so findet man:

$$s = -\frac{u^2\cos^2\alpha}{g}\int_\alpha^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{u^2\cos^2\alpha}{g}\int_\varphi^\alpha \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}$$

$$= \frac{u^2\cos^2\alpha}{g}\left\{\tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \log\operatorname{nat}\operatorname{tang}\left(\frac{\alpha+90^\circ}{2}\right)\right)\right.$$

$$\left. - \tfrac{1}{2}\left[\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \log\operatorname{nat}\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi+90^\circ}{2}\right)\right]\right\}.$$

Es ist ferner bei der Parabel:

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\alpha - \frac{gx}{u^2\cos^2\alpha},$$

oder:

$$x = \frac{u^2\cos^2\alpha}{g}(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\varphi),$$

und es wird folglich, wenn man der Kürze wegen setzt:

$$\tfrac{1}{2}\left[\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \log\operatorname{nat}\operatorname{tang}\left(\frac{\alpha+90^\circ}{2}\right)\right] = \xi(\alpha),\ \beta = \frac{s}{x} = \frac{\xi(\alpha)-\xi(\varphi)}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\varphi}.$$

Indem man jetzt allgemeine Tafeln der Funktionen: $\xi(\alpha)$, $\psi(x,u')$, $\varphi(x,u')$, $\chi(x,u')$, $\mu(x,u')$ berechnet, wird es durch die obigen Formeln sehr leicht, die Bahn des Projectils in der Luft stückweise mit einer beliebigen Genauigkeit zu berechnen.

Bei kleinen Neigungswinkeln kann man ohne merklichen Fehler $\beta = 1$ setzen.

Gedruckt bei Julius Sittenfeld in Berlin.

Berichtigungen.

Seite. Zeile.

6 — In die Tafel der Vergleichung der Fussmaasse hat sich ein Rechnungsfehler eingeschlichen. Es ist:

1 Pariser Fuss = 1,035616 Norwegische Fuss.
1 Preussischer Fuss = 1,000362 —
1 Schwedischer Fuss = 0,946329 —
1 Wiener Fuss = 1,007557 —
1 Englischer Fuss = 0,971488 —
1 Norwegischer Fuss = 0,999638 Preussische Fuss, = 1,056715 Schwedische F. = 0,992494 Wiener F. = 1,029349 Engl. Fuss.

23 16 v. o. statt: $u_n = o$, lies: $u_p = o$
— 20 v. o. statt: $d_t y_2$, lies: $d_t y_1$
27 11 v. o. statt: y_5 und z_5, lies: y_4, z_4
32 2 v. o. streiche: $= a_3 + 6$
45 6 v. o. zwischen den Parenthesen statt: ., lies: —
— 7 v. o. die letzte Klammer soll quadrirt werden.
47 2 v. o. in der Klammer soll + statt — gesetzt werden.
56 3 v. o. statt: drei, lies: zwei
68 10 v. o. statt: sein Arm r, lies: sein Arm q
74 12 v. o. statt: (§. 37.), lies: (§. 36.)
76 11 v. u. statt: mit, lies: zu
85 5 v. u. statt $\Sigma Yy \Sigma Xx$, lies: $\Sigma Yz \Sigma Xx$
92 1 v. o. der Nenner: $\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'$, wird quadrirt: $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}')^2$
— 2 v. o. die Vorzeichen werden geändert.
94 9 v. u. statt: $\mathfrak{y}' = o$, lies: $\mathfrak{x}' = o$
96 7 v. o. statt: $\mathrm{x} = \mathrm{o}$, lies: $x = o$
— 9 v. o. statt: erste, lies: zweite
— 10 v. o. statt: zweite, lies: erste
— 11 v. o. statt: $\frac{\mathfrak{x}'^2}{\mathfrak{R}'^2}$, lies: $\frac{\mathfrak{X}^2}{\mathfrak{R}'^2}$

Seite.	Zeile.	
100	7 v. u.	statt: Dieses, lies: Diese
110	8 v. u.	statt: $\frac{1}{3}$, lies überall: $\frac{1}{s}$
120	3 v. o.	statt: $\int_0^c \sqrt{2px}\, dx = \frac{2}{3} c \sqrt{2pc}$, lies: $= 2\int_0^c \sqrt{2px}\, dx = \frac{4}{3} c \sqrt{2pc}$
—	5 v. o.	statt: $x = \frac{6}{5} c$, lies: $x = \frac{3}{5} c$
141	13 v. o.	streiche: oder Produkte
142	3 v. u.	statt: —, lies: =
149	7 v. u.	statt: der Bewegungsmomente, lies: des Bewegungsmomentes.
154	3 v. u.	statt: +, lies: —
156	2 v. u.	im letzten Integrale füge zu: ds
157	8 v. o.	statt: $A - \vartheta$, lies: $A - \Theta$
158	11 v. u.	statt: (Fig. 42.), lies: (Fig. 47. Taf. II.)
—	10 v. u.	statt: unendlich grossen, lies: unendlich grossen negativen
—	7 v. u.	an zwei Stellen statt: ϑ^2, lies: $-\vartheta^2$
—	5 v. u.	an zwei Stellen statt: $\int^{\infty}$, lies: $\int^{-\infty}$
—	4 v. u.	statt: $\vartheta = \infty$, lies: $\vartheta = -\infty$
—	3 v. u.	statt: $\int \frac{d\vartheta}{n\vartheta^2} = \text{Const} - \frac{1}{n\vartheta}$, lies: $= -\int \frac{d\vartheta}{n\vartheta^2} = \text{Const} + \frac{1}{n\vartheta}$
—	1 v. u.	statt: $+\frac{1}{n} \log \text{nat}\, \vartheta$, lies: $-\frac{1}{n} \log \text{nat}\, \vartheta$
159	1 v. o.	statt: $\int^{\infty}$, lies: $\int^{-\infty}$
—	9 v. o.	statt: $d\vartheta = -n\Theta dx = o$, lies: $d\vartheta = n(\Theta - A)dx = o$.
160	1 v. o.	im Nenner statt: $n^2(A - \Theta)$, lies: $n(A - \Theta)^2$
—	12 v. o.	statt: $v = \sqrt{\frac{g}{u}}$, lies: $v = \sqrt{\frac{g}{n}}$.
161		Die 6 untersten Zeilen werden geändert in:

$$= \frac{1}{n} \log \left(\frac{e^{(t+t')\sqrt{gn}} + e^{-(t+t')\sqrt{gn}}}{e^{t'\sqrt{gn}} + e^{-t'\sqrt{gn}}} \right)$$

Hieraus findet man ferner:

$$(5)\quad t = -t' + \frac{1}{\sqrt{gn}} \operatorname{log\,nat}\left(e^{nh} \cdot \frac{e^{t'\sqrt{gn}} + e^{-t'\sqrt{gn}}}{2} + \sqrt{e^{2nh}\left(\frac{e^{t'\sqrt{gn}} + e^{-t'\sqrt{gn}}}{2}\right)^2 - 1} \right)$$

$$(6)\quad v = \sqrt{\frac{g}{n}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2}{e^{nh}\left(e^{t'\sqrt{gn}} + e^{-t'\sqrt{gn}}\right)} \right)^2}$$

Der Grenzwerth von v wird folglich: $v = \sqrt{\frac{g}{n}}$.

Seite.	Zeile.	
162	6 v. u.	im Zähler und Nenner statt: $\sqrt{\frac{n}{g}}$, lies: $u\sqrt{\frac{n}{g}}$
—	5 v. u.	ebenso statt: $\sqrt{\frac{n}{g}}$, lies: $u\sqrt{\frac{n}{g}}$
170	6 v. o.	statt: keine Hauptaxen, lies: keine andere Hauptaxen
173	12 v. o.	statt: Coordinatenaxe, lies: Coordinatenaxen
—	13 v. o.	statt: zugehörige Hauptaxe, lies: zugehörigen Hauptaxen
178	6 v. o.	statt: Dm, lies: DO
—	11 u. 12 v. o.	statt: Sein Moment, lies: Das Moment des ganzen abgeschnittenen Cylinders
179	7 v. o.	statt: $\int_o^A$, lies: $\int_a^b$
181	1 v. o.	statt: cos (wz) cos (vz), lies: cos (uz) cos (vz)
—	12 v. u.	statt: cos $(wz)d_t$ [cos (wz)], lies: cos $(uz)d_t$ [cos (wz)]
182	13 v. o.	statt: $U = vr - uq$, lies: $U = vr - wq$
184	10 v. o.	statt: (§. 91), lies: (§. 90)
188	3 v. o.	statt: §. 111, lies; §§. 90 und 111.
189	3 v. o.	statt: angeblichen, lies: augenblicklichen
201	11 v. o.	statt: $d\psi$, lies: $d\vartheta$
—	12 v. o.	statt; $\frac{1}{2}\varphi =$ oder $< \vartheta$, lies: $\frac{1}{2}\alpha =$ oder $> \vartheta$
203	13 v. o.	statt: $\tang^2 \frac{1}{4}\alpha$, lies: $\tang^2 \frac{1}{2}\alpha$
207	6 v. o.	statt: $r = \frac{k^2}{\alpha}$, lies: $\frac{k^2}{a}$
—	8 v. u.	statt: $-2Q\omega^3 - 3R\omega^4$, lies: $-Q\omega^3 - R\omega^4$
—	6 v. u.	statt: $+ Q(d_t\varphi)^2$, lies: $- Q(d_t\varphi)^2$
209	1 v. o.	statt: $s^2 + bs + p = o$, lies: $s^2 + ps + b = o$

Seite.	Zeile.
209	3 v. o. statt: $\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2}$, lies: $\frac{\sqrt{4b-p^2}}{2} \cdot \sqrt{-1}$
—	8 v. o. statt: $=o$, lies: $=1$
—	8, 6 und 4 v. u. statt: $+$, lies: $-$
—	3 v. u. statt: $+($, lies: $-($
—	1 v. u. statt: $C''_1 = -\frac{p}{2}+$, lies: $C''_1 = \frac{p}{2}-$
213	11 und 12 v. o., 6, 3 und 1 v. u. statt: A, liess: P
214	8 v. o. statt: α, lies: ω
—	7 v. u. statt: A, lies: P
217	1 v. u. statt: (5), lies: (6)
219	12 und 8 v. u. statt: μR, lies: μ
220	15 v. o. statt: §. 127, lies: §. 128.
221	12 v. u. im Nenner statt: $3\mu \cos e - \sin e$, lies: $g(3\mu \cos e - \sin e)$
288	11 v. o. statt: §. 139 und §. 140, lies: §. 157 und 158
289	9 v. o. statt: $=\frac{d_s x}{d_s^2 y}$, lies: $=-\frac{d_s x}{d_s^2 y}$
292	Der rückwirkende Festigkeitscoefficient des gegossenen Eisens, statt: 8200 bis 11500, lies: 82000 bis 115000
297	15 v. o. statt: Cd parallel mit ASB, lies: AB parallel mit CD
305	8 v. u. statt: oben oder unten, lies: unten oder oben
306	10 v. o. statt: unten und die Kante oben, lies: oben und die Kante unten
356	6 v. u. statt: $-\frac{\sin\omega}{EF}$, lies: $+\frac{\sin\omega}{EF}$
357	1 v. o. ebenso statt: $-$, lies: $+$
365	5 v. o. statt: $=\frac{\pi}{\varepsilon}\cdot\frac{f}{a}$, lies: $=\frac{\pi}{z}\cdot\frac{f}{a}$
383	1 v. o. statt: $\frac{1}{24}(d_x y)^4$, lies: $-\frac{1}{8}(d_x y)^4$
384	13 v. u. statt: $\frac{2p}{E\omega}\left(\frac{b^3}{2a}-\frac{b^4}{3a^2}\right)$, lies: $\frac{p}{E\omega}\cdot\frac{ab}{3}$
386	8 v. o. statt: wird $x = o$, lies: so wird $x = a$, sind sie negativ, so wird $x = o$
387	6 v. o. statt: $y = \frac{2bx^2}{a^2}$, lies: $y = \frac{bx^2}{a^2}$
—	8 v. o. statt: $\frac{12ab^3}{105}$, lies: $\frac{8ab^3}{105}$

Seite. Zeile.

387 9 und 12 v. o. statt: $ab - \frac{b^3}{a} + \frac{2b^4}{3a^2}$, lies: $\frac{2ab}{3}$

389 17 v. o. statt: $\frac{12ab^3}{105}$, lies: $\frac{8ab^3}{105}$

— 18 v. o. statt: $ab - \frac{b^3}{a} + \frac{2b^4}{3a^2}$, lies: $\frac{2ab}{3}$

— statt der letzten Formel wird gesetzt:

$$- X = \left\{ \left(\tfrac{25}{64} Q + \tfrac{1}{2} ap\right) - \left(\tfrac{15}{16} Q + \tfrac{5}{4} pa\right) \cdot \frac{\varepsilon}{a^2 E\omega} \right\} \frac{a}{b} +$$

$$+ \frac{15}{8E\omega} \left(\tfrac{1}{2} Q + \tfrac{2}{3} pa\right) \left(\tfrac{1}{2} Q + \tfrac{4}{3} pa\right) + \ldots\ldots$$

390 9 v. o. statt: $ab - \frac{b^3}{a} + \frac{2b^4}{3a^2}$, lies: $\frac{2ab}{3}$

394 7 v. o. statt: $2q\eta$, lies: $2bq\eta$

398 4 v. u. statt: $4T\sqrt{Tba^{\frac{1}{3}}}$, lies: $4T\sqrt{Tb} \,.\, a^{\frac{3}{2}}$

407 6 v. o. statt: $\frac{D\Theta}{r}$, lies: $\frac{D\Theta}{l}$

408 5 v. u. statt: 900000 bis 1000000, lies:
9000000 bis 10000000.

438 4 v. o. statt: $\sqrt{\frac{V_0^2 + 2gMs}{P}}$, lies: $\sqrt{V_0^2 + \frac{2gMs}{P}}$

439 10 v. u. statt: EB, lies: EF

466 statt: Cap. IV., lies: Cap. V.

475 3 v. o. statt: $\eta = \frac{1}{2} \frac{\int (y_1^2 - y_0^2)\, dx}{\int (y_1 - y_0)\, dx}$, lies: $\eta = \frac{1}{2} \frac{\int x(y_1^2 - y_0^2)\, dx}{\int x(y_1 - y_0)\, dx}$

487 13 v. u. statt: A'NB'J, lies: L'NM'J

507 8 v. o. statt: $A\mu$, lies: AM

511 1 v. o. statt: Fig. 132, lies: Fig. 133.

520 1 v. u. statt: $1\frac{1}{48}$, lies: $1 - \frac{1}{48}$

533 2 v. u. statt:

$$Q = mbH\sqrt{\tfrac{4}{9} \,.\, 2gH + u^2} = \tfrac{2}{3} mbH\sqrt{2gH + \tfrac{9}{4} u^2},$$

lies: $Q = mbH\sqrt{2g\zeta}$, wo $\zeta = \frac{4}{9}\left(\frac{\left(H + \frac{u^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{u^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}}{H}\right)^2$,

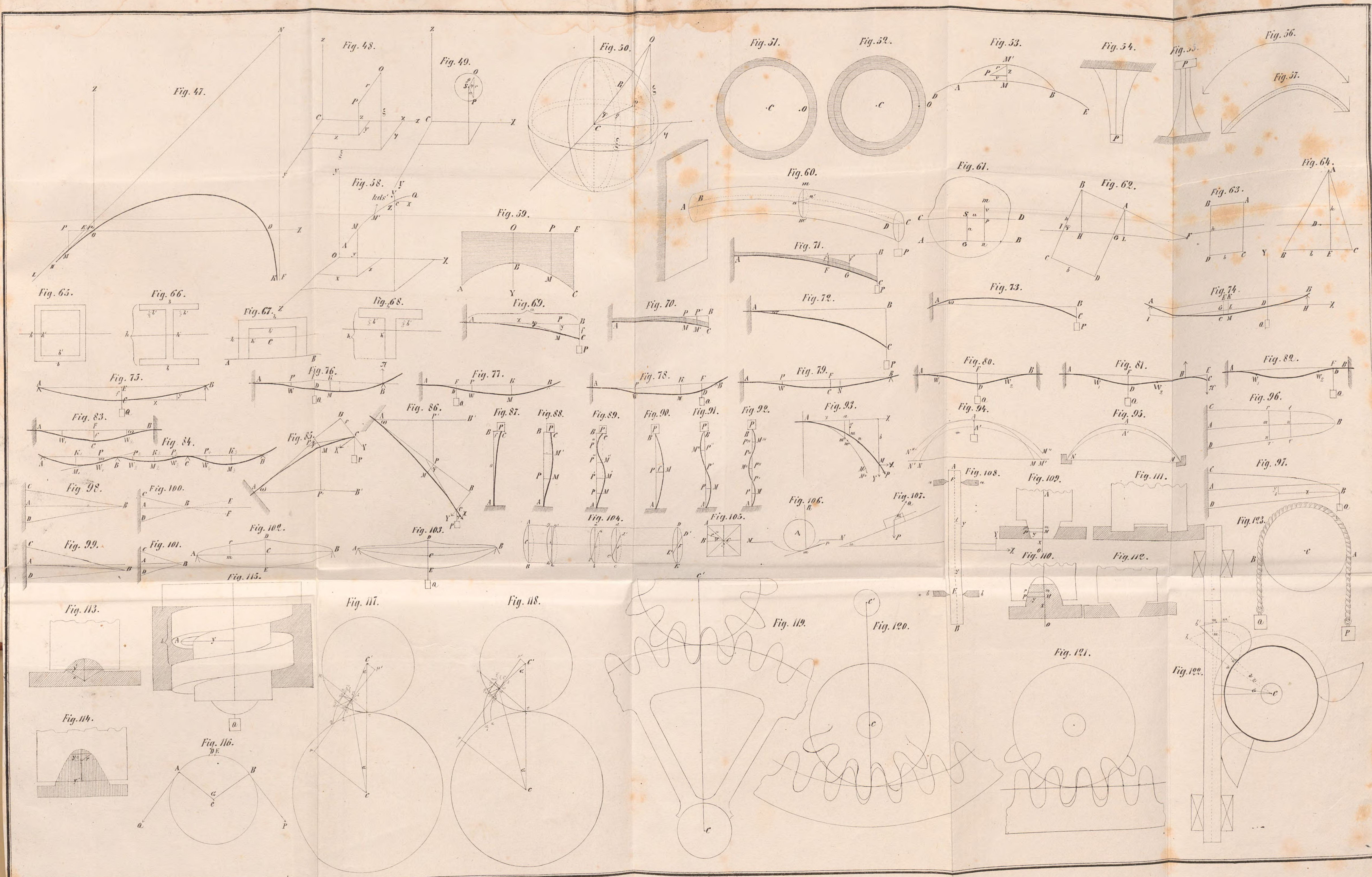
woraus: $Q = \frac{2}{3} mb\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{u^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{u^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$. (s. S. 578.)

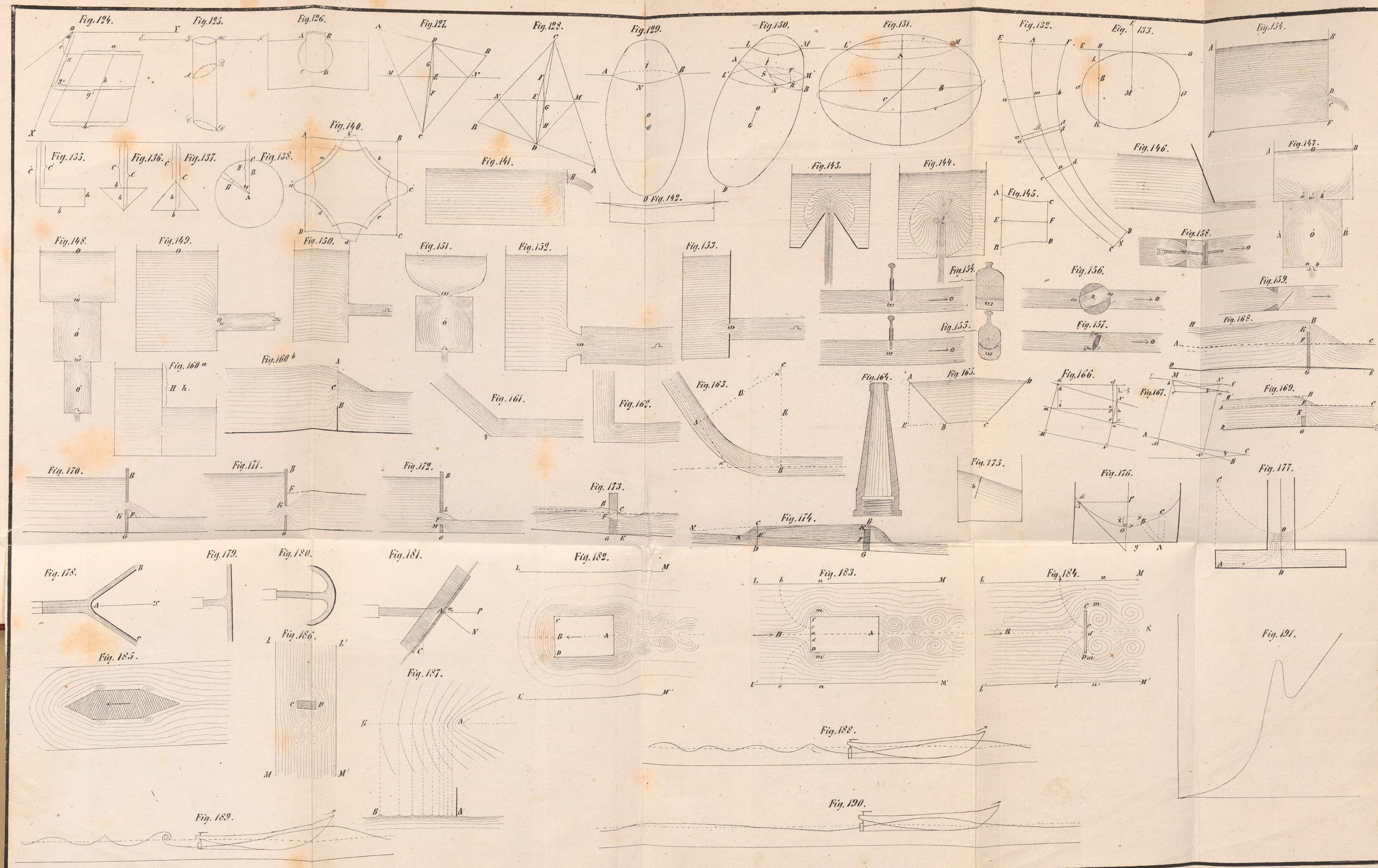
539 8 v. o. statt: $\frac{4}{9}$, lies: 0,4

545 7 v. o. statt: Fig. 160, lies: 160^a.

— 9 v. u. statt: Fig. 160, lies: 160^b.

Seite.	Zeile.	
553	11 v. u.	statt: $= \frac{pl}{g\omega} \cdot \frac{Q}{\omega}\left(\alpha + \frac{\beta Q}{\omega}\right)$, lies: $+ \frac{pl}{g\omega} \cdot \frac{Q}{\omega}\left(\alpha + \frac{\beta Q}{\omega}\right)$
—	8 v. u.	statt: $2gH\omega$ im Zähler des ersten Bruchs lies: $2gH\omega^2$ und quadrire den letzten Bruch.
—	3 v. u.	statt: $\frac{0,32}{\pi^2 g}$, lies: $\frac{3,2}{\pi^2 g}$
554	12 v. u.	statt: $d^1 =$, lies: $\delta^1 =$
555	13 v. o.	streiche: durch V die Ausflussgeschwindigkeit.
—	2 v. u.	statt: 0,0142, lies: 0,0390
572	5 v. u.	statt: $\varphi =$, lies: $\varphi +$
578	3 v. o.	statt: $\frac{2}{3} m \sqrt{2g}$, lies: $\frac{2}{3} mb \sqrt{2g}$


Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.
Fig. 123.


Fig. 124.
Fig. 125.
Fig. 126.
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129.
Fig. 130.
Fig. 131.
Fig. 132.
Fig. 133.
Fig. 134.
Fig. 135.
Fig. 136.
Fig. 137.
Fig. 138.
Fig. 140.
Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 143.
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 147.
Fig. 148.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.
Fig. 153.
Fig. 154.
Fig. 155.
Fig. 156.
Fig. 157.
Fig. 158.
Fig. 159.
Fig. 160 a
Fig. 160 b
Fig. 161.
Fig. 162.
Fig. 163.
Fig. 164.
Fig. 165.
Fig. 166.
Fig. 167.
Fig. 168.
Fig. 169.
Fig. 170.
Fig. 171.
Fig. 172.
Fig. 173.
Fig. 174.
Fig. 175.
Fig. 176.
Fig. 177.
Fig. 178.
Fig. 179.
Fig. 180.
Fig. 181.
Fig. 182.
Fig. 183.
Fig. 184.
Fig. 185.
Fig. 186.
Fig. 187.
Fig. 188.
Fig. 189.
Fig. 190.
Fig. 191.

Bayer. Staats-
Bibliothek
München

Buchbinder in
MÜNCHEN.

H. HUTMACHER
Buchbinder in
MÜNCHEN.

H. HUTMACHER
Buchbinder in
MÜNCHEN.

H. HUTMACHER
Buchbinder in
MÜNCHEN.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Broch, Ole Jacob,

Lehrbuch der Mechanik

Berlin u. Christiania 1855

Math.a. 49 x
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080592-7